



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

WILEY-INTERSCIENCE LIBRARIES



3 3433 06644609 1

1. Mechanics, 1741

87D



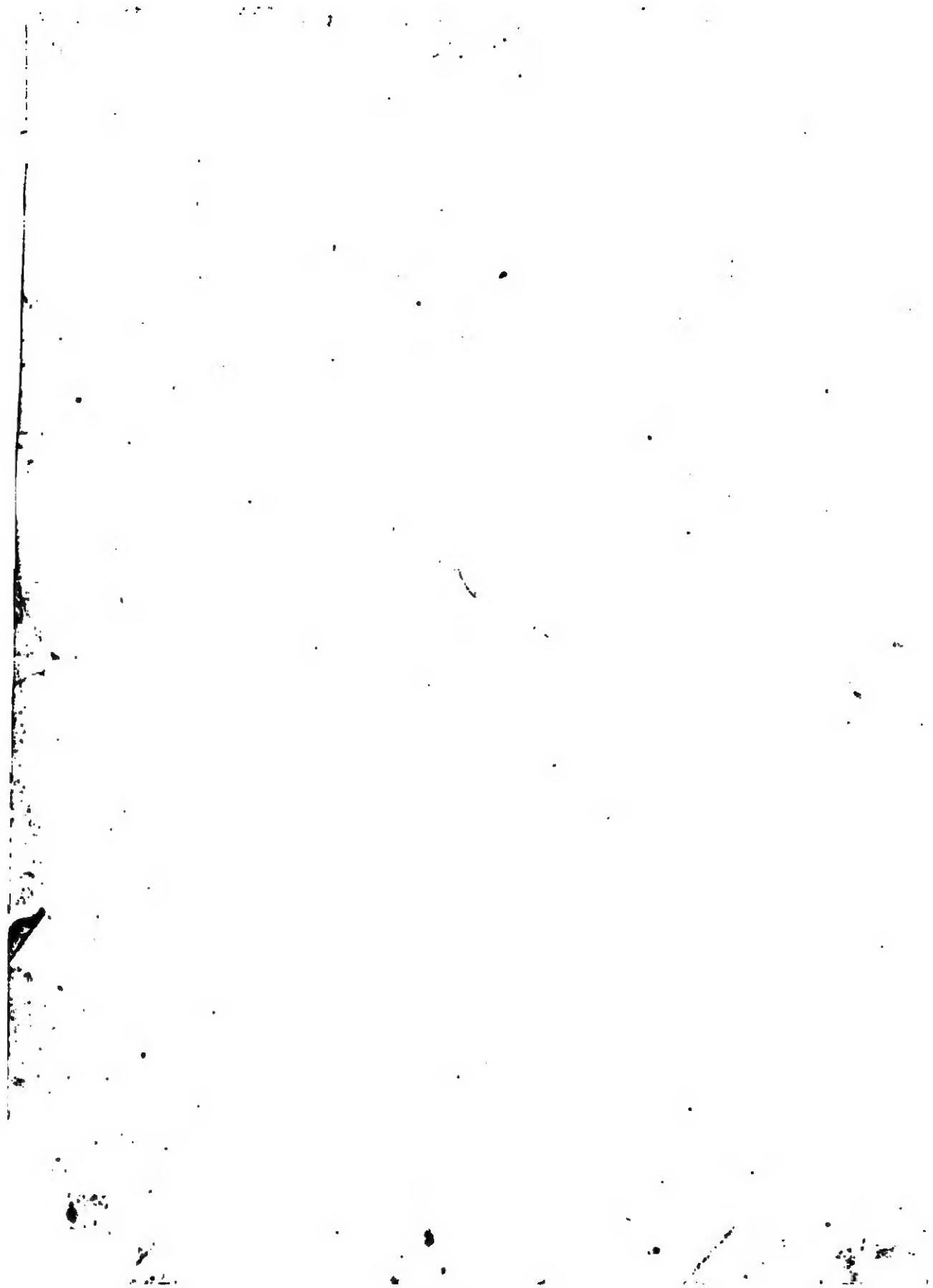
pin 17

13
280. a

Haidier

PEB

691. C



S U I T E
D E L A
M E S U R E
DES SURFACES,
E T
DES SOLIDES.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

מְדַבֵּר בְּשֵׁם
יְהוָה
יִשְׂרָאֵל

LA MECHANIQUE GÉNÉRALE,

CONTENANT

LA STATIQUE, L'AIROMETRIE,

L'HYDROSTATIQUE,

ET

L'HYDRAULIQUE,

POUR SERVIR D'INTRODUCTION AUX SCIENCES

PHYSICO-MATHEMATIQUES.

Par M. l'Abbé DEIDIER, Professeur de Mathématique
aux Ecoles Royales d'Artillerie de la Fère.

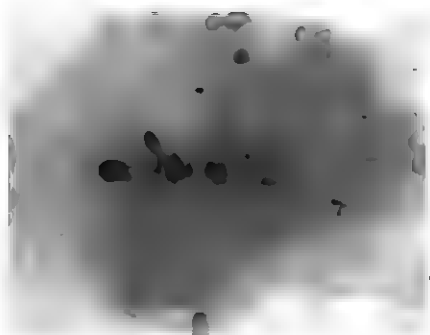


A PARIS, RUE S. JACQUES,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy
pour l'Artillerie & le Génie, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



PROY W3B
21534
VBA661



A SON ALTESSE SERENISSIME
MONSEIGNEUR
LE COMTE D'EU.



MONSEIGNEUR,

*La reconnoissance & le devoir exigent
de moi le tribut de cet Ouvrage que j'ose*

E P I S T R E.

*prendre la liberté d'offrir à VOTRE
ALTESSE SERENISSIME;
lorsque je le composai, je n'avois en vûe
que l'instruction du Public, auquel j'avois
déjà consacré mes autres Traités; mais
depuis que V. A. S. a daigné me choisir
pour remplir une Place de Professeur de
Mathématiques dans une des Ecoles de
l'Artillerie, j'ai retouché avec attention
tout ce que j'avois écrit sur les Méchaniques;
& je n'ai rien négligé pour rendre cette
Matiere encore plus utile à M^{rs}. les Officiers
de l'Artillerie & aux autres Corps qui ont
le bonheur d'être sous ses Ordres; leur ins-
truction est aujourd'hui mon unique objet,
& je n'épargnerai rien pour y réussir, trop
heureux si par mes soins & mon applica-
tion je puis mériter la puissante protection*

E P I S T R E.

*d'un Prince également Auguste & par sa
Naissance, & par ses éminentes Qualités,
& s'il veut bien regarder cet Ouvrage
comme une marque du profond respect avec
lequel je suis*

MONSEIGNEUR,

DE VOTRE ALTESSE SERENISSIME

Le très-humble &
très-obéissant Serviteur
DEIDIER.

A P P R O B A T I O N.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier un Manuscrit intitulé ; *La Méchanique Générale* , dont j'ai crû l'Impression utile. Fait à Paris ce premier Janvier 1741.

MONTCARVILLE.

Nota. Le Privilege est le même que celui de la Mesure des Surfaces & des Solides , du même Auteur , qui se trouve au commencement du même Traité , dont celui-ci est la Suite.



PRÉFACE.



A plupart des Auteurs qui ont traité des Méchaniques ne se sont attachés qu'à ce qui concerne l'équilibre des corps , & de-là bien des Gens se sont imaginés que cette Science rouloit uniquement sur les Machines dont nous faisons usage pour les différens besoins de la vie , & pour ses agrémens. Il faut cependant se détromper ; la Méchanique est la Science du mouvement , & le mouvement en général renferme toute sorte de mouvemens de quelque cause qu'ils puissent provenir. Dans ce sens la Méchanique est la Science universelle de tous les effets que la Nature & l'Art produisent dans les Corps. Les anciens Philosophes peu instruits des secrets de la Physique , n'en expliquoient les causes que par des qualités occultes , des Horreurs du Vuide , des Sympathies , ou Antipathies , des Antiperistases , des Attractiones , & par une infinité d'autres termes dont l'impénétrable obscurité fait assez voir qu'ils cherchoient moins à découvrir la vérité , qu'à cacher leur profonde ignorance aux yeux du crédule public. Le Vulgaire ne manquoit cependant pas d'être ébloui par leurs discours ; ce que les esprits ordinaires entendent le moins est presque toujours ce qu'ils admirent le plus. D'ailleurs les Philosophes des anciens tems passaient pour de grands Hommes. Ils quittoient tout pour s'attacher à leur prétendue Philosophie ; leur air

austere, leurs tons décisifs, leur façon de vivre, leurs habiliemens & souvent même leur mal-propreté, tout sembloit parler en leur faveur. Quel courage n'auroit-il pas fallu pour appeller de leur Jugement au Tribunal de la Raison. Ces Préjugés passaient de l'esprit des Peres dans celui des enfans, & se fortifioient de plus en plus. Quelque talent que l'on eut, de quelque genie que l'on fût doué on ne s'imaginoit point qu'il fût permis d'aller plus loin que ces grands Hommes qu'on regardoit comme venus du Ciel. Leurs Livres étoient autant d'Oracles que l'on consultoit avec soin, & l'on ne croyoit avoir acquis quelque Science, que lorsqu'on se jugeoit en état de donner une prétendue clarté à leur obscur galimathias : de-là cette foule innombrable de grands infolio aussi ennuyeux qu'assommans, dont les Bibliothèques même les mieux choisies se trouvoient inondées. Le mal s'étoit étendu jusqu'aux Mathématiques. Il n'y avoit ni ordre ni méthode dans les Ecrits d'Euclide ; n'importe, on eut crû faire un crime d'en déranger la moindre proposition ; il falloit s'y attacher scrupuleusement, suivre les démonstrations à la Lettre, ou s'excuser par des longues Dissertations, si l'on osoit y faire le moindre changement, quelque clarté qu'il pût apporter au sujet. On a vû plus d'une fois de grands Géometres se faire une guerre puerile pour se disputer la gloire de mieux entendre un mot grec du Texte d'Euclide, de Diophante, ou de quelqu'autre Ecrivain de la venerable Antiquité.

Tel a été l'aveuglement des Hommes pendant une longue suite de Siècles, & tel seroit peut-être encore le Nôtre, si Descartes n'avoit entrepris de nous ouvrir les yeux. Cet illustre Philosophe qui sera toujours au-dessus de tout éloge, s'étant apperçû que l'ignorance

ne se perpetuoit que par la force des Préjugés ne s'appliqua d'abord qu'à nous en faire voir le ridicule , mais bientôt après il nous montra par son exemple qu'il n'y avoit qu'à secouer leur joug pour élever l'esprit humain bien au-delà des bornes étroites où sa trop credule docilité l'avoit réduit. Ce ne furent ni des déclamations diffuses & inintelligibles , ni des termes obscurs & empoulés , ni des tons hauts & décisifs dont il crut devoir se servir pour nous convaincre de la vérité ; il n'en avoit pas besoin ; un discours assez court , simple , uni & dont les principes étoient à la portée de tous les esprits , furent les uniques armes qui le firent triompher de l'erreur , malgré la possession immémoriale dont il ne paroissoit pas qu'on pût la dépouiller. Ne s'en tenir qu'à l'évidence en fait de Science purement humaine , n'affirmer ou nier que ce que l'on voit clairement devoir être affirmé ou nié , en un mot faire usage de sa Raison , c'est ce qu'il semble naturellement que les Hommes de tous les Siècles auroient dû se dire à eux-mêmes , & c'est cependant ce que le seul Descartes a pu leur persuader , tant il est vrai que les Préjugés une fois établis sont des Tyrans dont on ne se délivre qu'avec une extrême difficulté.

Le Discours sur la methode eut tout le succès que son Auteur en attendoit ; la mode des Traductions , des Commentaires & des Scholies s'abolit tout-à-coup ; on aime mieux travailler sur son propre fonds que de cultiver inutilement celui d'autrui ; & au lieu de ces redites éternelles qui ne manquoient pas de reparoitre sur la Scène sous différentes formes , on ne vit bientôt plus que des Ouvrages nouveaux , pleins d'admirables découvertes , qui firent l'honneur du Siècle & celui de leurs Auteurs.

Les qualités occultes furent les premières qui rentrent dans le pays chimerique d'où l'ignorance & l'orgueil les avoit fait sortir. Ce fut dans la Nature même, & non plus dans des êtres logiques que l'on chercha la cause des effets naturels, & voici comme l'on crut devoir raisonner : Tous les changemens qui arrivent aux Corps sont ou des changemens de lieu ou des changemens de figure & d'arrangement, ou des changemens de configuration dans leurs parties, on ne sçauroit en concevoir d'autres, & tout ce qu'on voudroit y ajouter pour expliquer ce qui arrive aux corps seroit non-seulement intelligible, mais encore inutile. Or tous ces changemens ne se font que par le mouvement ; donc le mouvement est la cause générale de tous les effets que la nature ou l'art peuvent produire dans les corps. Voilà déjà bien du fatras retranché de la Physique ; plus de Sympathie, plus d'Horreur du vuide, plus d'attraction, le mouvement fait tout. Quoi de plus simple ? Il faut cependant avouer que nous n'en serions pas plus sçavans si l'on s'en étoit tenu là. Le mot de mouvement est à la vérité plus clair que celui de qualité occulte. Le son du premier réveille une idée, le son de l'autre n'en réveille point. Mais en est-ce assez pour des Philosophes, & croirions-nous surpasser les anciens si nous nous contentions de dire que la chaleur du feu provient du mouvement ? Voyons donc ce que la nouvelle Philosophie ajoute à la première démarche que les recherches lui ont fait faire.

Le mouvement a des Loix constantes & inviolables qu'il n'abandonne jamais. L'expérience & la raison nous en ont fait connoître un assez grand nombre, & à la faveur de la Geometrie jointe au Calcul, on en découvre tous les jours beaucoup d'autres qui peuvent mener bien

loin dans la connoissance du Méchanisme des corps sensibles. La chose est un peu plus difficile à l'égard des corps insensibles, c'est-à-dire des parties infiniment petites qui composent les corps sensibles, & dont les différentes configurations forment la différence des corps. Les Loix du mouvement sont à la verité toujours les mêmes, mais il s'agit de trouver le rapport des Masses, des vitesses, des espaces parcourus & des tems, & c'est ce qui nous échape à cause de l'infinie petitesse de ces corps. C'est ici où les experiences doivent suppléer aux secours qui nous manquent, il faut les faire avec attention, les réitérer souvent, & sur-tout prendre garde de ne se laisser prévenir par aucun Préjugé. Si l'on ne s'observe de près là-dessus, les expériences ne manqueront pas de dire ce qu'on voudra, on pourroit en citer bien des exemples, & des exemples très-propres àveiller l'attention.

On peut donc distinguer dans la nature deux sortes de Méchanisme, l'un qui concerne les Corps sensibles, & l'autre qui concerne les parties insensibles de ces Corps. Je donne au premier le nom de Méchanique générale, à peu-près comme on nommoit Physique générale la partie de la Physique qui traitoit des Corps en général, & par la même raison, je nomme Méchanique particulière ce qui regarde le Méchanisme des parties insensibles des Corps. Comme toutes les Loix du mouvement de l'un & l'autre Méchanisme sont comprises dans la Méchanique générale, je ne m'attache aussi qu'à les bien détailler, laissant à ceux qui les auront comprises le soin d'en faire l'application à la Méchanique particulière, en y employant les recherches & les expériences réitérées que demandent l'étendue & la difficulté d'un si vaste

sujet. Cet Ouvrage comprend quatre parties. Dans la première je traite du mouvement des Corps solides ; dans la seconde je considère les solides dans les Fluides , & les Fluides entr'eux ; dans la troisième j'examine le mouvement de l'air , & dans la quatrième le mouvement des Fluides. Entrons dans un plus grand détail pour la satisfaction des Lecteurs.

Le mouvement direct ou réfléchi peut se faire ou en ligne droite ou en ligne courbe , & l'un ou l'autre de ces mouvemens peuvent être ou uniforme ou accéléré. Dans le mouvement uniforme & en ligne droite le Corps suit toujours la même direction & parcourt des espaces égaux dans des tems égaux ; comme c'est ici le mouvement le plus simple qu'on puisse imaginer , je commence par l'examiner dans le second Chapitre de la première Partie , après avoir donné dans le premier les définitions & les principes nécessaires pour l'intelligence du sujet. Les Corps peuvent avoir différens rapports de Masses , de Vitesses , de Forces , d'Espaces & de Tems , c'est en supposant la connoissance de quelques uns de ces rapports qu'on parvient à découvrir les autres , & à connoître les Loix que la nature a établies. Pour abréger le discours je me sers du calcul , mais en même tems je fais voir aux personnes qui commencent qu'on peut déduire les mêmes Loix par le simple raisonnement.

Il y a dans tous les Corps une force ou impression qui les presse toujours vers un côté plutôt que vers un autre , & cette force se nomme pesanteur. Quelle qu'en puisse être la cause il est sûr qu'elle existe. Qu'on tienne un Corps dans sa main on sent qu'il pèse vers le centre de la terre , & si on ne le soutient plus, on éprouve toujours qu'il se porte de ce côté. Or la pesanteur n'abandonnant

jamais les Corps, doit agir sur eux avec plus de force que les Agents extérieurs, qui après leur avoir communiqué une première impression ne peuvent plus rien faire sur eux. Un Corps poussé par une force externe dont il se sépare l'instant d'après ne reçoit plus les coups, au contraire un Corps poussé par sa pesanteur reçoit à chaque instant une nouvelle impression, & de là il suit nécessairement que son mouvement doit être accéléré. Galilée est le premier qui a trouvé que les Corps qui descendent librement reçoivent dans des tems égaux des accroissemens égaux de vitesse, & c'est ce qu'on nomme *mouvement uniformement accéléré*. On comprend sous ce nom le mouvement retardé, c'est-à-dire, le mouvement d'un Corps qui est poussé avec une direction contraire à celle de sa pesanteur, laquelle ne cessant d'agir sur lui doit aussi diminuer son mouvement à chaque pas. Ce que Galilée nous enseigne là-dessus ne regarde que les corps sublunaires, les expériences l'ont conduit à cette découverte, & les expériences ne peuvent se faire à une distance trop grande de la surface de la Terre. Mais à l'égard des autres corps on peut établir d'autres Hypothèses ainsi qu'ont fait les Astronomes pour expliquer les Phénomènes célestes. On trouvera dans le troisième Chapitre l'explication de ces différentes Hypothèses & les Loix d'accélération qu'elles imposent au corps, à commencer par celle de Galilée à laquelle on doit s'en tenir, lorsqu'il s'agit du mouvement des corps qui ne sont point à une distance trop grande de la surface de la Terre.

On nomme centre de pesanteur ou de gravité le point autour duquel toutes les parties d'un corps sont en équilibre, de façon que si ce centre ne se meut point, toutes les parties sont dans un parfait repos; de même si plu-

fiens corps unis par un même lien se contrebalaient autour d'un même point, ce point se nomme centre d'Equilibre. Je m'applique à la recherche de l'un & l'autre de ces centres dans le quatrième Chapitre, mais comme j'ai traité cette matière amplement dans la *Mesure des Surfaces & des Solides*, je n'en donne ici que les principes & les règles, renvoyant pour le détail à l'ouvrage cité.

On trouvera dans le même Chapitre une remarque en forme de dissertation touchant la prétendue distinction que quelques Auteurs modernes ont cru devoir mettre entre les forces vives & les forces mortes. Cette matière n'est point étrangère au sujet qui est traité dans ce Chapitre, ainsi qu'on va voir. La force morte est l'effort que fait une puissance sur un corps sans pouvoir surmonter l'obstacle qui empêche le corps de se mouvoir; tel est l'effort que fait la pesanteur sur un corps qui se trouve arrêté par un obstacle perpendiculaire à la direction de son centre de gravité; car alors ce centre de gravité ne pouvant descendre plus bas toutes les parties du corps sont autour de lui dans un parfait repos, la force *vive* au contraire est la force qui meut actuellement le corps. M. de Leibnits fut le premier qui s'imagina que ces deux sortes de forces étoient de différente nature. Selon lui les forces mortes sont entr'elles comme les masses multipliées par les vitesses, & au contraire les forces vives sont comme les masses multipliées par les quarrés des vitesses. Des expériences mal interprétées le firent tomber dans cette erreur. En Angleterre on rejetta son sentiment avec mépris, en France on le réfuta sérieusement, & selon toutes les apparences la mort de M. de Leibnits auroit mis fin à la dispute si M. Jean Bernoulli, environ

environ vingt-huit ans après, ne se fût avisé de la faire revivre. Ce sçavant Geomètre envoya à l'Académie Royale des Sciences un discours sur les Loix de la communication du mouvement, qui fut imprimé en 1727 chez Jombert Libraire rue Saint Jacques à Paris. Ce discours renfermoit beaucoup de belles choses dont l'Académie parla avec éloge, mais loin d'adopter ce qui regardoit la distinction des forces mortes & des forces vives, elle fit imprimer en 1728 une Dissertation de M. de Mairan, où cet illustre Académicien traita la matiere avec toute la profondeur de son génie, & fit voir clairement l'inutilité de cette frivole distinction. Je n'avois point encore vû la Dissertation de M. de Mairan lorsque je composai la mienne, le Discours de M. Bernoulli m'étant tombé par hazard entre les mains, je crus que les preuves sur lesquelles un Geomètre de ce nom tâchoit d'appuyer son sentiment méritoient d'être discutées de façon à empêcher le progrès de l'erreur. Quelque tems après M. de Mairan ayant eu la bonté de me communiquer sa Dissertation, j'eus le plaisir de voir que si je n'avois pas pris la même route je me trouvois du moins parfaitement d'accord avec ce sçavant Geomètre dans toutes les conclusions. C'est ce qui m'a obligé de ne point supprimer ce que j'avois écrit là dessus, dans la vûe que bien des personnes qui n'ont pas la commodité d'avoir les Mémoires de l'Académie, trouveront dans cet Ouvrage des principes suffisans pour se garantir d'un prejuge dans lequel quelques Sçavans sont encore aujourd'hui. On verra dans cette même Dissertation les raisons qui m'ont porté à y faire des additions considérables.

La doctrine du sixième Chapitre est toute fondée sur la connoissance des centres de gravité, j'y enseigne com-

ment on peut connoître si un corps qui est appuyé sur l'un de ses côtés doit rester ferme ou s'il doit tomber. Quelquefois un corps paroît devoir se tenir dans sa situation & il tombe ; quelquefois il paroît devoir tomber & il reste debout , le Clocher de Pise & quelques autres Edifices bâtis sur le même goût ont toujours semblé menacerruine , & cependant ils n'ont jamais bougé , c'est que la direction de leur centre de gravité passe par leur base. Que si quelques corps tombent contre toute espérance , c'est que la direction de leur centre tombe hors de leur base , & que par conséquent ce centre n'est pas empêché de suivre l'impression de la pesanteur. Par la même considération du centre de gravité je détermine quelle partie d'un poids est supportée par deux hommes qui le portent ou par deux soutiens sur lesquels il est appuyé.

Lorsque deux ou plusieurs forces qui ont différentes directions agissent en même tems sur un même corps , la direction que ce corps prend est moyenne entre les directions des forces qui agissent sur lui , d'où il suit qu'une seule force qui avec la direction moyenne feroit parcourir dans le même tems un espace égal à celui que les autres forces font parcourir à ce corps , feroit équivalente à ces forces. La force de la direction moyenne se nomme force *composée*, les forces des autres directions se nomment forces *composantes* , & le mouvement qui en est produit se nomme mouvement *composé*. Les principes de ce mouvement sont extrêmement fertiles pour les Méchaniques , ainsi qu'on peut voir dans la Méchanique de M. Varignon qui n'en a point employé d'autres. On peut distinguer plusieurs sortes de mouvement composé selon la nature & les directions des forces qui le composent. 1°. Si les forces composantes sont uniformes &

suivent toujours leurs premières directions , le mouvement est uniforme & en ligne droite. 2°. Si les forces étant uniformes changent à chaque instant de direction , le mouvement est en ligne courbe , & il peut être ou uniforme , ou accéléré , ou retardé suivant une Loi quelconque d'accélération , selon que les changemens de direction des forces composantes conservent , augmentent , ou diminuent leurs efforts. 3°. Si les forces composantes suivent une même direction & une même Loi d'accélération , le mouvement est en ligne droite & accéléré. 4°. Si les forces changent à tout moment de direction en suivant la même Loi d'accélération , le mouvement est en ligne courbe , & il peut être ou accéléré ou retardé. 5°. Si les forces sont l'une uniforme , l'autre retardée , & qu'elles suivent toujours la même direction , le mouvement est en ligne courbe & mêlé de l'uniforme & du retardé. 6°. Enfin si l'une des forces étant uniforme , l'autre est accélérée , & que les directions de l'une & de l'autre changent toujours , le mouvement est en ligne courbe , & il peut être , ou mêlé d'uniforme & de l'accéléré , ou mêlé de retardé & de l'accéléré , ou tout accéléré , ou tout retardé , selon que les différentes directions des forces causeront de changement à ces forces. Le cinquième Chapitre contient ce qui concerne le mouvement composé dont les forces composantes sont uniformes , soient que leur directions changent ou qu'elles ne changent pas , & ce mouvement entre pour quelque chose dans le sixième Chapitre dont nous avons déjà parlé. Dans les Chapitres 7° & 8° je traite du mouvement composé dont les forces composantes sont accélérées , ce qui renferme la descente des corps le long des plans inclinés & le long des lignes courbes. Dans le neuvième

je traite à part du mouvement des Pendules & de la maniere de trouver leur centre d'oscillation, & dans le dixième j'examine le mouvement composé de deux forces dont l'une est uniforme & l'autre accélérée, c'est-à-dire le mouvement des corps projetés, c'est dans celui-ci qu'est renfermée toute la Théorie & la Pratique du jet des Bombes, avec des découvertes tout-à-fait nouvelles touchant la maniere de tirer sur un but qui est au-dessus ou au-dessous du niveau de la batterie.

Lorsque les corps en mouvement viennent à se rencontrer avec les mêmes directions, ou avec des directions contraires, ou avec des directions obliques, il se fait du changement dans les forces ou dans les directions selon les rapports des Masses & des Vitesses des corps, & aussi selon que ces corps sont élastiques ou ne le sont pas. Tout ceci est examiné avec une extrême soin dans le onzième Chapitre, mais comme je n'y traite principalement que du choc des corps selon une même direction, ou selon des directions contraires, & qu'à l'égard du choc selon des directions obliques dont je ne dis qu'un mot, je suppose que les corps se choquent dans leur centres de gravité, j'ai cru devoir mettre à la fin de ce premier livre une addition où je traite à part du choc des corps projetés, soit que leur direction dans l'instant du choc soit perpendiculaire ou oblique aux corps choqués, soit qu'elle passe par les centres de gravité où qu'elle n'y passe pas. On y trouvera aussi des choses très-curieuses touchant les chocs obliques des corps qui se meuvent uniformement.

Si tandis qu'un corps se meut autour d'une courbe, il se trouve une force qui à chaque instant tende à l'éloigner d'un point considéré comme centre, cette force

se nomme force *centrifuge*, & si au contraire cette force tend à le rapprocher de ce point, elle se nomme force *centripete*. Les Astronomes font grand usage de ces sortes de forces, on les trouvera traitées dans le douzième Chapitre.

Jusqu'ici j'ai fait abstraction de la résistance que l'air oppose au mouvement des corps. Cependant l'air résiste, l'expérience & la raison nous en assurent également: donc cette résistance doit causer quelque alteration dans les Loix qui ont été établies dans les Chapitres précédens. Wallis est le premier qui ait entrepris de soumettre cette matiere au Calcul. Ce sçavant Anglois dans le Chapitre 101 de son Algebre établit deux Hypotèses. Selon l'une les résistances de l'air à chaque instant sont comme les vitesses restantes au commencement de ces instans, & selon l'autre ces résistances sont comme les quarrés des vitesses restantes. La premiere considere l'air comme un corps à ressort, lequel résiste toujours dans la raison de sa compression, la seconde le considere comme un corps Fluide dont la masse est toujours proportionnelle à la vitesse, & qui résiste par conséquent dans le rapport de la masse multipliée par la vitesse, c'est-à-dire dans le rapport des quarrés des vitesses. Les Geomètres se sont partagés entre ces deux Hypotèses, mais enfin la seconde l'a emporté comme étant la plus naturelle. Supposons que deux corps de même poids & de même volume viennent à choquer l'air l'un avec une vitesse simple & l'autre avec une vitesse double. Le nombre des Molecules d'air que le second rencontrera dans un instant sera double du nombre des Molecules d'air que le premier rencontrera dans le même instant, c'est la Loi des Fluides. Donc le nombre des ressorts chocqués sera aussi

doublé ; or ces ressorts seront comprimés doublement à cause de la vitesse double , dont le second corps les choque ; donc la résistance de ces ressorts sera quadruple de la résistance des ressorts choqués par le premier corps ; & par conséquent les résistances sont dans la raison des quarrés des vitesses. Quoique ce que nous venons de dire en faveur de la seconde Hypothèse paroisse démontré , je n'ai pas laissé que d'examiner l'une & l'autre Hypothèse dans le treizième Chapitre en les appliquant au mouvement uniforme & au mouvement accéléré : j'aurois bien souhaité pouvoir en tirer quelque chose pour le mouvement des corps projetés ; l'art de jeter des Bombes en deviendrait peut-être plus parfait , & peut-être aussi n'en serions nous pas plus sçavans ; le mouvement des Bombes est extrêmement rapide , sa durée est très-courte , la résistance de l'air au premier instant ne peut être que fort petite , de-là bien des personnes concluent que la résistance totale ne peut causer qu'une légère différence ; d'autres au contraire fondés sur des expériences soutiennent que cette différence n'est point à négliger ; mais les expériences qu'ils nous rapportent ayant été faites dans le plein dépendent d'une infinité de circonstances dont la moindre est peut-être la résistance de l'air telle que nous la supposons , c'est-à-dire uniforme & constante ; l'air n'est point homogène par tout , ni dans toutes ses parties , il se trouve tantôt plus dilaté , tantôt plus condensé ; les vapeurs & les exhalaisons n'y sont pas également mêlées en tous lieux ni en tout tems ; les vents y soufflent inégalement ; d'un instant à l'autre tout change. D'ailleurs la Poudre ne sçauroit être de même nature dans toutes ses parties , deux charges égales d'une même Poudre font rarement le même effet ; il y a

ici tant de différentes combinaisons qu'il n'est pas possible d'y rien démêler ; aussi les expériences quelques répétées qu'elles soient ne sont-elles jamais parfaitement d'accord entr'elles ; pourquoi voudrions-nous fixer ce que la nature elle même ne fixe pas ? Nous ignorons encore quel est l'espace qu'une certaine force de Poudre pourroit faire parcourir à un Boulet dans le vuide dans un tems déterminé , & quelle est la quantité dont la pesanteur le feroit descendre dans le même tems , cela demanderoit des expériences qui n'ont pas été faites , mais supposons pour un instant que nous sachions à quoi nous en tenir ; dirons-nous qu'en faisant une épreuve dans le plein avec la même force de Poudre la différence des espaces parcourus dans le plein & dans le vuide nous donnera la véritable mesure de la résistance ? Il faudroit pour cela que l'air & la poudre ne fussent point susceptibles de tous les changemens dont nous avons parlé , & que par conséquent les épreuves ne variaissent point elles-mêmes , faute de quoi tout ce que nous pourrons en conclure ne sera jamais que pour des cas particuliers & hypothétiques qui seroient inutiles pour le général : au reste on ne blâme point ici les personnes qui s'appliquent à surmonter les difficultés d'une matière si épineuse. Leur travail ne peut être que louable quand même il n'aboutiroit qu'à des approximations.

La plupart des Loix du mouvement dont il est parlé dans les Chapitres précédens , ont occasionné l'invention des Machines ; on les distingue en simples & composées, les Machines simples sont au nombre de cinq ; le Levier, la Poulie, la Roue dans son aissieu, la Vis, & le Coin, les Machines composées n'étant que des combinaisons des Machines simples, peuvent être en nombre infini,

aussi en invente-t'on tous les jours. On trouvera dans le quatorzième Chapitre le calcul des forces des cinq Machines simples, de la balance, des roues dentées, des poulies multipliées, & de la vis jointe à la roue dans son aissieu; ce que j'en dis peut s'appliquer au calcul des autres Machines dont je ne parle point de peur d'allonger cet Ouvrage; d'ailleurs on en trouve un si beau détail dans les deux Volumes de l'Architecture Hydraulique de M. Belidor *, qu'il seroit inutile d'y rien ajouter.

Les Machines ont du frottement les unes plus, les autres moins, & ce frottement oblige d'y appliquer une puissance un peu plus grande qu'on ne la trouve par le calcul: la question est donc de déterminer la quantité précise dont cette puissance doit être augmentée pour surmonter le frottement: ce sujet a déjà été traité par plusieurs Auteurs en différentes façons: mais la manière dont je m'y prens dans le quatorzième & dernier Chapitre du premier Livre, a non-seulement le mérite de la nouveauté, mais encore celui d'une extrême simplicité; une seule expérience faite sur une Machine d'une certaine matière suffit pour déterminer par le plus simple calcul Arithmétique le frottement de toutes les Machines de même espèce & de même matière quelle qu'en soit la grandeur ou la petitesse & de quelque poids qu'elles puissent être chargées. J'espère que le public verra ce morceau avec plaisir aussi-bien que grand nombre de questions curieuses dont ce premier Livre est rempli, & dont je n'ai point fait le détail de peur d'être trop long.

Le second Livre traite de l'Hydrostatique ou de la manière dont les corps pesent dans les Fluides, & dont les Fluides pesent entr'eux. On considère dans les Corps la Masse, le Volume & la Densité. La Masse est la quan-

* Imprimé en 1739, chez Tombert, rue S. Jacques à Paris,

tité de matiere dont le corps est composé ; le Volume est l'espace que ce corps occupe, & le plus ou le moins de Densité consiste dans la façon dont les parties d'un corps sont plus ou moins rapprochées entr'elles. De la Masse naît la pesanteur absolue, car cette pesanteur est toujours proportionnelle à la Masse ; de la Densité considérée sous un même Volume naissent les pesanteurs spécifiques des corps ; le rapport des Masses, des Volumes, & des densités pouvant varier à l'infini, on peut parvenir à la connoissance de ces rapports par la connoissance de quelques-uns d'entr'eux, & c'est ce qui fait le sujet du premier Chapitre.

Dans le second je traite de l'Equilibre des Liqueurs ; c'est par le moyen de deux Tubes verticaux qui se communiquent par un Tube horizontal que cet Equilibre se trouve : si l'on verse d'une même Liqueur dans l'un des Tubes verticaux, cette Liqueur passera du Tube horizontal dans l'autre vertical, & l'on éprouvera toujours que la Liqueur se mettra de niveau dans l'un & l'autre Tube : mais si les Liqueurs sont de différentes natures, celle qui pesera davantage ne montera pas tant que celle qui pesera moins : de-là on fixe la maniere de connoître les différentes pesanteurs spécifiques des Fluides & leurs différentes densités. On démontre encore dans le même Chapitre que les Liqueurs renfermées dans un vase pesent sur toutes les parties du fonds & des côtés à proportion des grandeurs de ces parties & des hauteurs des Liqueurs, d'où l'on prend occasion de faire voir comment on pourroit élever par le moyen de l'eau un poids d'une extrême grandeur.

Dans les deux derniers Chapitres on examine de quelle façon les Corps pesent dans des Fluides qui ont plus ou

moins de pesanteur spécifique qu'eux ; on y fait voir comment on connoît les pesanteurs spécifiques des Corps en les plongeant dans les Liquides , comment on peut faire que des Corps qui surnagent aillent au fonds , où restent entre deux eaux , que d'autres qui vont au fonds , restent entre deux ou surnagent , & grand nombre d'autres choses curieuses dont le détail nous meneroit trop loin.

Le troisième Livre comprend tout ce qui concerne la mesure de l'air ; l'air pèse , il a du ressort , il se comprime , il se dilate , il se condense , il se rarefie , il est susceptible de mouvement , c'est ce qu'on examine dans les cinq premiers Chapitres , en y employant le raisonnement joint aux expériences , dans le sixième on traite des Instrumens qui servent à connoître les variations qui arrivent à l'air par rapport à sa pesanteur , à sa densité , à son agitation , à sa rarefaction ou sa condensation , à sa secheresse & à son humidité.

Le quatrième Livre traite du mouvement des Fluides , j'y examine le mouvement causé par la pesanteur , les différentes quantités d'eau qui doivent sortir par differens orifices dans des tems égaux selon les différens rapports des orifices & des hauteurs de la surface supérieure du liquide , le mouvement qu'on peut donner aux Fluides par le moyen de l'air , ce qui se fait en employant les Machines hydrauliques ; le cours des rivières , & enfin le choc des Fluides.

Tel est à peu près le plan de cet Ouvrage , & l'on peut voir par l'abregé que nous venons d'en faire que ce n'est pas sans raison que je lui ai donné le nom de Mécanique Générale ; tout le Méchanisme des Corps solides & Fluides s'y trouve compris , les Loix générales y sont détaillées dans la dernière exactitude , j'y ai entremêlé

P R E F A C E.

xix

grand nombre de Questions , de Problèmes, & de Remarques, où l'on trouve tout ce que la Physique peut attendre de la Geometrie : la précision, l'ordre & la méthode y sont observées avec le même soin que j'ai employé dans toutes les productions que j'ai mis au jour. J'espère que le Public fera le même accueil à cet Ouvrage , qu'il a bien voulu faire aux précédens.



ECLAIRCISSEMENTS, ET CORRECTIONS NECESSAIRES.

ON a certainement de grandes obligations aux Auteurs qui ont écrit avant Nous. Ils nous ont frayé les voyes, la plupart des Matieres se trouvent débrouillées dans leurs Ouvrages, & sans eux, nous aurions à surmonter de grandes difficultés qui ne nous arrêtent plus aujourd'huy. Cependant il arrive quelquefois que la trop grande vénération que nous avons pour les Sçavans qui nous ont précédé nous jette dans l'erreur. Comme on trouve dans leurs Ecrits grand nombre de belles vérités que la force de leur génie leur a fait découvrir, on se persuade trop aisément que des personnes de ce caractère ne sçauroient se tromper, & l'on épouse sans réflexion jusqu'à leur faux raisonnement. De-là vient que certains Paralogismes passent pendant long-tems d'Ouvrage en Ouvrage, & qu'on n'en découvre le faux que parce que la nécessité de faire accorder les principes nous oblige à examiner de plus près ce que la prévention nous avoit fait regarder comme incontestable & certain. C'est ainsi que les forces vives, & l'attraction ont encore leurs Partisans, & sans en chercher plus loin des exemples, c'est ainsi que j'ai donné moi-même dans ce Traité deux Démonstrations que je suis bien aise de retoucher pour faire voir au Public à qui j'ai consacré mes veilles, que si je puis commettre des fautes comme les autres hommes, du moins il ne m'arrivera jamais de vouloir les excuser. Je prie donc le Lecteur de suppléer à ce que j'ai trouvé de defectueux par les corrections que j'en vais faire, & de regarder ces Eclaircissemens comme une marque du desir que j'ai de ne lui rien présenter qui ne soit selon les regles de la plus exacte vérité.

Page 136. N°. 142. Proposition L. j'ai dit : *Si une force pousse ou tire un corps avec une direction oblique à ce corps, elle lui communique moins de mouvement que si elle le poussoit ou tiroit avec une direction perpendiculaire.* Cette Proposition doit s'entendre d'un corps qui est retenu par un point fixe & inébranlable autour duquel il peut tourner ; car il est visible que si le Corps CD

ECLAIRCISSEMENTS ET CORRECT. xxj

(Fig. 50.) est retenu par un point fixe D, ou qui soit entre B & D, la puissance qui le tirera ou qui le poussera selon la direction BA, ou AB, n'agira sur lui que comme la force composante AE, à cause que l'autre composante AF ou EB trouvant une résistance invincible ne donnera aucun mouvement au Corps. La même Proposition est encore vraie quand le corps CD n'est point retenu, la puissance AB le pousse selon la direction AB avec un levier AB qui n'est point uni au corps CD, car alors il est encore évident, & l'expérience le confirme, que cette puissance n'agit sur le corps que comme la force composante AE, & non selon l'autre composante AF qui ne fait que glisser le long du corps; d'où il arrive que si le corps CD n'est point retenu par quelque obstacle, il s'approche peu à peu du levier AB, jusqu'à ce qu'étant parvenu à le toucher dans toute sa longueur, le levier glisse & n'agit plus sur lui; & il faut observer que pendant ce mouvement l'angle ABE doit nécessairement diminuer à chaque pas, & que par conséquent la perpendiculaire AE devenant toujours plus courte, l'action de la puissance sur le corps, diminue aussi insensiblement & devient enfin égale à zero. Voici maintenant les cas où la Proposition seroit fautive, si le corps n'étoit point retenu par un point fixe.

1°. Si le Levier AB étoit attaché inébranlablement au corps CD, car dans cette supposition le corps ne résisteroit ni au mouvement selon AE, ni au mouvement selon AF, & par conséquent la puissance qui le pousseroit agissant sur lui selon l'un & l'autre de ces mouvemens, agiroit aussi comme AB, c'est-à-dire avec la même force que si elle étoit perpendiculaire à CD.

2°. Si la puissance tiroit le corps CD (Fig. 249.) avec une corde AB attachée en B, & dont la direction fut horizontale; car alors le corps obéiroit aussi au mouvement selon AE, & au mouvement selon AF, il faut concevoir que le corps CD fut sur un plan horizontal; mais voici ce qui arriveroit selon que le centre de gravité seroit au point B, ou entre B & D, ou entre B & C. Si le centre de gravité étoit au point B, le corps CD s'avanceroit parallèlement à lui-même, tandis que son centre de gravité parcoureroit la direction BA; car toutes les parties CB étant en équilibre avec les parties du bras BD, & les unes n'étant pas plus tirées que les autres, puisqu'elles sont tirées par le centre de gravité, elles doivent avancer également d'un côté & d'autre selon la direction BF, & suivre en même-

rens la direction BC , & par conséquent leur centre de gravité doit toujours être sur BA .

Si le centre de gravité étoit non plus en B , mais sur BD , par exemple en O , les parties du bras CO étant tirées par la direction FB ne seroient plus en équilibre avec les parties du bras DO , ainsi elles avanceroient peu à peu vers la direction AB jusqu'à ce que la partie CB du corps CD vint à toucher la corde selon toute sa longueur, & alors la direction de la corde AB passeroit par le centre de gravité O , & le corps s'avanceroit sans changer davantage de direction, & il faut observer que tandis que l'angle CBA diminueroit peu à peu, le point B avanceroit toujours selon les différentes directions composées des directions variantes & infiniment petites BE , BF , car ces directions changeroient à chaque instant.

Si le centre de gravité étoit entre C & B , le contraire arriveroit, c'est-à-dire l'angle CBA s'aggrandiroit peu à peu jusqu'à ce que la partie BD du corps CD vint à toucher la corde selon sa longueur, & alors le corps suivroit la direction sans changer davantage de direction, mais auparavant le point B suivroit les différentes directions composées des directions variantes & infiniment petites dont le mouvement seroit composé comme il a été dit.

Il y auroit bien des choses à remarquer touchant ces deux derniers cas, mais comme cela m'écarteroit de mon sujet, il me suffit d'avoir fait remarquer ce que j'ai mis dans l'énoncé de la Proposition dont il s'agit, & qu'il faut nécessairement l'entendre d'un corps qui est attaché par un point fixe autour duquel il puisse tourner, & ne l'étendre tout au plus qu'à un corps poussé par un levier AB qui ne tiendrait point au corps CD . La même chose doit se dire du premier Corollaire de cette Proposition; ce sont là de ces inadvertances qui arrivent assez souvent à un Auteur trop plein de son sujet. Le Corollaire II. de cette même Proposition fait assez voir que je n'envisageois alors que les corps qui peuvent tourner autour d'un point fixe.

Page 154. N°. 175. Corollaire VIII. de la Proposition CLXX. j'ai dit que si deux plans inclinés CB, EG (*Fig. 63.*) étoient perpendiculaires entr'eux, & que deux puissances, ou poids M, N , soutinssent un poids A avec des directions RA, QA , parallèles aux plans inclinés, on n'avoit qu'à mener la droite RQ horizontale, & que les puissances ou poids M, N , seroient toujours entre

eux réciproquement comme les cordes RA, QA, c'est-à-dire qu'on auroit $M, N :: QA, RA$, cela est absolument vrai soit que les puissances M, N, soutiennent tout le poids A, ou qu'elles n'en soutiennent qu'une partie, & il est encore sûr que si les deux plans inclinés soutenoient tout le poids A ou une partie de ce poids, ils seroient entr'eux non plus réciproquement comme RA à QA, mais directement comme RA à QA, c'est-à-dire qu'on auroit la résistance du plan CB est à la résistance du plan EG comme RA est à QA, ainsi que je le démontrerai bientôt. Mais dans le Corollaire X. de la même Proposition pag. 155. N°. 177. j'ai avancé que si les plans inclinés CB, EG étoient obliques entr'eux (Fig. 64.) les puissances M, N, seroient encore entr'elles comme AQ est à AR, & ceci est une erreur dans laquelle je suis tombé par la trop bonne opinion que j'ai eu des Ecrits d'un celebre Auteur dont les Ouvrages sont entre les mains du Public. Pour corriger donc ce défaut, il faut dire que soit que les puissances M, N, soutiennent tout le poids, ou qu'elles n'en soutiennent qu'une partie, on aura toujours dans ce cas M est à N comme le sinus de l'angle ZAQ est au sinus de l'angle ZAR, ou comme les sinus de l'angle GEF au sinus de l'angle BCD, c'est-à-dire les puissances M, N, seront entr'elles réciproquement comme les sinus de complement des angles d'inclinaison de leur plan CB, EG, & si les plans CB, EG soutiennent le poids A en tout ou en partie, on aura la résistance du plan CB est à la résistance du plan EG comme le sinus de l'angle OAV au sinus de l'angle TAV, ou comme le sinus de l'angle EGF au sinus de l'angle CBD, & par conséquent les résistances de ces plans seront entr'elles réciproquement comme les sinus de leurs angles d'inclinaison. Avant de démontrer tout ceci, voici le principe que je crois devoir employer.

Si deux puissances A, B, (Fig. 250.) qui tirent avec des directions DA, DB, sont en équilibre avec une troisième puissance C qui tire avec une direction CD, la puissance C est à la puissance A comme le sinus de l'angle ADB fait par les directions des deux autres puissances A, B, est au sinus de l'angle BDC fait par la direction de la puissance B avec la direction de la puissance C; de même la puissance C est à la puissance B comme le sinus de l'angle ABD fait par les deux puissances A, B, est au sinus de l'angle ADC fait par la direction de la puissance A, & de la puissance C.

Pour prouver ce principe, il n'y a qu'à observer que les puissances A, B, ne peuvent être en équilibre avec la puissance C,

à moins qu'elles ne puissent faire parcourir à un corps mis en D un espace DE selon la direction contraire à la direction DC, égal à l'espace DC que la puissance C feroit parcourir au même corps dans le même-tems selon la direction DC ; car il est visible que cette condition étant mise, le corps mis en D ne pourra avancer ni vers E ni vers C, & que les trois puissances seront en équilibre ; faisant donc $DE = DC$, & menant EA parallèle à BD, & ER parallèle à AD, les puissances A, B qui feroient parcourir au corps D l'espace DE dans le tems que la puissance C lui feroit parcourir l'espace DC, seront exprimées par les droites AD, DR, ou ER, DR, & la puissance C sera exprimée par DC ou DE ; or dans le triangle EDR, le côté ED est le sinus de l'angle ERD ou de l'angle ERB, ou ADR qui est le sinus de complement de l'angle ERD, le côté ER est le sinus de l'angle EDR, ou de son complement RDC, & le côté DR est le sinus de l'angle DER ou de son alterne EDA, ou de son complement ADC ; donc la puissance C est à la puissance A comme le sinus ED de l'angle ADR fait par les deux puissances A, B, est au sinus ER de l'angle BDC fait par la direction de la puissance B avec la direction de la puissance C, & de même la puissance C est à la puissance B comme le sinus ED de l'angle ADR est au sinus DR de l'angle ADC fait par la direction de la puissance C ; ce principe ainsi posé, venons à l'état de la Question.

Si les plans inclinés CB, EG (*Fig. 63.*) se coupent à angles droits, la puissance M est à la puissance N comme le sinus de l'angle ZAQ au sinus de l'angle ZAR ; or le triangle RAQ étant rectangle est semblable aux triangles rectangles ZAQ, ZAR ; donc l'angle ZAQ est égal à l'angle ZRA, & l'angle ZAR est égal à l'angle ZQA, & par conséquent la puissance M est à la puissance N comme le sinus de l'angle ZRA est au sinus de l'angle ZQA, ou comme la corde AQ à la corde RA ; ainsi ce que j'ai avancé pour ce cas est absolument vrai, & alors la pesanteur du poids est exprimée par la droite RQ qui est le sinus de l'angle RAQ.

Que si les puissances M, N, ne soutenoient qu'une partie du poids, il est aisé de voir qu'elles seroient toujours entr'elles comme le sinus de l'angle ARQ au sinus de l'angle ZRA.

Si les plans inclinés CB, EG, soutenoient le poids tout entier ou une partie du poids, la résistance du plan CB seroit à la

la résistance du plan EG comme le sinus de l'angle IAO au sinus de l'angle LAO par le principe précédent ; car ces deux résistances font le même effet que deux puissances qui pousseroient de L en A & de I en A, & qui seroient en équilibre avec le poids A ; or l'angle IAO est égal à l'angle ZAR ou ZQA, & l'angle LAO est égal à l'angle ZAQ ou ZRA ; donc la résistance du plan CB seroit à la résistance du plan EG comme le sinus de l'angle ZQA au sinus de l'angle ZRA, ou comme la corde RA à la corde QA, & par conséquent les résistances des deux plans seroient dans la raison réciproque des puissances M, N, ou dans la raison réciproque des sinus de leurs angles d'inclinaison à cause de l'angle ZQA égal à l'angle d'inclinaison EGF, & de l'angle ZRA égal à l'angle d'inclinaison CBD.

Supposé donc que les puissances M, N, soutinssent ensemble une partie du poids A, par exemple le tiers, & que les deux plans soutinssent les deux tiers restans, on prendroit le tiers de RQ pour exprimer le tiers du poids, & prenant ce tiers pour rayon total, les sinus des angles QRA, RQA, exprimeroient les puissances M, N, après quoi on prendroit les deux tiers de RQ pour exprimer les deux tiers du poids, & prenant ces deux tiers pour sinus total les sinus des angles RQA, QRA exprimeroient les résistances des plans CB, EG.

Supposons maintenant que les plans inclinés CB, EG (*Fig. 64.*) fassent entr'eux un angle aigu ou obtus ; la puissance M sera à la puissance N comme le sinus de l'angle ZAQ au sinus de l'angle ZAR, mais le triangle RQA n'étant plus rectangle, l'angle ZAQ ne sera plus égal à l'angle ZRA, & l'angle ZAR ne sera pas non plus égal à l'angle ZQA, & par conséquent la puissance M ne sera pas à la puissance N comme le sinus de l'angle QRA au sinus de l'angle RQA, ou comme la corde QA à la corde RA ; mais à cause que l'angle ZAQ est le complément à l'angle droit de l'angle ZQA, & que l'angle ZAR est le complément à l'angle droit de l'angle ZRA, on aura M est à N comme le sinus de complément de l'angle ZQA au sinus de complément de l'angle QRA ; or l'angle ZQA étant égal à l'angle d'inclinaison EGF, le sinus de complément de ZQA est égal au sinus de complément de l'angle d'inclinaison EGF, & l'angle ZRA étant égal à l'angle d'inclinaison CBD, le sinus de complément de ZRA est égal au sinus de complément de l'angle d'inclinaison CBD ; donc on aura M est à N comme le sinus de comple-

ment de l'angle EGF au sinus de complement de l'angle CBD , ou comme le sinus de GEF au sinus de BCD , c'est-à-dire les puissances M, N , dans ce cas, sont entr'elles réciproquement comme les sinus de complement des angles d'inclinaison de leur plan.

Si les plans CB, EG , soutenoient le poids, la résistance du plan CB seroit à la résistance du plan EG comme le sinus de l'angle VAO au sinus de l'angle VAT ; or à cause des triangles rectangles semblables OAV, XGV , l'angle VAO est égal à l'angle d'inclinaison EGB , ou à l'angle ZQA , & à cause des triangles semblables YAT, YBX , l'angle VAT est égal à l'angle d'inclinaison CBD , ou à l'angle ZRA ; donc la résistance du plan CB seroit à la résistance du plan EG comme le sinus de l'angle EGF au sinus de l'angle CBD , ou comme la corde RA à la corde QA , c'est-à-dire que les résistances de ces plans seroient entre elles réciproquement comme les sinus de leurs angles d'inclinaison.

Si les puissances M, N , soutenoient une partie du poids A , par exemple le quart, & que les deux plans soutinssent les trois quarts restans, on prendroit le quart de RQ pour exprimer le quart du poids A , & prenant ce quart pour sinus total, le sinus de complement des angles RQA, QRA exprimeroit les puissances M, N , après quoi on exprimeroit les trois quarts du poids A par les trois quarts de RQ , & prenant ces trois quarts pour sinus total, les sinus des angles RQA, QRA , exprimeroient les résistances des plans CB, EF .

Au reste, lorsqu'il s'agit de chercher les forces de deux puissances qui soutiennent un poids par le moyen d'une corde, il vaut mieux se servir tout d'un coup du principe que j'ai expliqué ci dessus, que d'avoir recours à des plans inclinés paralleles aux directions des cordes; car par cette voye on ne parvient à ce qu'on cherche que par de longs circuits qui peuvent vous tromper, comme on vient de voir.

Je suis bien aise de faire observer en passant que quelque petit que soit le poids A , & quelque grande au contraire que puissent être les puissances M, N , qui le tirent, la corde RAQ fera toujours un angle, & ne pourra jamais être tendue en ligne droite; car si la corde pouvoit prendre la position RQ , les puissances M, N , seroient alors entr'elles comme les droites RZ, ZQ , & tireroient dans les directions de ces deux droites, mais ces directions n'étant point opposées à la direction ZA de la pesan-

teur, ne pourroient empêcher cette pesanteur de tirer le corps; donc quand même les puissances M , N , seroient infinies, elles ne pourroient tendre la corde en ligne droite.

Après avoir corrigé dans mon Ouvrage les deux endroits défectueux qu'on vient de voir, je vais réparer une espece d'ine-xactitude dans laquelle on pourroit m'accuser d'être tombé dans une autre Proposition.

Page 155. N°. 178. Proposition LIX. J'ai dit: *Que si un corps spherique A (Fig. 65.) qui est sur un plan incliné BC est tiré par des puissances H, G, &c. dont les directions ne soient pas paralleles au plan incliné, & fassent par conséquent un angle avec ce plan, & que chacune de ces forces soit en équilibre avec le corps, la force sera au corps A comme le sinus de l'angle d'inclinaison du plan sur la base, est au sinus de complement de l'angle de traction fait par la direction de la force avec le plan incliné.* Cette Proposition est absolument vraie dans toutes ses parties, ainsi que je le démontrerai bientôt mieux, mais son inverse est fausse, c'est-à-dire il n'est pas toujours vrai que quand la force est au poids comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de l'angle de traction, il y ait équilibre entre la force & le poids; or quoique je n'aye point parlé de cette inverse, cependant afin qu'on ne s'y trompe pas, & pour faire voir en même-tems au Lecteur le cas où cette inverse n'a point lieu, voici un Eclaircissement qu'il faut mettre avec sa demonstration à la fin du Corollaire II. de la même Proposition, page 160.

Nota. Que quoique la Proposition que nous venons de démontrer soit dans l'exacte rigueur, de même que ses Corollaires, cependant son inverse n'est pas toujours veritable, & pour le prouver nous employerons la méthode du mouvement composé qui est beaucoup plus simple que celle du levier coudé.

Soit le plan incliné CB (Fig. 251.) sur lequel est le corps A; du point d'attouchement X j'éleve sur le plan la perpendiculaire XZ qui passe par le centre de la sphere; du centre A je mene OI parallele au plan incliné, & le grand cercle OXIV de la sphere se trouve coupé en quatre parties égales. Je suppose que la pesanteur du corps A soit exprimée par la ligne AQ, cette pesanteur sera équivalente aux deux forces AX, AR, & n'agira que comme AR, à cause que le plan CB s'oppose invinciblement à AX. Je prens AM égal à AR, j'éleve au point M la perpendiculaire indéfinie MN, & du centre A je conçois des

droites AG, AE, AN, qui passent par tous les points du quart de cercle OV; cela posé.

Je dis 1°. *Que les puissances qui tireroient le corps A avec les directions AG, AE, &c. & qui seroient exprimées par les droites AG, AE, &c. comprises entre le centre & la perpendiculaire MN, seroient chacune à la pesanteur AQ comme le sinus de l'angle d'inclinaison du plan CB au sinus du complement de l'angle de traction.*

Du point X je mene XS perpendiculaire sur AQ, & XY perpendiculaire sur la direction GL; ainsi prenant pour sinus total la droite AX, j'ai XS pour le sinus de l'angle d'inclinaison du plan, & XY pour le sinus de l'angle de complement de l'angle de traction, comme il a été démontré dans la Proposition LIX; or le triangle GMA est semblable au triangle AXL, & celui-ci est semblable au triangle AXY; & par conséquent les triangles GMA, AXY étant semblables, j'ai GA, MA :: AX, XY, ou GA, XQ :: AX, XY, ce qui donne $GA \times XY = XQ \times AX$; de même les triangles AXQ, AXS, étant semblables, j'ai AQ, XQ :: AX, XS, ce qui donne $AQ \times XS = XQ \times AX$; donc $GA \times XY = AQ \times XS$, & par conséquent GA, AQ :: XS, XY; c'est-à-dire la force exprimée par GA, & qui tire le corps avec la direction GA est à la pesanteur AQ du corps comme le sinus XS de l'angle d'inclinaison au sinus XY du complement de l'angle de traction & on prouvera aisément la même chose de toutes les puissances, dont les directions passent par le quart de circonférence OV, & qui sont exprimées par des lignes telles que AG, AP, &c. comprises entre le centre & la droite MN.

Je dis 2°. *Que de toutes les puissances dont nous venons de parler, il n'y a que celles qui sont comprises entre la droite OA parallèle au plan, & la verticale AP qui soient en équilibre avec le corps A; car la puissance qui tire selon OA, & qui est exprimée par la droite AM égale & contraire à la force AR, contrebalance cette force, & par conséquent le corps s'appuie en X par la force AX, & ne descend point; de même la force GA étant composée de la force AM égale & contraire à la force AR, & de la force GM contraire, mais moindre que la force AX, le corps doit nécessairement s'appuyer en X, & l'on prouvera la même de toutes les autres puissances qui sont entre AM & AP; enfin la force AP étant composée de MA égale & contraire à AR, & de MP ou AV égale & contraire à AX, il doit encore y avoir équilibre entre la puissance & le poids A; mais quant aux puis-*

sances qui passeront entre la verticale AP, & la droite AV qui termine le quart de circonference, elles ne seront plus en équilibre; car la force NA étant composée de AM égal & contraire à AR, & de MN ou AZ contraire, mais plus grand que AX, il est visible que quoique AM contrebalance AR, cependant AZ doit entraîner AX, & par conséquent l'équilibre doit être rompu, & le corps A doit être enlevé, & il faut dire la même chose de toutes les puissances dont les directions se trouveront entre AP, & AZ.

Que si on veut que les puissances dont les directions sont entre AP & AZ, poussent le corps A au lieu de le tirer, alors il arrivera que le corps A pesera beaucoup plus sur le plan CB, & qu'en même tems il ira deux fois plus vite selon la direction AR, car la force NA, par exemple, dans cette supposition étant composée de MA qui pousse de M vers A & qui est égale à AR, & de ZA qui pousse de Z vers A, & qui est encore plus grande que AX, il est visible que les deux ensemble AX, ZA presseront le corps A contre le plan avec plus de force que si AX agissoit seule, & qu'en même tems les deux MA, AR lui donneront selon AR une vitesse deux fois plus grande que celle que lui donneroit la force AR.

Quant à la puissance qui tireroit selon AZ, il est visible qu'il suffit qu'elle soit plus grande que AX pour enlever le corps, mais si au lieu de tirer le corps elle le pouffoit de Z en A; il est encore clair que quand même cette force seroit infinie, elle n'empêcheroit pas la puissance AR d'entraîner le corps selon la direction AR; c'est pourquoi au lieu de dire comme j'ai dit, page 159 ligne 8 : *qu'il faudroit une force infinie pour soutenir le corps A en le pouffant avec cette direction*, il faut dire, *qu'une force même infinie ne le retiendroit pas*.

Si nous considérons les puissances qui tirent avec des directions qui passent par le quart de circonference OX (Fig. 252), je prens de même AM égal à AR, & menant MN perpendiculaire sur AM, & ensuite du centre A des droites AH, AN, &c. terminées sur M; je dis que les puissances qui seront exprimées par ces droites seront à la pesanteur AQ du corps A comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de complement de l'angle de traction ALQ, & qu'elles seront toutes en équilibre avec le corps.

Du point X je mene XS perpendiculaire sur AQ & XI perpendiculaire sur HA, l'angle XAS est égal à l'angle d'inclinaison

son du plan CB, & les triangles LAX, HAX étant semblables l'angle HAX est égal à l'angle HXL qui est l'angle de complement de l'angle de traction H LX, ainsi prenant pour sinus total la droite AX, le sinus de l'angle d'inclinaison sera XS, & le sinus de complement de l'angle de traction sera XH, cela posé.

Le triangle HMA est semblable au triangle HAX, à cause que ces deux triangles sont rectangles, & que l'angle aigu MHA est égal à son alterne HAX, donc HA, MA :: AX, XH, ou HA, XQ :: AX, XH, ce qui donne $HA \times XH = XQ \times AX$; de même les triangles rectangles semblables AXQ, AXS donnent AQ, XQ :: AX, XS, donc $AQ \times XS = XQ \times AX$, & par conséquent $HA \times XH = AQ \times XS$, d'où l'on tire HA, AQ :: XS, XH, c'est-à-dire la puissance HA est à la pesanteur AQ du poids A comme le sinus XS de l'angle d'inclinaison du plan CB est au sinus XH du complement de l'angle de traction, & on prouvera la même chose des autres puissances dont les directions passent par le quart de cercle.

Il est aisé de voir que toutes ces puissances seront en équilibre avec le corps A, car chacune d'elles sera composée de la force AM égale & contraire à la force AR & d'une force qui tirera de M vers H, & par conséquent l'effort que la pesanteur fait vers R sera contrebalancé, & le corps A sera encore plus pressé sur le plan & restera immobile.

Les puissances dont les directions passent par le quart de cercle VT, doivent pousser le corps vers L, & comme elles ont les mêmes directions que celles dont les directions passent par le quart de cercle OX, il est clair qu'elles seront en équilibre avec le corps A quand elles seront à la pesanteur AQ, comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de complement de l'angle de traction.

Quant aux puissances dont les directions passent par le quart de cercle TX & qui poussent vers A; il est encore clair que celles qui passeront entre AT & la verticale AQ ayant les mêmes directions que celles qui passeroient entre OA & la verticale AP seront en équilibre avec le corps quand elles seront à la pesanteur AQ comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de complement de l'angle de traction, & que celles qui passeront entre la verticale AQ & la droite AX, ne seront point en équilibre avec le corps, quoi qu'elles soient à la pesanteur AQ comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de complement de

l'angle de traction ; car si ces puissances poussent le corps vers A elles l'enleveront de même que celles qui le tireroient & qui passeroient entre AP & AY , & si elles le tirent elles donneront au corps une double vitesse de A vers R , de même que celles qui le pousseroient & qui passeroient entre AP & AY.

On voit donc par là que quoiqu'il soit toujours vrai de dire qu'une puissance qui est en équilibre avec le corps A est à la pesanteur de ce corps comme le sinus de l'angle d'inclinaison est au sinus de complément de l'angle de traction , cependant il est faux que toute puissance qui est à la pesanteur du corps A dans la raison du sinus de l'angle d'inclinaison au sinus de complément de l'angle de traction , soit en équilibre avec cette pesanteur ou avec le poids A.

En finissant ces éclaircissemens je vais ajouter ici deux Problèmes dont on ne sera pas fâché de voir la solution.

Problème 1. Deux puissances A, B (Fig. 253, 254.) tirant un levier CD avec des directions obliques CA, DB, on demande quel est le point où le levier CD devoit être attaché fixement afin que les deux puissances fussent en équilibre.

Pour résoudre ce Problème, je prolonge les directions CA ; DB, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en R, je prens les droites RS, RH, qui soient entr'elles comme les puissances A, B, & achevant le parallélogramme RM, je mene la diagonale RM, & le point O ou cette diagonale, est le point autour duquel les deux puissances seroient en équilibre.

Les puissances A, B, & la résistance du point fixe du levier que nous cherchons doivent être en équilibre, & par conséquent elles doivent faire le même effet que si la puissance en A poussant de R en S, & la puissance B de R en H une troisième puissance poussoit de M en R, & fut en équilibre avec A & B ; or afin que cela fut, il faudroit que cette troisième puissance fut exprimée par MR, & qu'elle eut la direction, selon le principe établi ci dessus, donc la résistance du point du levier que nous cherchons doit être exprimé par MR, & ce point doit être dans cette direction, & par conséquent il doit être en O.

Et pour faire voir que ceci s'accorde avec les autres principes établis dans cet ouvrage, supposons $AC = RS$ & $BD = RH$, du point O je mene les perpendiculaires OV, OI sur les directions des puissances, & il est visible qu'en prenant pour sinus total la droite RO, la perpendiculaire OV est le sinus de l'angle

ORV; & la perpendiculaire OT est le sinus de l'angle ORS; or dans le parallelogramme MR ou dans le triangle MHR le côté MH = SR = AC est le sinus de l'angle ORV & le côté HR = BD est le sinus de l'angle HMR ou de son alterne ORS, donc les puissances AC, BD sont entr'elles comme les perpendiculaires OV, OT, & par conséquent les puissances AC, BD attachées aux extrémités du levier coudé TOV seroient en équilibre autour du point fixe O puisqu'elles seroient entr'elles dans la raison reciproque de leur bras de levier. Il me reste donc à faire voir que les mêmes puissances appliquées aux extrémités du levier CD sont aussi en équilibre autour du point fixe O, ce que je fais ainsi.

J'acheve les parallelogrammes PN, DB autour des forces AC, BD, & par conséquent la force AC étant composée des deux CP, CN n'agit sur le levier que comme CN à cause que PC trouve un obstacle invincible en O, par la même raison la force DB composée des deux DQ, DE n'agit sur le levier que comme DE, c'est pourquoi si je demontre que les forces CN, DE sont en équilibre autour du point O, il sera démontré aussi que les forces AC, DB sont en équilibre autour du même point. Or les triangles rectangles ANC, ou PAC & CTO étant semblables, nous avons AC, NC :: CO, OT, ce qui donne $AC \times OT = NC \times CO$, on prouvera aisément que les triangles BED, DOV sont semblables, ainsi l'on aura BD, ED :: DO, VO, ce qui donne $BD \times VO = ED \times DO$, mais nous avons prouvé que les forces AC, BD attachées aux extrémités T, V du levier coudé TOV, seroient en équilibre autour du point O, & que par conséquent on auroit $AC \times TO = BD \times OV$, mettant donc les valeurs de ces rectangles, nous aurons $NC \times CO = ED \times DO$, ce qui donne NC, ED :: DO, CO, c'est-à-dire les forces NC, ED sont entr'elles reciproquement comme leur bras de levier, & par conséquent elles sont en équilibre autour du point O.

Problème II. Deux plans verticaux AB, CR (Fig. 255.) étant donnés avec plusieurs plans inégalement inclinés AE, AF, AG, &c. qui passent tous par le point A, trouver lequel de ces plans sera parcouru dans un moindre tems par un corps qui descendroit le long de ce plan.

J'éleve en A la perpendiculaire AC entre les deux plans AB, CR, & prenant Ag ou CG égal à AC, je dis que le plan AG qui passe par le point G est le plan demandé; pour le prouver.

Je décris du centre g avec le rayon gA un demi-cercle AGB, qui

ET CORRECTIONS.

xxxiiij

qui touche le plan CR en G, & qui coupe par conséquent les autres plans inclinés 1, 2, 3, 4, &c. j'ai prouvé N°. 196. Corollaire X, de la Proposition LXII, que le tems de la descente le long de chacune des cordes A₁, A₂, AG, A₃, &c. étoit toujours égal au tems de la descente le long du diamètre AM, & par conséquent le tems de la descente le long du plan AG, est égal au tems de la descente le long de telle corde que l'on voudra A₁, A₂, A₃, &c. or tous les plans AE, AF, AH, &c. sont plus longs que les cordes A₁, A₂, A₃, &c. donc le tems de la descente le long de ces plans est plus long que le tems de la descente le long des cordes A₁, A₂, A₃, &c. & par conséquent le tems de la descente le long du plan AG est plus court que le tems de la descente le long de chacun des autres plans AE, AF, AH, &c.

FAUTES D'IMPRESSION.

Page 177, ligne 14, les parties GQ, QP prises sur la ligne AC, lisez, les parties AQ, QP prises sur la hauteur AC.

Page 202, ligne 4, je mene une ordonnée DG que je nomme $=z$, lisez, je mene une ordonnée DG & je nomme son abscisse $CG=z$.

Ibidem, ligne 28, & à l'ordonnée z , lisez, & à l'abscisse $CG=z$.

Page 209, 210, 211, & 212, il s'est glissé deux fautes d'inadvertance que je vais corriger ici. 1°. J'ai dit que pour trouver la pesanteur absolue d'un poids M (Fig. 94.) qui tiendrait un pont AB en équilibre, il falloit exprimer la pesanteur du pont par la longueur de la corde BC, au lieu qu'il falloit dire comme j'ai dit auparavant, qu'il falloit exprimer la pesanteur du pont par la distance CA du point C au point A. Or de-là il s'en est ensui-vi que toutes les fois qu'il s'est agi du rapport des grandeurs a , b , je me suis servi par megarde des expressions suivantes. *Si le poids M pèse autant que le pont . . . la pesanteur absolue du poids M peut être égale ou plus grande que la pesanteur absolue du pont . . .* au lieu de ces expressions il faut substituer celles-ci: *Si la ligne b qui exprime la pesanteur absolue du poids M est égale à la longueur de la corde exprimée par a . . . la ligne qui exprime la pesanteur absolue du poids M peut être ou égale ou plus grande que la longueur de la corde.*

xxxiv ECLAIRCISSEMENTS ET CORRECTIONS.

Au reste , quand on aura déterminé par les regles de ce Problème la longueur qui exprime la pesanteur du poids M , on trouvera aisément son rapport avec la pesanteur absolue du pont puisque cette pesanteur étant exprimée par CA , on peut connoître le rapport de la corde à la ligne CA & par conséquent celui de la ligne qui exprime la pesanteur du poids à la ligne CA .

Page 286 , ligne 10 , est égale à la différence de la quantité de mouvement après le choc , *lisez* ; est égale à la quantité de mouvement après le choc.

Page 298 , ligne 16 , avec des vitesses proportionnelles aux masses , *lisez* , avec des vitesses reciproquement proportionnelles aux masses.

Page 466 , ligne 20 , étoit aigu , *lisez* , étoit obtus.

Page 512 , ligne 29 , & la pesanteur absolue de la colonne EB est à la pesanteur absolue de la colonne VD comme FB est à TD , *lisez* , & la pesanteur absolue de la colonne EB est égale à la pesanteur absolue de la colonne VD .





On trouve chez le même Libraire les Livres suivans.

Nouveau Cours de Mathematique très-utile pour élever les Commencans sans le secours d'aucun Maître à la connoissance de tout ce qu'il y a de plus profond dans cette Science, contenant l'Arithmetique des Géometres, la Theorie & la Pratique de la Geometrie, la Mesure des Surfaces & des Solides, & le Calcul Intégral & Différentiel expliqués & appliqués à la Geometrie, par M. l'Abbé Deidier, en quatre volumes *in Quarto* enrichis de près de cent Planches.

Le Parfait Ingénieur François, ou la Fortification Réguliere & Irréguliere, avec l'Attaque & Défense des Places, suivant M. le Maréchal de Vauban, nouvelle Edition considérablement augmentée, par M. l'Abbé Deidier *in-Quarto*, enrichi de 50 planches, *sous Presse*.

Memoires d'Artillerie de M. Surirey de S. Remy, avec des Notes & des Additions très-considérables, par M. Belidor, nouv. Edit. augmentée d'un volume, en trois volumes *in-Quarto*, *sous Presse*.

De l'Attaque & de la Défense des Places, par M. de Vauban, *in-Quarto*, Grand-Papier avec quantité de grandes planches.

Memoires pour servir d'instruction dans la conduites des Sieges & dans la défense des Places, par M. le Maréchal de Vauban, *in-Quarto*, Grand-Papier avec Figures 1740.

Nouvelle Fortification tant pour un terrain bas & humide, que pour un sec & élevé, avec la construction de l'Hexagone à la Françoisise, par M. le Baron de Coëhorn, nouv. Edit. *in-Octavo*, rempli de Figures 1741.

Le Bombardier François, ou nouvelle Méthode de jeter les Bombes avec précision, avec un Traité des Feux d'Artifice, par M. Belidor, *in-Quarto* avec Figures.

Sentimens d'un Homme de Guerre sur le Système du Chevalier Folard, *in-Quarto*.

L'Ingénieur François, contenant la Géometrie pratique, la Fortification réguliere & irréguliere, suivant M. de Vauban, &c. par M. de la Londe, Ingénieur du Roy, *in-Octavo*, avec Figures.

Véritable maniere de fortifier de M. de Vauban, par M. du Fay, & le Chevalier de Cambray, *in-Octavo* figures.

La Science des Ingenieurs dans la conduite des travaux de Fortification par M. Belidor, *in-Quarto*, grand-papier avec 50 planches.

Theorie nouvelle sur le Mécanisme de l'Artillerie, par M. Dulacq, Officier d'Artillerie, rempli de figures, & enrichi de vignettes, *in-Quarto* 741.

Memoires de M. Goulon sur l'Attaque & la Défense d'une Place, avec la Relation du Siege d'Ath, *in-Octavo*, figures.

Nouveau Traité de la perfection sur le fait des Armes, avec l'exercice Militaire, par le sieur Girard, ancien Officier de Marine, *in-Quarto*, orné de cent vingt planches.

Nouveaux Elemens de Fortification à l'usage des Officiers, où l'on donne une idée générale de la Fortification indépendamment de tout Système particulier, par M. le Blond *in-12*. avec figures.

La Fortification réguliere & irréguliere qui comprend la Construction, l'Attaque, & la Défense des Places, suivant les plus célèbres Auteurs, par M. Ozanam *in-Octavo*, avec quantité de planches.

Les regles du Dessin & du Lavis pour les Plans & Elevations des Edifices Militaires, & pour dessiner les Cartes particulieres des environs d'une Place, par M. Buchotte, Ingénieur du Roy, *in-Octavo*, avec figures.

Nouvelle maniere de fortifier les Places par le moyen des Contremines, par M. Dazin, *in-12*. avec figures.

Nouvelle Méthode pour apprendre à dessiner sans Maître, enrichie des proportions du corps Humain & de plusieurs figures d'Académie, gravées par les plus habiles Maîtres, in-4. grand-papier, enrichi de 120 Planches 1740.

Astronomie Physique, ou Principes Généraux de la Nature, appliqués au Mécanisme Astronomique & comparés aux Principes de la Philosophie de M. Newton, in-4. enrichi de Vignettes & Figures en Taille douce 1740.

Lettre de M. de Mairan à Madame la M. D. C. avec sa Dissertation sur les forces des Corps, & la refutation des Forces vives, par M. l'Abbé Deidier, in-12. fig. 1741.

Usage de l'Analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du Calcul Différentiel les propriétés des lignes Géométriques de tous les Ordres, par M. l'Abbé De Gua, in-12. 1740.

Les Tables des Sinus Tangentes & Sécantes, & des Logarithmes, par Adrien Wlacq, corrigées par M. Ozanam, avec la Trigonometrie; nouvelle édition, beaucoup plus correcte & plus belle que les précédentes, in-8. figures. 1741.

Nouveau Tarif du Toisé, tant superficiel que solide, où l'on trouve les Calculs du Toisé tout faits sans mettre la main à la plume, avec le Toisé des Bâtimens, suivant les Us & Coutumes de Paris, in-8. sur presse.

Application de la Géométrie brulinai'e & des Calculs Différentiel & Integral à la resolution de plusieurs Problèmes; par M. Robillard le fils, in-4. avec fig. sur presse.

Traité Analytique des Sections Coniques, des Fluxions & Fluents appliqué à différents sujets de Mathématique; par M. L'abbé de l'Anglois, nouvelle édition traduite de l'Anglois & augmentée considérablement par l'Auteur même, in-4. avec figures sur presse.

Oeuvres de Physique & de Mathématique de M. Mariotte, de l'Académie des Sciences, nouv. édit. en deux vol. in-4. avec quantité de fig. 1740.

Essais de Physique par M. Musschenbroeck, Professeur de Philosophie, avec une description de nouvelles machines pneumatiques, en deux volumes in-4. avec fig. 1741.

Architecture Hydraulique, ou l'Art de conduire, d'élever & de menager les Eaux pour tous les besoins de la vie; par M. Belidor, en deux volumes in-4. grand-papier, enrichis de 100 planches 1739.

Nouveau Cours de Mathématique à l'usage de l'Artillerie & du Génie; par M. Belidor, in-4. avec figures.

Cours de Mathématique, qui comprend les parties de cette Science les plus utiles à un homme de guerre: Sçavoir l'Introduction, les Elemens d'Euclides, l'Arithmétique, la Trigonometrie & les Tables des Sinus, la Géométrie, la Fortification, la Mécanique, la Perspective, la Géographie & la Gnomonique; par M. Ozanam, en cinq volumes in-8.

Les Recreations Mathématiques & Physiques; par M. Ozanam, en quatre volumes in-8. nouvelle édition 1741.

Les Elemens d'Euclides du P. Deschales, corrigés & augmentés par M. Ozanam; in-12. avec figures, nouvelle édition 1740.

Méthode facile pour Arpenter & mesurer toutes sorte de superficies, avec le toisé des bois de Charpente; par M. Ozanam, in-12.

La Géométrie Pratique, contenant la Longimétrie, Planimétrie & Stereometrie, avec l'Arithmétique par Géométrie; par M. Ozanam, in-12.

Méthode pour lever les plans & les Cartes de Terre & de Mer, in-12. avec fig.

L'usage du Compas de Proportion, avec un Traité de la division des champs; par M. Ozanam, in-8.

Nouvelle Mécanique ou Statique; par M. Varignon, de l'Académie des Sciences, en deux volumes in-4. avec 65 planches.

On trouve chez le même Libraire toutes sortes de Livres sur l'Architecture Civile & Militaire, & sur les différentes parties des Mathématiques.



LA MECHANIQUE GENERALE.

CONTENANT

LA STATIQUE, L'AIROMETRIE;
L'HYDROSTATIQUE,

ET

L'HYDRAULIQUE, &c.


LIVRE PREMIER.

De la Méchanique des Solides, & de la Statique.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions, & Axiomes.

DEFINITION.

1°.  N dit qu'un Corps est en *repos*, lorsqu'il demeure toujours dans le même lieu, & qu'il est en *mouvement*, lorsqu'il change continuellement de lieu.

2°. La *pesanteur* ou *gravité* d'un Corps, est l'effort qu'il fait pour tendre au Centre de la Terre, & la *gravitation* est l'effort qu'il fait sur un autre Corps qui est au-dessous de lui.

A

3°. La *masse* d'un Corps est la matiere dont il est composé, & son *volume* est l'extension de cette matiere en longueur, largeur, & profondeur.

4°. La *force motrice*, ou simplement la *Force* d'un Corps, est ce qui communique le mouvement au Corps; quelques Auteurs l'appellent *force vive* ou *vivante*, lorsque ce Corps est actuellement en mouvement, & *force morte*, lorsque le Corps n'étant pas en mouvement paroît cependant y tendre: telle est la force d'une pierre qui est suspendue par un fil. On verra dans la suite ce que l'on doit penser de cette distinction de forces.

5°. Par le *temps* on entend en Méchanique la partie du temps pendant laquelle le mouvement d'un Corps dure, & par l'*Espace* on entend le lieu que le Corps a parcouru pendant son mouvement. Si l'on considere le Corps comme un point, l'Espace parcouru est une ligne.

6°. La *vitesse* est un effet de la force motrice, qui fait qu'un Corps en mouvement parcourt un espace dans un temps déterminé.

La vitesse des Corps s'estime donc par les espaces parcourus dans des temps égaux. Supposons, par exemple, que le Corps A (*Fig. 1.*) parcoure dans une minute l'espace AC, & que le Corps B dans la même minute parcoure l'espace BD double de l'espace AC, la vitesse du Corps B sera double de la vitesse du Corps A. Que si le Corps B dans la même minute parcourt l'espace BE triple de l'espace AC, la vitesse de B sera triple de la vitesse de A, & ainsi des autres.

7°. La *Direction* est une ligne le long de laquelle on conçoit qu'un Corps se meut. Si le Corps A (*Fig. 1.*) se meut de A vers C le long de la droite AC, cette droite AC est la direction du Corps A.

8°. La vitesse jointe à la direction s'appelle l'*Effort*; ainsi l'effort est d'autant plus grand que la vitesse est plus grande.

9°. La *force résistante* est une force qui agit selon une direction opposée à celle d'une autre force. Si le Corps A (*Fig. 2.*) est mû par une force de A vers B, & que le Corps B soit mû par une autre force de B vers A, la force de B s'appellera *force résistante*, parce que sa direction est opposée à celle de la force qui meut le Corps A.

10. La *quantité du mouvement* d'un Corps, est le produit de sa masse par sa vitesse. Si le Corps A (*Fig. 1.*) pesant par exemple deux livres parcourt dans une minute un espace de trois pieds,

& que le Corps B pesant quatre livres parcoure six pieds, la vitesse du Corps B sera double de celle du Corps A (N. 6.); ainsi la vitesse de A sera à celle de B, comme 1 à 2. Multipliant donc le Corps A = 2 par sa vitesse = 1, & le corps B = 4 par sa vitesse = 2, les produits 2 & 8 exprimeront la quantité de mouvement de ces deux Corps, c'est-à-dire, le Corps B aura quatre fois plus de mouvement que le Corps A, parce que 8 est quadruple de deux.

Pour estimer la quantité du mouvement, il faut donc avoir égard & aux masses & aux vitesses, & la raison en est évidente. Car dans la supposition que nous venons de faire, les Corps A & B étant entr'eux comme 1 à 2, il est visible que si les vitesses étoient égales, il faudroit pour mouvoir le Corps B une force double de celle qui mouvroit le corps A; mais la vitesse de B étant double de celle de A, il est encore visible que pour mouvoir B, il faut une force double de la précédente; donc il faut une force qui soit à celle de A, comme 4 à 1. Or 4 est le produit de deux par deux, c'est-à-dire, de la masse de B par sa vitesse, & 1 est le produit de 1 par 1, ou de la masse de A par sa vitesse; donc, &c.

11. On dit que le mouvement est *uniforme* lorsque le Corps a toujours la même vitesse, qu'il est *accélééré* lorsque la vitesse va toujours en augmentant, qu'il est *retardé* lorsque la vitesse va en diminuant; & enfin qu'il est *uniformement accéléré* ou *retardé* lorsque dans des temps égaux la vitesse reçoit des augmentations ou des diminutions égales.

Si le Corps A (Fig. 3.) parcourt dans la première minute l'espace AB, dans la seconde minute l'espace BC égal à AB, dans la troisième l'espace CD égal à AB, & ainsi de suite, le mouvement du Corps A est un mouvement uniforme. Si le Corps A (Fig. 4.) parcourt dans la première minute l'espace AB, dans la seconde l'espace BC plus grand que AB, dans la troisième, l'espace CD plus grand que BC, & ainsi de suite, le mouvement du Corps A est un mouvement accéléré. Si le Corps A (Fig. 5.) parcourt dans la première minute l'espace AB, dans la seconde l'espace BC, moindre que AB, dans la troisième l'espace CD moindre que BC, & ainsi de suite, le mouvement du corps A est un mouvement retardé. Si le Corps A (Fig. 4.) parcourt dans la première minute l'espace AB, dans la seconde l'espace BC plus grand que AB, dans la troisième l'espace CD plus grand que BC, & tou-

jours de même, en sorte que les accroissemens des vitesses soient toujours égaux dans des temps égaux, le mouvement du Corps A est un mouvement uniformément accéléré. Enfin si le Corps A (*Fig. 5.*) parcourt dans la première minute l'espace AB, dans la seconde, l'espace BC moindre que AB, dans la troisième, l'espace CD moindre que l'espace BC, & ainsi de suite; en sorte que les diminutions des vitesses soient toujours égales dans des tems égaux, le mouvement du Corps A est un mouvement uniformément retardé.

AXIOMES.

12. *Rien ne se fait dans la Nature sans quelque raison suffisante.* Si aujourd'hui une chose est d'une façon & demain d'une autre, il est sûr qu'il y aura quelque raison de ce changement, à moins qu'on ne soit assez fou pour oser soutenir qu'il est des choses qui échappent à la prévoyance de l'Auteur de la Nature, & que le seul hazard conduit.

13. *Si un Corps en mouvement a toujours la même vitesse, il parcourt des espaces égaux dans des tems égaux.* Car si avec sa vitesse il parcourt dans une minute l'espace d'un pied, il est évident que dans une autre minute, avec la même vitesse, il parcourra encore l'espace d'un pied, puisqu'il n'y a pas de raison pour pouvoir dire qu'il doit parcourir un espace moindre ou plus grand.

Si deux Corps en mouvement ont la même vitesse, ils parcourront dans le même tems des espaces égaux. Il n'y a pas de raison pour pouvoir dire que l'un doit parcourir un espace moindre ou plus grand que celui que l'autre parcourt; donc, &c.



CHAPITRE II.

Du Mouvement uniforme des Corps.

PROPOSITION PREMIERE.

14. **D**ANS le mouvement uniforme d'un Corps, les espaces parcourus sont entr'eux comme les tems employés à les parcourir.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le mouvement uniforme le Corps a toujours la même vitesse, il est sûr que si le Corps A (Fig. 6.) parcourt dans un tems quelconque, par exemple, dans une minute l'espace AB, dans un second tems égal au premier, il parcourra un espace BC égal au premier espace AB, & que si ce second tems est double, triple, quadruple, &c. du premier, ou qu'il ne soit que la moitié, le tiers, le quart, &c. ou enfin qu'il soit au premier en telle raison rationnelle, ou sourde qu'on voudra, l'espace parcouru sera aussi double, triple, quadruple, &c. du premier espace, ou la moitié, le tiers, & le quart, &c. ou enfin en même raison rationnelle, ou sourde, que le second tems est au premier; donc le second espace sera au premier, comme le second tems est au premier.

Pour abréger les Demonstrations suivantes, & ne pas multiplier les figures, nous appellerons le premier tems $= t$, le second $= T$, le premier espace $= s$, le second $= S$; & quand il s'agira de deux Corps en mouvement, nous appellerons la masse du premier $= m$, celle du second $= M$, la vitesse du premier $= u$, celle du second $= V$, la quantité de mouvement du premier $= q$, & celle du second $= Q$.

PROPOSITION II.

15. Dans le mouvement uniforme, si deux Corps A & B ont la même vitesse, les espaces qu'ils parcourent sont entr'eux comme les tems qu'ils employent à les parcourir.

DEMONSTRATION.

Supposant que le Corps A dans le tems $= t$ parcoure l'espace
A ii.

$=s$, le Corps B qui par la supposition a la même vitesse que le Corps A, parcourra aussi dans le même tems $=t$ un espace $=s$; or si nous supposons que le même Corps B parcourt dans un autre tems $=T$ un espace $=S$, il est clair par la proposition précédente que l'espace s qu'il aura parcouru dans le premier tems sera au second espace S parcouru dans le second tems, comme le premier tems au second; donc on aura $s, S :: t, T$; mais l'espace s parcouru dans le premier tems t , est égal à l'espace s parcouru par le Corps A dans le même tems t ; donc les espaces s, S , parcourus par les Corps A, B, dans les tems t, T , sont entr'eux comme les tems t, T .

PROPOSITION III.

16. *Dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus par deux Corps A, B, dans un même tems, sont entr'eux comme les vitesses des Corps.*

DEMONSTRATION.

Si le Corps A dans le tems t avec une vitesse u décrit l'espace s , dans le même tems avec une vitesse V multiple ou sou-multiple de la première, il décrira un espace S équimultiple, ou équisoumultiple du premier; & l'on aura $s, S :: u, V$; donc si l'on suppose que le Corps B dans le même tems t avec la vitesse V parcourt l'espace S , il sera vrai de dire que l'espace s parcouru par le Corps A est à l'espace S parcouru par le Corps B, comme la vitesse u du Corps A à la vitesse V du Corps B, & que par conséquent les espaces parcourus par ces Corps dans un même tems, sont entreux comme leurs vitesses.

PROPOSITION IV.

17. *Dans le mouvement uniforme les espaces parcourus par deux Corps, sont en raison composée de la raison des tems & de celle des vitesses.*

DEMONSTRATION.

Que le Corps A avec une vitesse u , décrive l'espace s dans le tems t , & le Corps B avec une vitesse V décrive l'espace S dans le temps T , la raison des temps est t, T , celle des vitesses est u, V , & la raison composée des deux est tu, TV , & il faut prouver que $s, S :: tu, TV$. Pour cela,

Supposons que le Corps B avec une vitesse u égale à celle du corps A décrive un espace r dans le tems T , alors les vitesses des corps A, B, étant les mêmes, on aura $s, r :: t, T$, (N. 15.) & comme les espaces S, r , que le Corps B décrit avec différentes vitesses sont décrits dans des tems égaux, on aura $r, S :: u, V$, (N. 16.) Multipliant donc les termes de la premiere proportion par ceux de la seconde, on aura $sr, Sr :: tu, TV$, & divisant la premiere raison par r , on aura $s, S :: tu, TV$, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

18. Si l'on suppose $s = S$, on aura $tu = TV$; donc $t, T :: V, u$, c'est-à-dire, si les espaces parcourus uniformement par les Corps A, B, sont égaux, les tems sont entr'eux réciproquement comme les vitesses, & les vitesses réciproquement comme les tems.

COROLLAIRE II.

19. Si après avoir supposé $s = S$, on suppose encore $t = T$, on aura $V = u$, c'est-à-dire, que si les espaces parcourus uniformément par deux Corps A, B, dans des tems égaux sont égaux, les vitesses seront égales.

REMARQUE.

20. Ceux à qui les Démonstrations de cette proposition & des Corollaires paroîtront trop abstraites, peuvent s'en convaincre par un raisonnement simple qu'ils pourront appliquer aux Propositions suivantes, & dont voici la façon. Supposons, par exemple qu'on veuille démontrer que dans le mouvement uniforme les espaces parcourus par les Corps A, B, sont en raison composée de la raison des tems & de celle des vitesses; je dis 1°. si les tems & les vitesses étoient égales, les espaces parcourus seroient égaux; car il n'y a point de raison pour dire le contraire. 2°. Si les tems étoient égaux, & que la vitesse du Corps A fut par exemple à celle du Corps B, comme 2 à 1, l'espace parcouru par le Corps A, seroit à l'espace parcouru par le Corps B, comme 2 à 1, puisqu'une vitesse double fait parcourir un espace double. 3°. Si l'on suppose que le Corps A ayant une vitesse double de celle du Corps B, le tems de son mouvement devienne triple, il est visible qu'il parcourra un espace triple de celui qu'il auroit par-

couru, en supposant les tems égaux, & que par conséquent l'espace parcouru par le Corps A sera sextuple de l'espace parcouru par le Corps B; ainsi ces espaces seront comme 6 à 1. Or la raison 6, 1, est composée de la raison 2, 1, des vitesses, & de la raison 3, 1, des tems. Donc les espaces parcourus par les Corps A, B, sont en raison composée, &c.

PROPOSITION V.

21. Dans le mouvement uniforme les vitesses u & V , des Corps A, B, sont en raison composée de la raison directe des espaces s , S , & de la raison reciproque des tems T & t .

DEMONSTRATION.

Par la Proposition précédente on a $s, S :: u, TV$; donc $sTV = Stu$; d'où l'on tire $u, V :: sT, St$. Or la raison sT, St , est composée de la raison s, S , qui est la raison directe des espaces & de la raison T, t , qui est la raison reciproque des tems; donc les vitesses u, V , sont en raison composée, &c.

REMARQUE.

22. Pour montrer encore une fois aux Commencans comment on peut se convaincre de ceci par un raisonnement fort simple, je dis 1°. si les espaces parcourus & les tems étoient égaux de part & d'autre, il est visible que les vitesses u & V seroient égales, parce qu'il n'y a point de raison de dire le contraire. 2°. Si nous supposons les tems égaux, & que l'espace s parcouru par le Corps A soit double de l'espace S parcouru par le Corps B, la vitesse u du Corps A sera évidemment double de la vitesse V du Corps B; ainsi ces vitesses seront comme 2 à 1. 3°. Si en supposant l'espace parcouru par le Corps A double de l'espace parcouru par le Corps B, on suppose encore que le tems du mouvement de A soit quatre fois plus grand, il est sûr que sa vitesse sera quatre fois moindre qu'elle ne seroit si les tems étoient égaux, puisqu'il lui faut quatre fois plus de tems pour parcourir le même espace. Comme donc la vitesse du Corps A étoit auparavant à la vitesse du Corps B comme 2 à 1, elle sera maintenant comme $\frac{1}{2}$ de 2 est à 1, ou comme $\frac{1}{2}$ à 1, ou enfin comme 1 à 2, ou comme 2 à 4. Mais la raison 2, 4, est composée de la raison 2, 1, qui est la raison directe des espaces, & de la raison 1, 4, qui est la raison reciproque des tems. Donc. &c.

On

On appliquera le même raisonnement à tout ce que nous dirons dans les Corollaires & les Propositions suivantes, sans que je sois obligé de le répéter.

COROLLAIRE.

23. Puisque nous avons $u, V :: sT, St$, si nous divisons la dernière raison d'abord par T , & ensuite par t , nous aurons $u, V :: \frac{s}{t}, \frac{S}{T}$, c'est-à-dire, les vitesses de deux Corps mis uniformément, sont entr'elles comme les espaces divisés par les tems.

PROPOSITION VI.

24. Dans le mouvement uniforme, les tems pendant lesquels les Corps A, B, parcourent leurs espaces, sont en raison composée de la raison directe des espaces s, S , & de la raison réciproque des vitesses V, u .

DEMONSTRATION.

Nous avons $s, S :: tu, TV$, (N. 17.) donc $sTV = Stu$, & par conséquent $t, T :: sV, Su$. Or la raison sV, Su , est composée de la raison s, S , qui est la raison directe des espaces, & de la raison V, u , qui est la raison réciproque des vitesses. Donc les tems t, T , sont en raison composée, &c.

COROLLAIRE.

25. Si les espaces parcourus sont entr'eux comme les vitesses, les tems sont égaux. Par l'hypothèse nous avons $s, S :: u, V$, & par (N. 17.) nous avons $s, S :: tu, TV$; donc $u, V :: tu, TV$, ou $u, tu :: V, TV$; & divisant la première raison par u , & la seconde par V , nous aurons $1, t :: 1, T$; or dans cette proportion les deux antécédens sont égaux; donc les conséquens sont aussi égaux, & nous avons $t = T$.

PROPOSITION VII.

26. Dans le mouvement uniforme, les quantités de mouvement q , & Q , de deux Corps A, B, sont en raison composée de la raison des masses m, M , & des vitesses u, V .

DEMONSTRATION.

Par la définition de la quantité du mouvement (N. 10.) nous

B

avons $q = um$, & $Q = VM$; donc $q, Q :: um, VM$. Or la raison um, VM , est composée de la raison m, M , des masses, & de la raison u, V des vitesses; donc les quantités de mouvement de deux corps A, B, sont en raison composée, &c.

COROLLAIRE I.

27. Si $q = Q$, on aura $um = VM$; donc $u, V :: M, m$, c'est-à-dire, lorsque les quantités de mouvement de deux Corps A, B, sont égales, les vitesses sont en raison réciproque des masses.

COROLLAIRE II.

28. Si outre $q = Q$, on a encore $M = m$, il est évident qu'on aura $u = V$, c'est-à-dire, si deux Corps A, B, ont une égalité de mouvement & des masses égales, les vitesses sont aussi égales.

De même, si outre $q = Q$, on a $u = V$, il est visible qu'on aura $m = M$, c'est-à-dire, si les quantités de mouvement de deux Corps sont égales, & leur vitesses aussi, les masses sont égales.

PROPOSITION VIII.

29. Dans le mouvement uniforme les vitesses de deux Corps A, B, sont en raison composée de la raison directe des quantités de mouvement $q = Q$, & de la raison réciproque des masses m, M .

DEMONSTRATION.

Puisque nous avons $q, Q :: um, VM$ (N. 26.) ; donc $qVM = Qum$, & par conséquent $u, V :: qM, Qm$; or la raison qM, Qm , est composée de la raison q, Q , qui est la raison directe des quantitez de mouvement, & de la raison M, m , qui est la raison réciproque des masses; donc les vitesses u, V , sont en raison composée, &c.

COROLLAIRE I.

30. Si l'on suppose $u = V$, on aura $qM = Qm$; donc $q, Q :: m, M$, c'est-à-dire, que si les vitesses des deux Corps sont égales, les quantitez de mouvement sont entr'elles comme les masses.

COROLLAIRE.

31. Et si après avoir supposé $u = V$, on suppose $m = M$, il

GENERALE, LIVRE I.

11

est visible qu'on aura $q = Q$, c'est-à-dire, si les vitesses sont égales & les masses aussi, les quantitez de mouvement sont égales.

Et par la même raison, si les vitesses sont égales & les quantitez de mouvement aussi égales, il y a égalité entre les masses.

PROPOSITION IX.

32. Dans le mouvement uniforme, les masses m, M , de deux corps A, B , sont en raison composée de la raison directe des quantitez de mouvement q, Q , & de la raison reciproque V, u , des vitesses.

DEMONSTRATION.

Puisque nous avons $q, Q :: um, VM$, (N. 26.) donc $qVM = Qum$, & par conséquent $m, M :: qV, Qu$. Or la raison qV, Qu , est composée de la raison q, Q , qui est la raison directe des quantitez de mouvement, & de la raison V, u , qui est la raison réciproque des vitesses. Donc les masses m, M , sont en raison composée, &c.

COROLLAIRE I.

33. Si l'on suppose $m = M$, on aura $qV = Qu$, donc $q, Q :: u, V$, c'est-à-dire, si les masses sont égales, les quantitez de mouvement sont entr'elles comme les vitesses.

PROPOSITION X.

34. Dans le mouvement uniforme, les quantitez de mouvement q, Q , de deux corps A, B , sont en raison composée de trois raisons, dont les deux premieres sont les raisons directes des masses m, M , & des espaces s, S , & la troisieme est la raison T, t , qui est la raison réciproque des tems.

DEMONSTRATION.

Par la Proposition V (N. 21.) Nous avons $u, V :: sT, St$, & par la Proposition VII. Nous avons $q, Q :: mu, MV$; multipliant donc les termes de la premiere proportion par ceux de la seconde, Nous aurons $qu, QV :: musT, MVSt$, ou bien $qu, musT :: QV, MVSt$, & divisant la premiere raison par u , & la seconde par V , on aura $q, msT :: Q, MSt$, ou $q, Q :: msT, MSt$. Or la raison msT, MSt , est composée de trois raisons, à sçavoir des deux m, M , & s, S , qui sont les raisons directes des masses, & des es-

paces, & de la raison T, t , qui est la réciproque des tems ; donc les quantités q, Q , sont en raison composée, &c.

COROLLAIRE I.

35. Si l'on suppose $q=Q$, on aura $msT=MS t$; donc $m, M :: St, sT$, c'est-à-dire, si les quantitez de mouvement sont égales, les masses m, M , sont entr'elles en raison composée de la raison directe des tems t, T , & de la raison S, s , qui est la réciproque des espaces.

Puisqu'en supposant $q=Q$, on a $msT=MS t$, donc $s, S :: Mt, mT$, c'est-à-dire, les quantitez de mouvement étant égales, les espaces s, S , sont en raison composée de la raison directe des tems t, T , & de la raison M, m , qui est la réciproque des masses.

De même, en supposant $q=Q$, on a $msT=MS t$; donc $t, T :: ms, MS$, c'est-à-dire, les quantitez de mouvement étant égales, les tems t, T , sont en raison composée des masses m, M , & des espaces s, S .

COROLLAIRE II.

36. Si on suppose $q=Q$, & $m=M$, il est clair qu'on aura $sT=St$, donc $s, S :: t, T$, c'est-à-dire, les quantitez de mouvement étant égales & les masses aussi, les espaces sont entr'eux comme les tems.

COROLLAIRE III.

37. En supposant $q=Q, m=M$, & $s=S$, il est clair qu'on a $t=T$; de même, en supposant $q=Q, m=M$, & $t=T$, on aura $s=S$; & par la même raison on trouvera que, si en comparant les quantitez de mouvement q , & Q , les masses m & M , les vitesses u , & V , & le tems t , & T , il y a égalité dans les termes de trois de ces raisons, il y aura égalité dans les termes de la quatrième,

COROLLAIRE IV.

38. Si on suppose $q=Q$, & $s=S$, on aura $mT=Mr$; donc $m, M :: r, T$, c'est-à-dire, les quantitez de mouvement étant égales & les espaces aussi, les masses sont entr'elles comme les tems.

COROLLAIRE V.

39. Si on suppose $q=Q$, & $t=T$, on aura $ms=MS$; donc

$m, M :: S, s$, c'est-à-dire, les quantitez de mouvement étant égales, & les tems aussi, les masses sont en raison reciproque des espaces.

PROPOSITION XI.

40. Dans le mouvement uniforme les espaces s, S , parcourus par deux Corps A, B , sont en raison composée de trois raisons, dont les deux premieres sont les raisons directes des quantitez de mouvement q, Q , & des tems t, T , & de la raison M, m , qui est la raison réciproque des masses.

DEMONSTRATION.

Par la Proposition X (N. 34.) nous avons $q, Q :: mT, MS$, donc $qMS = QmT$; & par conséquent $s, S :: qMt, QmT$; or la raison qMt, QmT , est composée de trois raisons dont les deux premieres q, Q , & t, T , sont les raisons droites des quantitez de mouvement & des tems, & la troisième M, m , est la raison réciproque des masses, donc les espaces s, S , sont en raison composée, &c.

COROLLAIRE I.

41. Si l'on suppose s, S , il est clair qu'on aura $qMt = QmT$; donc $q, Q :: mT, Mt$, c'est-à-dire, les espaces étant égaux, les quantitez de mouvement sont en raison composée de la raison directe des masses & de la réciproque des tems.

De même, de ce que $qMt = QmT$, on a $m, M :: qt, QT$, c'est-à-dire, les espaces étant égaux, les masses sont entr'elles en raison composée des quantitez de mouvement & des tems.

De même encore, de ce que $qMt = QmT$, on a $t, T :: Qm, qM$, c'est-à-dire, les espaces étant égaux, les tems sont en raison composée de la raison directe des masses & de la reciproque des quantitez de mouvement.

COROLLAIRE II.

42. Si on suppose $s = S$, & $m = M$, on aura $qt = QT$; donc $q, Q :: T, t$, c'est-à-dire, les espaces étant égaux, & les masses aussi, les quantitez de mouvement sont en raison reciproque des tems.

COROLLAIRE III.

43. Si l'on suppose $s = S$, & $t = T$, on aura $qM = Qm$;
B iiij

donc $q, Q :: m, M$, c'est-à-dire, les espaces étant égaux, & les tems aussi, les quantités de mouvement sont entr'elles comme les masses.

PROPOSITION XII.

44. Dans le mouvement uniforme, les masses m, M , des Corps A, B , sont en raison composée de trois raisons, sçavoir des raisons directes des quantitez de mouvement q, Q , & des tems t, T , & de la raison S, s , qui est la réciproque des espaces.

DEMONSTRATION.

Par la Proposition X (N. 34.) Nous avons $q, Q :: m s T, M s t$; donc $q M s t = Q m s T$, & par conséquent $m, M :: q s t, Q s T$; or la raison $q s t, Q s T$, est composée de trois raisons, sçavoir des deux q, Q , & t, T , qui sont les raisons directes des quantités de mouvement & des tems, & de la raison S, s , qui est la réciproque des espaces. Donc les masses m, M , sont entr'elles en raison composée, &c.

COROLLAIRE I.

45. Si l'on suppose $m = M$, on aura $q s t = Q s T$; donc $q, Q :: s T, S t$, c'est-à-dire, en supposant les masses égales, les quantitez de mouvement sont entr'elles en raison composée de la raison directe des espaces & de la raison réciproque des tems.

De ce que $q s t = Q s T$, on a $s, S :: q t, Q T$, c'est-à-dire, les masses étant égales, les espaces sont en raison composée des tems & des quantitez de mouvement.

De même, de ce que $q s t = Q s T$, on a $t, T :: Q s, q S$, c'est-à-dire, les masses étant égales, les tems sont en raison composée de la raison directe des espaces, & de la réciproque des quantités de mouvement.

COROLLAIRE II.

46. Si l'on suppose $m = M$ & $t = T$, il est visible qu'on aura $q S = Q s$, d'où l'on tire $q, Q :: s, S$, c'est-à-dire, les masses étant égales, & les tems aussi, les quantités de mouvement sont entr'elles comme les espaces.

PROPOSITION XIII.

47. Dans le mouvement uniforme les tems t, T , employez par les Corps A, B , à parcourir leurs espaces, sont en raison composée de trois

raisons, dont les deux premières sont les raisons directes m , M , des masses, & s , S , des espaces, & la troisième est la raison Q , q , qui est la reciproque des quantitez de mouvement.

DEMONSTRATION.

Par la Proposition X. (N 34.) Nous avons q , $Q :: msT$, MS , donc $qMS = QmsT$, & par conséquent t , $T :: Qms$, qMS ; or la raison Qms , qMS est composée de trois raisons, sçavoir des deux m , M , & s , S , qui sont les raisons directes des masses, & des espaces, & de la raison Q , q , qui est la reciproque des quantitez de mouvement; donc les tems t , T , sont entr'eux en raison composée, &c.

COROLLAIRE.

48. Si l'on suppose $t = T$, on aura $Qms = qMS$; donc q , $Q :: ms$, MS , c'est-à-dire, les tems étant égaux, les quantitez de mouvement sont en raison composée des masses & des espaces.

De ce que $Qms = qMS$, on a aussi m , $M :: qS$, Qs , c'est-à-dire, les tems étant égaux, les masses sont en raison composée de la raison directe des quantitez de mouvement, & de la raison reciproque des espaces.

De même, de ce que $Qms = qMS$, on a encore s , $S :: qM$, Qm , c'est-à-dire, les tems étant égaux, les espaces sont en raison composée de la raison directe des quantitez de mouvement, & de la raison reciproque des masses.

CHAPITRE III.

Du Mouvement uniformement acceleré, & du Mouvement uniformement retardé.

49. **N**ous avons déjà dit (N. 11.) que le mouvement uniformement acceleré ou retardé d'un corps, est celui dont la vitesse reçoit dans des tems égaux des accroissemens égaux, ou des diminutions égales. Or delà il suit que les vitesses du mouvement uniformement acceleré sont entr'elles comme les tems pendant lesquels elles ont été acquises. Supposons, par exemple, que le Corps A à la fin de la premiere minute ait acquis un degré de vitesse, à la fin de la seconde minute il aura

acquis un autre degré de vitesse, à la fin de la troisième il en aura acquis un autre, & ainsi de suite. Donc la vitesse acquise à la fin de deux minutes sera double de la vitesse acquise à la fin d'une minute, la vitesse acquise à la fin de trois minutes sera triple de la vitesse acquise à la fin de la première, & ainsi des autres; & par conséquent les vitesses acquises à la fin des tems, seront entr'elles comme les tems.

AXIOMES.

50. *Si un Corps est en repos, il ne se mouvra jamais à moins que quelque cause ne le porte au mouvement, & s'il est en mouvement, il se mouvra toujours avec la même vitesse & selon la même direction, à moins que quelque cause ne change son état.* Le Corps étant incapable de choix & de détermination, ne peut se donner à lui-même un état différent; ainsi s'il passe du repos au mouvement, si sa vitesse change, s'il prend une autre direction, &c. il faut qu'il y ait une cause qui produise ces effets.

Delà, il suit 1°. que si un Corps se meut en conséquence d'une première impression, il se mouvra toujours en ligne droite. 2°. Que si son mouvement est en ligne courbe, il y a deux forces qui le meuvent, l'une qui lui donne une direction en ligne droite, & l'autre qui lui fait changer de direction à chaque instant.

51. *Si les efforts de deux Corps A, B, sont oppozez & égaux, les deux Corps resteront en repos l'un auprès de l'autre; il n'y a point de raison pour pouvoir dire que l'un dût entraîner l'autre.*

52. *Si un Corps qui est déjà en mouvement vient à être poussé selon la même direction, son mouvement s'accelere, & s'il est poussé par une force résistante, son mouvement se retarde, ou cesse, ou prend une direction opposée, selon que la force résistante est moindre, égale, ou plus grande que la force du Corps.*

PRINCIPES

FONDES SUR L'EXPERIENCE.

53. *La pesanteur d'un Corps est toujours la même à quelque distance que ce Corps se trouve de la surface de la terre, pourvu que cette distance ne soit pas extrêmement grande.*

Comme ce principe n'est fondé que sur l'Experience, & qu'il n'est pas possible de faire des experiences trop éloignées de la surface de la Terre, c'est avec raison qu'on se borne à dire que la

la distance du corps à la surface de terre, ne doit pas être trop grande.

54. *Les Corps graves tendent vers le centre de la Terre avec un mouvement accéléré.*

PROPOSITION XIV.

55. *Dans le mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus par un Corps A, sont entr'eux comme les quarrés des tems qu'il a employés à les parcourir, en comptant ces espaces depuis l'origine du mouvement.*

DEMONSTRATION

Par la Methode des Indivisibles.

Supposons que la droite AF (Fig. 7.) représente le tems pendant lequel un Corps se meut d'un mouvement accéléré; que cette droite soit coupée en une infinité de petites parties égales entr'elles & infiniment petites AB, BC, CD, &c. lesquelles représenteront les instans égaux dans lesquels on conçoit que le tems peut être divisé; que sur les points de division soient élevées des perpendiculaires BG, CH, qui soient entr'elles comme les vitesses acquises dans les tems AB, AC, AD, &c. Cela posé, les vitesses dans le mouvement accéléré étant entr'elles comme les tems (N. 49.) on aura AB, AC :: BG, CH, de même AC, AD :: CH, DI, & ainsi de suite. Donc si l'on fait passer une ligne par les points A, G, H, I, M, cette ligne sera droite, & les figures ABG, ACH, ADI, &c. seront des triangles rectangles semblables, & la figure AFM sera un triangle rectangle dont les droites BG, CH, DI, &c. seront les Elemens. Maintenant les petites lignes AB, BC, CD, &c. représentant des instans de tems qu'on peut considérer comme indivisibles, les vitesses pendant chacun de ces instans peuvent être considérées comme des vitesses uniformes chacune dans la durée de son instant. Or dans le mouvement uniforme les espaces parcourus dans des tems égaux sont comme les vitesses; donc si l'on suppose que l'espace parcouru dans le premier instant AB, avec la vitesse représentée par BG soit égal à BG, l'espace parcouru dans le second tems BC avec la vitesse CH sera égal à CH, & ainsi des autres; donc les espaces parcourus pendant les instans AB, BC, CD, &c. qui composent le tems total AF seront égaux aux droites BG, CH, DI, &c. c'est-à-dire, à la somme des Elemens du triangle

C

AFM, & par conséquent au triangle AFM. Par la même raison, les espaces parcourus pendant les instans qui composent le tems AD, seront égaux aux Elemens du triangle ADI, & par conséquent au triangle ADI. Mais la somme des espaces parcourus pendant les instans du tems AF, est égale à l'espace parcouru pendant le tems AF, & la somme des espaces parcourus pendant les instans du tems AD, est égale à l'espace parcouru pendant le tems AD; donc l'espace parcouru pendant le tems AF est à l'espace parcouru pendant le tems AD, comme le triangle AFM est au triangle ADI. Mais les triangles AFM, ADI étant semblables, sont entr'eux comme les quarez de leurs hauteurs AF, AD, qui représentent les tems; donc les espaces parcourus pendant les tems AF, AD, sont entr'eux comme les quarez des tems AF, AD.

AUTRE DEMONSTRATION

Par la Methode du Calcul Differentiel & Integral.

Que la droite AB (Fig. 8.) represente le tems pendant lequel un Corps se meut d'un mouvement uniformement acceléré, & la droite AP une partie de ce tems, si la perpendiculaire PM represente la vitesse acquise à la fin du tems AP, menant de A par AM la droite AC, & élevant au point B la perpendiculaire BC, cette droite BC representera la vitesse acquise à la fin du tems AB, comme on a vu dans la Démonstration précédente, & menant une autre perpendiculaire pm infiniment proche de PM, la droite Pp representera une partie infiniment petite de tems ou un instant, & la droite pm representera la vitesse acquise à la fin de cet instant. Mais les vitesses PM, pm , ne différant entr'elles que d'une grandeur infiniment petite Rm, peuvent passer pour égales; donc la vitesse du tems Pp peut passer pour uniforme. Mais dans le mouvement uniforme les espaces parcourus sont comme les tems multipliés par les vitesses (N. 17.) Multipliant donc Pp par pm ou pR, le rectangle PpRM, ou le trapezoide PpmM representera l'espace parcouru dans l'instant Pp. Or si l'on divise le tems AP en une infinité d'instans égaux à Pp, & que des points de division on mene des paralleles à PM, on aura une infinité de petits rectangles ou trapezoides qui représenteront les espaces parcourus dans chacun de ces instans. Donc les espaces parcourus pendant les instans qui composent AP, ou ce qui est la même chose, l'espace parcouru pendant le tems AP.

fera représenté par le triangle APM, & par la même raison l'espace parcouru pendant le tems AB sera représenté par le triangle ABC; ainsi les espaces seront comme les triangles, & par conséquent en raison doublée des tems AP, AB.

R E M A R Q U E.

§ 6. On voit par ces deux Démonstrations que la Méthode des Indivisibles, & celle du Calcul Différentiel & Intégral, ne diffèrent qu'en ce que dans la première on prend des lignes infiniment proches pour les Elemens d'une surface, & que dans l'autre les Elemens de cette surface sont des rectangles ou des trapezoïdes dont la hauteur est infiniment petite, mais cette différence est plutôt dans les mots que dans la chose même. Car comme il n'est pas nécessaire pour la Méthode des Indivisibles que les lignes n'ayent absolument aucune largeur, mais qu'il suffit de pouvoir les considérer comme n'en ayant point, rien n'empêche de leur attribuer une largeur infiniment petite, & de les considérer par conséquent comme des rectangles ou des trapezoïdes d'égale hauteur. On a donc tort de se récrier contre cette Méthode.

C O R O L L A I R E I.

§ 7. *Dans le mouvement uniformement accéléré, les espaces parcourus par le Corps sont entr'eux comme les quarrés des vitesses acquises à la fin des tems. Car les vitesses sont comme les tems. (N. 49.)*

C O R O L L A I R E II.

§ 8. *Dans le mouvement uniformement accéléré, les tems sont comme les racines des espaces, & il faut dire la même chose des vitesses.*

C O R O L L A I R E III.

§ 9. *Dans le mouvement uniformement accéléré, les espaces parcourus par un Corps dans des tems égaux & successifs, croissent dans la raison des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. Supposons que le Corps soit en mouvement pendant six minutes, l'espace parcouru dans la première minute sera à l'espace parcouru dans deux minutes comme 1 à 4, il sera à l'espace parcouru dans trois minutes, comme 1 à 9, & ainsi de suite; c'est-à-dire, que les tems étant comme 1, 2, 3, 4, &c. les espaces parcourus seront comme les quarrés 1, 4, 9, 16, &c. (N. 55.) Or si de l'espace 4 parcouru dans les deux premières minutes, on ôte l'espace 1 parcouru dans*

la premiere minute, le reste 3 sera l'espace parcouru dans la seconde minute; de même, si de l'espace 9 parcouru dans les trois premieres minutes on retranche l'espace 4 parcouru dans les deux premieres, le reste 5 sera l'espace parcouru dans la troisieme minute, & ainsi de suite. Donc les espaces parcourus dans chaque minute ou dans des tems égaux, augmentent dans la raison des nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c.

PROPOSITION. XV.

60. *Les Corps pesans qui ne sont pas à une distance trop grande de la surface de la terre, descendent vers le centre de la terre avec un mouvement uniformement acceleré.*

DEMONSTRATION.

Par l'experience, les Corps pesans tendent vers le centre de la terre avec un mouvement acceleré (N. 54.) & cette acceleration ne peut provenir que de ce que leur pesanteur les pousse à chaque moment; car si leur pesanteur ne leur donnoit qu'une premiere impression, il n'y auroit pas de raison pour pouvoir dire que leur mouvement fut acceleré. Or la pesanteur des Corps graves est la même par-tout, pourvu que leur distance de la surface de la terre ne soit pas trop grande, donc l'impression qu'elle fait à chaque instant est toujours la même, & par conséquent si au premier instant le Corps reçoit un degré de vitesse, dans le second moment il en reçoit encore un, dans le troisieme, il en reçoit une autre, & ainsi de suite. Mais quand les accroissemens de vitesse sont égaux dans des tems égaux, le mouvement est uniformement acceleré; donc le mouvement d'un Corps qui descend vers le centre de la terre, est uniformement acceleré.

COROLLAIRE.

61. Donc les espaces parcourus par un Corps grave qui descend vers le centre de la terre à compter ces espaces toujours depuis le commencement du mouvement, sont entr'eux comme les quarez des tems employés à les parcourir, ou comme les quarez des vitesses acquises à la fin des tems, & les tems où les vitesses sont comme les racines quarrées des espaces.

REMARQUE.

62. Il faut observer que dans tout ce que nous venons de dire

nous supposons qu'il n'y ait aucune résistance qui empêche la descente libre des corps graves, de quelque cause que puisse provenir cette résistance.

PROPOSITION XVI.

63. *Si un corps grave se meut vers le centre de la Terre pendant un tems déterminé l'espace parcouru à la fin de ce tems est soudouble de l'espace qu'il auroit parcouru à la fin du même tems s'il s'étoit mû d'un mouvement uniforme, & avec une vitesse égale à celle qu'il a acquise à la fin du tems.*

DEMONSTRATION.

Supposons que la droite AB (Fig. 9.) représente le tems pendant lequel un corps se meut d'un mouvement uniformément accéléré, & que la droite BC représente la vitesse acquise à la fin de ce tems, le triangle ABC représentera l'espace parcouru (N. 55); or si le mouvement étoit uniforme, & que la vitesse fût égale à BC, l'espace parcouru pendant le tems AB seroit représenté par le rectangle ABCD, c'est-à-dire par le produit du tems AB multiplié par la vitesse BC (N. 17), & le triangle ABC est soudouble du rectangle ABCD; dont l'espace parcouru dans le mouvement uniformément accéléré est à l'espace qui seroit parcouru dans le mouvement uniforme comme 1 à 2, & par conséquent soudouble.

COROLLAIRE.

64. Donc l'espace parcouru dans le mouvement uniforme avec la vitesse BC pendant la moitié du tems AB est égal à l'espace parcouru dans le mouvement uniformément accéléré pendant le tems AB.

PROPOSITION XVII.

65. *Connoissant l'espace qu'un corps grave parcourt d'un mouvement uniformément accéléré pendant un tems déterminé, trouver l'espace que ce même corps parcourroit dans un autre tems déterminé, en supposant que le mouvement dût commencer au commencement de l'un & de l'autre tems.*

SOLUTION.

Dans le mouvement uniformément accéléré, les quarrés des

tems sont entr'eux comme les espaces parcourus pendant ce tems, à compter ces espaces depuis le commencement du mouvement. Si l'on prend donc un quatrième proportionnel aux quarrés des deux tems donnés, & à l'espace donné, ce quatrième proportionnel sera l'espace cherché.

Supposons par exemple, qu'un corps A pendant une minute parcoure un espace de trois pieds, & qu'on demande quel espace il devroit parcourir dans trois minutes; je fais les quarrés des deux tems, c'est-à-dire, d'une minute & de trois, & ces quarrés sont 1 & 9, ensuite je dis 1 est à 9, comme l'espace 3 pieds est à un quatrième terme, lequel se trouve 27, & par conséquent 27 pieds est l'espace que ce corps parcourroit dans trois minutes si son mouvement commençoit à la premiere minute.

PROPOSITION XVIII.

66. *Connoissant l'espace qu'un corps parcourt pendant un tems déterminé; connoître l'espace qu'il doit parcourir pendant un autre tems déterminé, en supposant que ce second tems suit immédiatement le premier, & que le mouvement du corps dans ce second tems est une continuation du mouvement du premier tems.*

SOLUTION.

Ajoutez le premier tems au second, & dès-lors il est visible que le quarré du premier tems est au quarré de la somme du premier, & du second, comme l'espace parcouru dans le premier tems est à l'espace parcouru dans le premier, & le second joints ensemble. Prenant donc un quatrième proportionnel au quarré du premier tems, au quarré de la somme du premier & du second, & au premier espace, ce quatrième proportionnel sera l'espace parcouru pendant le premier & le second tems; ainsi retranchant de ce quatrième proportionnel l'espace parcouru dans le premier tems, le reste sera l'espace parcouru dans le second.

Supposons que dans la premiere minute un corps grave A parcoure 3 pieds, & qu'on veuille savoir quel est l'espace qu'il parcourra dans les trois minutes suivantes, j'ajoute le premier tems 1 au second tems 3, & la somme est 4; je fais le quarré du premier tems 1, & de la somme 4, ce qui fait 1 & 16; & je dis 1 est à 16, comme l'espace 3 est à un quatrième terme

qui se trouve être 48 ; ainsi 48 est l'espace parcouru pendant le premier & le second tems. Je retranche de cet espace l'espace 3 parcouru dans le premier tems, & le reste 45 est l'espace que le corps devoit parcourir pendant les trois minutes qui suivroient la premiere.

PROPOSITION XIX.

67. *Connoissant un premier tems pendant lequel un corps grave parcourt d'un mouvement uniformement accéléré un espace déterminé, connoître le tems pendant lequel il parcourroit un autre espace déterminé, en supposant que ce second tems & ce second espace doivent se compter depuis le commencement du mouvement.*

SOLUTION.

Puisque dans le mouvement uniformement accéléré les espaces sont entr'eux comme les quarrés des tems, il n'y a qu'à prendre un quatrième proportionnel aux deux espaces donnés, & au quarré du premier tems, & ce quatrième proportionnel fera le quarré du tems demandé; donc sa racine quarrée resoudra le Probleme.

Supposons qu'un corps A dans deux minutes parcoure un espace de 4 pieds, & qu'on demande dans combien de tems il auroit parcouru 25 pieds. Je fais le quarré du tems donné 2, lequel est 4, & je dis, comme l'espace quatre pieds est à l'espace 25, ainsi le quarré 4 est à un quatrième terme lequel est 25, donc 25 est le quarré du tems qu'on demande; tirant donc la racine quarrée 5, le corps A auroit employé cinq minutes à parcourir 25 pieds depuis le commencement du mouvement.

PROPOSITION XX.

68. *Connoissant un premier tems pendant lequel un corps grave parcourt d'un mouvement uniformement accéléré un espace déterminé, connoître dans quel tems le même corps parcourroit un autre espace déterminé, en supposant que ce second tems dût commencer immédiatement après le premier, & que le mouvement du corps fût une suite du premier mouvement.*

SOLUTION.

Ajoutez le premier espace au second, & dès-lors il est visible que le premier espace est à la somme du premier & du second,

comme le carré du premier tems est au carré de la somme du premier & du second tems ; donc la quatrième proportionnelle qu'on prendra au premier espace , a la somme des deux espaces , & au carré du premier tems sera le carré de la somme du premier & du second tems. Tirant donc la racine carrée , on aura la somme des deux tems , & retranchant de cette somme le premier tems , le reste sera le tems demandé.

Supposons que dans deux minutes le corps A parcoure 4 pieds , & qu'on demande dans combien de tems il devoit parcourir encore 21 pieds si son mouvement continuoit. Je fais le carré 4 du tems donné 2 , j'ajoute ensemble les espaces 4 & 21 , ce qui fait 25 , & je dis l'espace 4 est à la somme 25 des deux espaces comme le carré 4 du premier tems est à un quatrième terme 25 , lequel est le carré de la somme des deux tems ; donc la racine carrée 5 est la somme des deux tems , & par conséquent retranchant de 5 le premier tems 2 , le reste 3 me fait voir que le corps auroit employé trois minutes pour parcourir encore 21 pieds.

PROPOSITION XXI.

69. *Connoissant le tems pendant lequel un corps grave a parcouru d'un mouvement accéléré un espace déterminé , connoître les espaces parcourus dans chacune des parties du tems en supposant que le tems est divisé en parties égales.*

PREMIERE SOLUTION.

Lorsque le tems est divisé en parties égales , les espaces parcourus dans chacune de ses parties sont entr'eux comme les nombres 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , &c. (N. 59) ; supposant donc que le corps A ait parcouru 48 pieds dans 4 minutes , il est visible qu'il faut partager 48 en 4 parties, qui soient entr'elles comme les nombres 1 , 3 , 5 , 7 ; or pour cela je fais la somme 16 des nombres 1 , 3 , 5 , 7 , & je dis comme la somme 16 est à la première partie 1 qui la compose , ainsi la somme 48 est à un quatrième terme 3 , qui est l'espace parcouru dans la première minute ; je dis de même comme la somme 16 est à sa seconde partie 3 , ainsi la somme 48 est à un quatrième terme 9 , qui est l'espace parcouru dans la seconde minute ; & continuant le même raisonnement , je trouve que l'espace parcouru dans la troisième minute est 15 , & l'espace parcouru dans la quatrième est 21 ; donc l'espace parcouru

parcours dans la premiere minute est 3 , l'espace parcouru dans les deux premieres est 12 , l'espace parcouru dans les trois premieres est 27 , & l'espace parcouru dans les quatre minutes est 48.

AUTRE SOLUTION.

Je nomme l'espace inconnu parcouru dans la premiere minute $= x$, la premiere minute $= 1$, le tems total $= t$, & l'espace parcouru pendant ce tems $= a$; puisque les quarrés des tems sont comme les espaces parcourus , en comptant ces espaces depuis le commencement du mouvement , j'ai $t^2, 1 :: a, x$, donc $a = t^2 x$, & par conséquent $x = \frac{a}{t^2}$, ainsi l'espace parcouru dans la premiere minute est connu ; or les espaces parcourus dans des tems égaux & successifs sont entr'eux comme 1 , 3 , 5 , 7 , &c. donc ces espaces sont $x, 3x, 5x, 7x$, &c. & mettant au lieu de x sa valeur $\frac{a}{t^2}$ ces espaces sont $\frac{a}{t^2}, \frac{3a}{t^2}, \frac{5a}{t^2}, \frac{7a}{t^2}$, &c.

Soit $t = 4$ minutes , & $a = 48$ pieds , on aura $x = \frac{a}{t^2} = \frac{48}{16} = 3$ pour l'espace parcouru dans la premiere minute ; $\frac{3a}{t^2} = \frac{3 \times 48}{16} = 9$ pour l'espace parcouru pendant la seconde minute ; $\frac{5a}{t^2} = \frac{5 \times 48}{16} = 15$ pour l'espace parcouru pendant la troisième minute , & ainsi de suite.

PROPOSITION XXII.

70. Connoissant le tems du mouvement d'un corps grave & l'espace parcouru pendant une partie de ce tems , laquelle n'est pas au commencement du tems , trouver les espaces parcourus dans toutes les parties de ce tems.

PREMIERE SOLUTION.

Supposons que le tems total soit 4 minutes , & que le corps A pendant la troisième & quatrième minute ait parcouru 36 pieds ; Je dis si le corps A avoit parcouru 1 pied dans la premiere minute , dans la seconde il en auroit parcouru 3 , dans la troisième il en auroit parcouru 5 , & dans la quatrième il en auroit parcouru 7 , ainsi dans la troisième & la quatrième il en auroit par-

couru 12 ; mais il en a parcouru 36 au lieu de 12 , donc la supposition est fautive. Or quel que soit l'espace parcouru dans la première minute , il est sûr que la somme 36 des espaces parcourus dans la troisième & la quatrième doit être à l'espace parcouru dans la première , comme la somme 12 des espaces parcourus dans la troisième & quatrième minute , selon ma supposition , est à l'espace parcouru dans la première ; je dis donc comme 12 est à 1 , ainsi 36 est à un quatrième terme 3 qui est l'espace parcouru pendant la première minute.

Cet espace étant trouvé , je dis en supposant que l'espace parcouru dans la première minute soit 1 pied , l'espace parcouru dans la seconde doit être 3 , donc en supposant que l'espace parcouru dans la première minute soit 3 , cet espace doit être à celui qui est parcouru dans la seconde minute comme 1 à 3 , & par conséquent le 2^e. espace doit être 9 , & continuant le même raisonnement , je trouve que l'espace parcouru dans la troisième minute doit être 15 , & l'espace parcouru dans la quatrième doit être 21.

SECONDE SOLUTION.

Je nomme l'espace parcouru dans la première minute $= x$; & l'espace donné $= a = 36$, & je suppose que cet espace soit parcouru pendant la troisième & quatrième minute , l'espace parcouru dans la seconde minute sera donc $= 3x$, celui qui est parcouru dans la troisième sera $5x$, & celui qui est parcouru dans la quatrième sera $7x$, donc l'espace parcouru dans la troisième & quatrième sera $5x + 7x = 12x$, or cet espace est $= a$, donc $12x = a$, donc $x = \frac{a}{12} = \frac{36}{12} = 3$, & par conséquent l'espace parcouru dans la première minute est 3 , & mettant cette valeur de x dans $3x$, $5x$ & $7x$, nous aurons 9 , 15 & 21. pour les espaces parcourus dans les minutes suivantes.

On peut résoudre de la même façon bien des questions de cette nature , auxquelles je ne m'arrête pas , pour laisser aux Commencans le plaisir d'en trouver la solution.

PROPOSITION XXIII.

71. Supposons que la droite AF (Fig. 10.) représente la hauteur dont un corps grave descend vers le centre de la terre , que les droites AC , AD , AB , Af , représentent les espaces parcourus à la fin des

tems , à compter ces espaces toujours depuis le commencement du mouvement , je dis que si aux points C , D , B , F , on élève des perpendiculaires CE , DH , BG , FI , qui soient entr'elles comme les vitesses acquises à la fin des tems , la courbe qui passera par les points A , E , H , G , I , sera une parabole.

DEMONSTRATION.

Dans le mouvement uniformement accéléré , les vitesses acquises à la fin des tems sont entr'elles comme les tems , donc les droites CE , DH , BG , &c. qui représentent les vitesses , peuvent aussi représenter les tems , mais les espaces AC , AD , AB , sont entr'eux comme les quarrés des tems. Donc AC , AD :: \overline{CE} , \overline{DH} , & par conséquent la courbe AEHGI est une parabole , car on sçait que dans la parabole les abscisses sont comme les quarrés des ordonnées.

72. La courbe AEHGI s'appelle la *Courbe des tems* ou la *Courbe des vitesses*.

PROPOSITION XXIV.

73. Si un corps est mû d'un mouvement uniformement retardé ; les espaces parcourus dans des tems égaux sont entr'eux comme les nombres impairs 1 , 3 , 5 , 7 , &c. pris en retrogradant.

Premiere démonstration par la méthode des indivisibles.

Supposons que la droite AB (Fig. 11.) représente le tems du mouvement , & que ce tems soit partagé en une infinité d'instans AD , DE , EF , &c. soient à tous les points de division élevées des perpendiculaires qui représentent les vitesses de chaque instant , il est sûr que si la droite AC représente la vitesse au premier instant , & que les autres vitesses fussent égales à celle-ci , toutes ces vitesses seroient les élémens du rectangle ACBG ; or le mouvement étant supposé uniformement retardé , la vitesse AC perd à la fin de l'instant AD un degré , à la fin de l'instant DE elle en perd un autre , & ainsi de suite , & par conséquent les vitesses perdues à la fin des tems AD , AE , AF , AB , sont entr'elles comme les nombres 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , &c. c'est-à-dire , comme les élémens du triangle CBG , moitié du rectangle ACGB , donc les vitesses restantes sont entr'elles comme les élémens de l'autre triangle ACB.

Dij

Maintenant les instans AD, DE, EF, &c. pouvant être regardés comme indivisibles, les vitesses peuvent aussi être regardées comme uniformes chacune dans la durée de son instant; or dans le mouvement uniforme les espaces parcourus sont comme les vitesses; donc si la droite AC qui représente la vitesse du premier instant vient à représenter l'espace parcouru dans ce premier instant, les droites DL, EI, &c. qui représentent les vitesses des instans suivans, représentent aussi les espaces parcourus dans ces instans; donc les espaces parcourus dans la somme des instans du tems AB seront représentés par les élémens du triangle ABC, c'est-à-dire par le triangle ABC, les espaces parcourus par la somme des instans du tems AE seront représentés par la somme des élémens du trapezoïde AEIC, & ainsi des autres.

Supposant donc que le tems AB soit $= 4$ minutes, & partageant ce tems en quatre parties égales, chaque partie représentera une minute, & l'espace ADLC représentera l'espace parcouru dans la première minute, le trapezoïde DEIL représentera l'espace parcouru dans la seconde, & ainsi de suite: or supposant $AC = 4$ pieds, il est évident que $DL = 3$, $EI = 2$, & $FH = 1$; nommant donc x la hauteur de chaque trapezoïde & du triangle FHB, nous aurons $ADLC = 4 + 3 \times \frac{1}{2}x$; $DEIL = 3 + 2 \times \frac{1}{2}x$; $EFHI = 2 + 1 \times \frac{1}{2}x$; enfin $FBH = 1 \times \frac{1}{2}x$: or ces trapezoïdes & le triangle FBH ayant tous la hauteur commune, ils sont entr'eux comme leur autre dimension, donc ils sont comme $4 + 3$, $3 + 2$, $2 + 1$ & 1 , c'est-à-dire, comme 7, 5, 3, 1, & par conséquent les espaces parcourus dans des tems égaux & successifs, sont entr'eux comme les nombres impairs pris en retrogradant.

Autre démonstration, par la méthode des nouveaux calculs.

Que AB (Fig. 12.) représente le tems du mouvement, AP une partie de ce tems, & AC la vitesse au commencement du tems, tirant la droite BC, & PM parallèle à AC, on démontrera comme ci-devant que PM sera la vitesse à la fin du tems AP. Menons pm infiniment proche de PM, la droite Pp représentera un instant de tems, & la droite pm représentera la vitesse à la fin de cet instant, or la vitesse PM & la vitesse pm ne différant que d'un infiniment petit MR, peuvent être regardées comme égales; donc

la vitesse de l'instant Pp peut être regardée comme uniforme , mais dans le mouvement uniforme les espaces parcourus sont comme les tems multipliés par les vitesses (N. 17) , donc l'espace parcouru dans le tems Pp est comme $Pp \times pm$, ou comme le rectangle $PRmp$, ou comme le trapezoïde , $PMmp$ qui ne differe du rectangle que d'un infiniment petit.

Concevant donc que le tems AB soit divisé en une infinité d'instans égaux à Pp , & par les points de division menant des paralleles à AC , le triangle ABC sera rempli d'une infinité de trapezoïdes qui représenteront les espaces parcourus dans ces instans ; ainsi les espaces parcourus dans le tems AB seront représentés par le triangle ABC , les espaces parcourus pendant les instans qui composent le tems AP seront représentés par le trapezoïde $APMC$, & ainsi des autres.

Le reste de la demonstration s'achevera de même que dans la démonstration précédente.

COROLLAIRE.

74. *L'espace qu'un corps parcourt avec un mouvement uniformément retardé dans un tems déterminé , est la moitié de l'espace qu'il parcourroit dans le même tems avec un mouvement uniforme , & avec une vitesse égale à celle du premier instant.* Soit AB le tems (Fig. 11) , & AC la vitesse du premier instant , le triangle ABC représente l'espace parcouru avec un mouvement uniformément retardé , & le rectangle $ACGB$ représente l'espace que le corps parcourroit avec un mouvement uniforme , & avec la vitesse AC , mais le triangle ABC est la moitié du rectangle ; donc , &c.

REMARQUE.

75. Galilée est le premier qui ait trouvé que les corps graves descendent vers le centre de la terre avec un mouvement uniformément accéléré ; mais comme ses principes sont fondés sur des expériences qu'on ne peut faire qu'à une distance de la surface de la terre qui ne soit pas trop grande , il est sûr que sa loi d'accélération ne sauroit être certaine qu'à l'égard des simples Mécaniques où nous ne considérons que les mouvemens qui se passent autour de nous ; & que lorsqu'il s'agit d'une distance trop grande , comme dans l'Astronomie , il faut établir d'autres loix fondées sur d'autres principes qui s'accordent avec les Phe-

nomenes qu'on veut expliquer. C'est ce qui a été pratiqué par M. Newton & par la plupart des Astronomes modernes, on peut lire là-dessus leurs Ouvrages, & surtout l'excellent Traité de M. de Gamaches intitulé *Astronomie Physique*, &c. Cet illustre Académicien y traite les matieres les plus abstraites avec tant de clarté, d'ordre & de simplicité, qu'on ne doit point être surpris si tous les Savans lui ont donné un suffrage unanime. Je ne m'arrêterai point à rapporter les loix d'acceleration établies par les Astronomes, de peur de m'écarter de mon sujet, & je me contenterai de faire voir comment on peut resoudre certains Problemes généraux en établissant telle loi d'acceleration qu'on jugera à propos.

PROPOSITION XXV.

76. *Connoissant les tems pendant lesquels un corps se meut d'un mouvement acceléré, & le rapport que les vitesses acquises à la fin de ces tems ont avec ces mêmes tems, connoître les espaces parcourus.*

SOLUTION.

Supposons que la droite AB (Fig. 13.) représente le tems total du mouvement d'un corps, que AP représente une partie de ce tems, que BC représente la vitesse acquise à la fin du tems AB, & PM la vitesse acquise à la fin du tems AP, en sorte que la courbe AMC soit la courbe des vitesses. Il est sûr que si l'on divise le tems AB en une infinité de petites parties égales ou d'instans, & que des points de division on mene des paralleles à BC, ces paralleles représenteront les vitesses acquises à la fin de chacun de ces instans; or chacun de ces instans, par exemple, l'instant Pp pouvant être regardé comme indivisible, la vitesse PM & la vitesse pm ne différeront que d'un infiniment petit mR & pourront être censées égales, donc la vitesse de l'instant Pp peut être regardée comme uniforme pendant la durée de l'instant Pp; mais dans le mouvement uniforme les espaces sont comme le produit des vitesses par les tems, donc l'espace parcouru pendant le tems Pp est comme $Pp \times PM$, ou comme le rectangle PMRp, ou comme le trapezoïde PMmp; or l'espace ABC étant rempli de pareils trapezoïdes qui représentent les espaces parcourus pendant les instans qui composent le tems AB, il est évident que cet espace ABC représente l'espace parcouru pendant le tems AB, que l'espace APM représente l'espace parcouru pendant le

tems AP, & ainsi des autres ; d'où il suit que l'espace parcouru pendant le tems AP est à l'espace parcouru pendant le tems AB, comme APM est à ABC, &c. Cela posé,

Je nomme u la vitesse acquise à la fin du tems AP, V la vitesse acquise à la fin du tems AB, t le tems AP, & T le tems AB, donc $Pp = dt$, & $PpRM$, ou $PpmM = udt$; ainsi udt représente $PpmM$ qui est la différence de l'espace APM.

Pour trouver l'integrale de cette différence, il n'y a qu'à exprimer la vitesse u par le rapport qu'elle a avec le tems selon la loi d'acceleration qu'on veut établir, & substituant la valeur de u dans udt , on trouvera une expression dont on pourra trouver l'integrale.

Soit par exemple $u = t$, comme dans l'hypothèse de Galilée ou les vitesses acquises sont comme les tems. Donc $udt = tdt$, & tirant l'integrale, j'ai $\int udt = \frac{1}{2} tt$, c'est-à-dire l'espace APM est comme $\frac{1}{2} tt$ ou comme le quarré du tems AP ; donc l'espace APM est à l'espace ABC, comme tt est à TT , ou bien à cause de $u = t$, & de $V = T$, on aura APM, ABC :: ut , VT, c'est-à-dire,

Dans l'hypothèse de Galilée l'espace parcouru pendant le tems AP est à l'espace parcouru pendant le tems AB, comme le quarré tt du tems AP est au quarré TT du tems AB, ou en raison composée des vitesses u , V , & des tems t , T .

De même soit $u = t^n$, c'est-à-dire que les vitesses soient entr'elles comme telle puissance ou telle racine des tems que l'on voudra, en supposant que l'exposant n représente un nombre quelconque entier ou rompu. Je mets cette valeur de u dans udt & j'ai $udt = t^n dt$ & tirant l'integrale, j'ai $\int udt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$ pour l'espace APM ; donc l'espace ABC = $\frac{1}{n+1} T^{n+1}$, & l'espace APM est à l'espace ABC comme $\frac{1}{n+1} t^{n+1}$ est à $\frac{1}{n+1} T^{n+1}$, ou comme t^{n+1} est à T^{n+1} , & remettant au lieu de t^n & de T^n leurs valeurs u & V , nous aurons APM, ABC :: ut , VT, c'est-à-dire.

Si les vitesses sont entr'elles comme telle puissance ou telle racine qu'on voudra des tems, les espaces parcourus à la fin des tems sont en raison composée des vitesses & des tems.

L'on voit donc que quelque loi d'acceleration qu'on veuille

établir, les espaces sont en raison composée des vitesses & des tems.

COROLLAIRE I.

77. Si les vitesses sont entr'elles comme telle puissance ou telle racine des tems que l'on voudra exprimée par t^n , T^n , il n'y aura qu'à augmenter l'exposant n d'une unité, & les espaces parcourus seront comme t^{n+1} & T^{n+1} . Supposons par exemple, que les vitesses soient comme les quarrés des tems : si ces tems, à compter toujours depuis le commencement du mouvement, sont comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. les vitesses seront par conséquent comme 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. or les espaces étant en raison composée des tems & des vitesses, seront comme 1×1 , 2×4 , 3×9 , 4×16 , 5×25 , &c. ou comme 1, 8, 27, 64, 125, &c. c'est-à-dire comme les cubes des tems, ou comme les quarrés des tems multipliés par leur première puissance; or les quarrés ont pour exposant le nombre 2 représenté par n , & les premières puissances ont pour exposant 1, donc le produit des unes par les autres ont pour exposant $2 + 1$ ou $n + 1$, & par conséquent les espaces sont comme t^{n+1} , T^{n+1} , & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

78. Quelque loi d'accélération qu'on veuille établir si l'on connoît l'espace parcouru dans un tems, on pourra toujours connoître l'espace parcouru dans un autre tems. Car supposant que les vitesses soient comme les quarrés des tems, & qu'un Corps ayant parcouru deux pieds dans la première minute, on veuille sçavoir quel espace il doit parcourir dans les trois premières minutes. Je nomme t le premier tems qui est une minute, & par conséquent le second tems qui est trois minutes sera $3t$; donc les cubes des tems seront t^3 , $27t^3$, ou comme 1 à 27, donc 1, 27 :: 2, 54; & par conséquent le corps parcourroit dans trois minutes cinquante-quatre pieds.

De même, si le corps ayant parcouru deux pieds dans la première minute, on demandoit l'espace parcouru dans la 3^e. & quatrième minute, j'ajouterois ces deux minutes aux deux qui les precedent, ce qui feroit quatre minutes. Je prendrois les cubes 1 & 64 des tems 1 minute, 4 minutes, puis je dirois 1, 64 :: 2, 128; & 128 marqueroit le nombre des pieds parcourus dans les

les quatre premières minutes. Maintenant, comme il faut retrancher de ce nombre l'espace parcouru dans les deux premières minutes, je fais les cubes 1 & 8 des deux tems, 1 minute, 2 minutes, & je dis 1, 8 :: 2, 16; ainsi 16 marque l'espace parcouru dans deux minutes; retranchant donc cet espace de l'espace parcouru dans les quatre premières minutes, le reste 12 marque l'espace parcouru dans la troisième & quatrième minute. De même, si le Corps ayant parcouru depuis la fin de la seconde minute jusqu'à la fin de la troisième 38 pieds, on demandoit l'espace parcouru dans la première minute, je nommerois x l'espace parcouru dans les deux premières minutes; & par conséquent $38 + x$ seroit l'espace parcouru dans les trois minutes. Or l'espace parcouru dans trois minutes étant à l'espace parcouru dans deux comme le cube 27 de trois minutes est au cube 8 de deux minutes, j'ai $27. 8 :: 38 + x, x$. Donc en divisant, j'ai $27 - 8, 8 :: 38 + x - x, x$, ou $19, 8 :: 38, x$; & par conséquent $x = 16$ est l'espace parcouru dans deux minutes. Ajoutant donc cet espace à l'espace 38 parcouru dans la troisième minute, j'ai 54 pour l'espace parcouru dans les trois premières minutes. Or le cube 27 des trois premières minutes est au cube 1 de la première minute comme l'espace 54 parcouru dans les trois premières est à l'espace parcouru dans la première; donc $27, 1 :: 54, 2$, & par conséquent deux pieds est l'espace parcouru dans la première minute, & ainsi des autres.

PROPOSITION XXVI.

79. Un Corps étant mû d'un mouvement accéléré, & le rapport des vitesses aux espaces étant connu, connoître les tems.

SOLUTION.

Supposons que les droites AP, AB (Fig. 13.) représentent les tems inconnus t, T , que les droites PM, BC, représentent les vitesses u, V , acquises à la fin de ces tems, & les espaces APM, ABC, les espaces parcourus s, S ; je mène l'ordonnée pm infiniment proche de PM, & par conséquent $Pp = dt$, & $PM_{mp} = ds$, à cause que ce trapezoïde est la différence de l'espace $APM = s$; or les vitesses PM, pm ne différant que d'un infiniment petit; la vitesse u de l'instant Pp peut être regardée comme uniforme, & par conséquent le petit espace ds est comme la vitesse u multipli-

pliée par dt , donc $u dt = ds$, & $dt = \frac{ds}{u}$; donc $\int dt = \int \frac{ds}{u}$, c'est-à-dire l'intégrale de la différence Pp est comme l'intégrale de la différence $PMmp$ de l'espace s divisée par la vitesse PM .

Pour trouver cette intégrale, je cherche le rapport que les vitesses ont avec les espaces, selon la loi d'accélération proposée, & je trouve par là une valeur de u exprimée en s , & substituant cette valeur dans $\int \frac{ds}{u}$, je trouve une expression où il n'y a plus que s , & dont on peut par conséquent tirer l'intégrale, ainsi qu'on va voir.

Soit $u = \sqrt{s}$, c'est-à-dire que les vitesses soient comme les racines des espaces, ainsi que dans l'hypothèse de Galilée; je mets cette valeur de u dans $\int dt = \int \frac{ds}{u}$, ce qui donne $\int dt = \int \frac{ds}{\sqrt{s}} = \int ds \times s^{-\frac{1}{2}}$; ainsi j'ai $t = 2s^{\frac{1}{2}}$, donc $t, T :: 2s^{\frac{1}{2}}, 2S^{\frac{1}{2}}$, ou $t, T :: s^{\frac{1}{2}}, S^{\frac{1}{2}} :: \sqrt{s}, \sqrt{S}$, c'est-à-dire le tems AP est au tems AB comme la racine de l'espace s est à la racine de l'espace S . Donc.

Dans l'hypothèse de Galilée les tems sont entr'eux comme les racines carrées des espaces. Ce qui est effectivement vrai, puisque nous avons trouvé ci-dessus que les espaces étoient comme les carrés des tems.

Soit $u = s$, c'est-à-dire que les vitesses soient entr'elles comme les espaces; je mets cette valeur dans $\int dt = \int \frac{ds}{u}$, ce qui donne $\int dt = \int \frac{ds}{s}$, ou $t = \int \frac{ds}{s}$. Or pour trouver l'intégrale $\int \frac{ds}{s}$, je décris une hyperbole équilatère QRT (Fig. 14.) entre ses asymptotes AH, AB , & dont la puissance $RI = 1$; je prens sur l'asymptote AB les abscisses AP, AB , qui soient entr'elles comme les espaces s, S , & je mene les ordonnées PM, BT , par la propriété de cette courbe, j'ai $\overline{RI} = AP \times PM$; donc $PM = \frac{\overline{RI}}{AP}$ ou $PM = \frac{1}{s}$, je mene l'ordonnée pm infiniment proche de PM , ce qui donne $Pp = ds$, donc $PM \times Pp = PMmp = \frac{ds}{s}$, or l'espace hyperbolique $HAPMQ$, est l'intégrale de $PMmp$, donc $t = \int \frac{ds}{s} = HAPMQ$, on prouvera de la même façon que $T = HABTQ$, & par conséquent $t, T :: HAPMQ, HABTQ$, c'est-à-dire, que si les vitesses sont entr'elles comme les espaces par-

courus ; les tems sont comme des espaces hyperboliques ; dont les coupées AP, AB sont entr'elles comme les espaces parcourus.

Les espaces hyperboliques HAPMQ, HABTQ, sont les logarithmes des coupées AP, AB, ainsi que nous l'avons démontré dans la Calcul Différentiel & Integral sur la fin du troisième Livre, donc. *Si les vitesses sont entr'elles comme les espaces parcourus, les tems sont entr'eux comme les logarithmes des espaces ou des vitesses.*

Nous verrons plus bas que l'hypothèse qui suppose les vitesses proportionnelles aux espaces est impossible.

Soit $u = S^n$, c'est-à-dire que les vitesses soient entr'elles comme telle puissance ou telle racine que l'on voudra des espaces ; en supposant que n représente un nombre quelconque entier ou rompu ; je mets cette valeur de u dans $\int dt = \int \frac{ds}{u}$, & j'ai $\int dt = \int \frac{ds}{s^n} = \int ds \times s^{-n}$, & par conséquent $t = \frac{1}{1-n} s^{-n+1}$; donc $t, T :: \frac{1}{1-n} s^{-n+1}, \frac{1}{1-n} S^{-n+1} :: s^{-n+1}, S^{-n+1} :: \frac{s}{s^n}, \frac{S}{S^n}$, & mettant au lieu de s^n, S^n , la raison u, V , qui est la même, j'ai $t, T :: \frac{s}{u}, \frac{S}{V} :: sV, Su$, c'est-à-dire, *si les vitesses sont entr'elles comme telle puissance ou telle racine que l'on voudra des espaces les tems sont entr'eux en raison composée de la raison directe des espaces & de la raison reciproque des vitesses.*

Si l'exposant $n = 1$ l'hypothèse devient la même que la précédente, & nous en ferons voir l'impossibilité plus bas ; si l'exposant n est au-dessus de l'unité, l'hypothèse est encore impossible, & voici comme je le prouve.

Supposons $n = 2$, nous aurons $u, V :: s^2, S^2$; mettant donc au lieu de V, u la raison S^2, s^2 , dans l'analogie $t, T :: sV, Su$, nous aurons $t, T :: sS^2, Ss^2$. Or comme s est le petit espace, & S le grand espace, il est visible que sS^2 est plus grand que Ss^2 , car $sS^2 = sSS$ & $Ss^2 = Sss$, mais sSS est plus grand que Sss , donc sS^2 est plus grand que Ss^2 , & par conséquent t est plus grand que T , c'est-à-dire le tems t , pendant lequel le corps a parcouru le petit espace, est plus grand que le tems T , pendant lequel il a parcouru le grand, ce qui est impossible. Donc, &c.

Si $n = \frac{1}{2}$ l'hypothèse est la même que celle de Galilée, comme nous venons de voir, & si n est égal à un nombre rompu moindre que l'unité, l'hypothèse sera toujours possible, car supposant

$n = \frac{1}{3}$, donc $u, V :: s^{\frac{1}{3}}, S^{\frac{1}{3}}$, ainsi si les espaces s, S , sont par exemple 8 & 27, les vitesses u, V seront 2 & 3, & leur raison reciproque sera 3 & 2; faisant donc la raison composée de la raison directe des espaces, & de la reciproque des vitesses, nous aurons $3 \times S, 2 \times 27$, ou 24, 54, ainsi $t, T :: 24, 54$, c'est-à-dire le tems t est moindre que le tems T , de même que l'espace 24 parcouru pendant le tems t est moindre que l'espace 54 parcouru pendant le tems T , & de même des autres. Que si l'on veut une demonstration plus rigide de ceci, supposons $n = \frac{1}{3}$, donc $u, V :: s^{\frac{1}{3}}, S^{\frac{1}{3}}$; mettant donc la raison $s^{\frac{1}{3}}, S^{\frac{1}{3}}$ au lieu de u, V dans l'analogie $t, T :: sV, Su$, nous aurons $t, T :: sS^{\frac{1}{3}}, Ss^{\frac{1}{3}}$. Or $sS^{\frac{1}{3}} = s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}$, & $Ss^{\frac{1}{3}} = S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}$, donc $t, T :: s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}, S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}$; & divisant la seconde raison par $s^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}$, nous aurons $t, T :: s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}, S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}$. Or il est évident que $s^{\frac{1}{3}}s^{\frac{1}{3}}$ est moindre que $S^{\frac{1}{3}}S^{\frac{1}{3}}$, & par conséquent t est moindre que T , donc l'hypothèse est possible. On trouveroit la même chose, si au lieu de $n = \frac{1}{3}$ on supposoit $n = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{5}$, &c.

DEFINITION.

80. Soient AP, AB (Fig. 15.) deux différens tems, pendant lesquels un corps se meut d'un mouvement accéléré, selon telle loi d'accélération qu'on voudra; que PM représente la vitesse acquise à la fin du tems AP , & BC la vitesse acquise à la fin du tems AB , je mene pm infiniment proche de PM , & nommant $AP = t$, j'ai $Pp = dt$. Or la vitesse à la fin de Pp étant $pm = u$, son augmentation est $Rm = du$, car $pm = PM + Rm$. Cela posé, il est visible que l'augmentation s'acquiert successivement pendant l'instant Pp ; car si l'on conçoit que l'instant Pp soit divisé en une infinité d'autres instans infiniment petits par rapport à lui, & que des points n, q , &c. on mene les ordonnées no, qx , &c. qui représenteront les vitesses à la fin de ces petits instans l'augmentation de vitesse à la fin du petit instant Pn , sera zo , l'augmentation à la fin de l'instant nq sera hx , & ainsi de suite. Or la quantité du mouvement étant le produit de la masse du corps par la vitesse, il s'ensuit que la quantité du mouvement à la fin du tems AP , est le produit de la masse par PM , & la quantité du mouvement à la fin du tems Ap est le produit de la masse

par pm ou par $PM + Rm$. Donc l'augmentation de quantité pendant l'instant Pp , est le produit de la masse par Rm , & cette augmentation s'acquiert successivement pendant l'instant Pp , car à la fin du petit instant Pn , cette augmentation est le produit de la masse par zo , à la fin du petit instant nq , elle est le produit de la masse par hx , & ainsi de suite ; donc l'augmentation à la fin de l'instant Pp est composée d'une infinité de petites augmentations successives ; or ce sont ces petites augmentations de quantité acquises successivement pendant la durée d'un instant Pp , que nous nommerons *Sollicitation au Mouvement*, ou *Pesanteur*, lorsqu'il s'agira des corps graves.

COROLLAIRE.

81. Les petites augmentations de vitesse zo , hx , &c. qui composent l'augmentation totale Rm acquise pendant l'instant Pp , étant infiniment petites par rapport à Rm , ne diffèrent entr'elles que d'un infiniment petit du troisième genre, & peuvent par conséquent être regardées comme égales. Donc les augmentations de quantité de mouvement, qui composent l'augmentation totale acquise pendant la durée de l'instant Pp étant les produits de la masse par chacune de ces vitesses, peuvent être regardées comme égales. Nommant l'une de ces petites augmentations de quantité $= g$, la somme totale de ces augmentations pendant l'instant Pp sera gdt , car il est visible qu'il y aura autant de g qu'il se trouve de petits instans dans l'instant Pp .

PROPOSITION XXVII.

82. Connoissant la Loi d'accélération, connoître la sollicitation au mouvement.

SOLUTION.

Supposons que AP (Fig. 15.) représente le tems t , AB le tems T , PM la vitesse u , BC la vitesse V , Pp un instant dt , & Bb un instant dT , je nomme g la sollicitation au mouvement à la fin de AP , G la sollicitation à la fin de AB , & m la masse du corps qui est en mouvement.

L'augmentation de la quantité du mouvement à la fin de l'instant Pp sera gdt (N. 81.) & l'augmentation à la fin de l'instant Bb sera GdT . Or l'augmentation de la quantité du mouvement à la fin de l'instant Pp est mdu , c'est-à-dire, la masse multipliée par

l'augmentation de vitesse $mR = du$; donc $gdt = mdu$, & par la même raison $GdT = mdV$, ou $gdt, mdu :: GdT, mdV$; & par conséquent $g, \frac{mdu}{dt} :: G, \frac{mdV}{dT}$.

Si donc par la Loi connue d'accélération, je trouve la valeur de du & dV , en dt & dT , je trouverai les valeurs ou le rapport de g & G .

Soit $u, V :: t, T$, comme dans l'hypothèse de Galilée, donc $du, dV :: dt, dT$; mettant donc dans l'analogie trouvée la raison dt, dT , au lieu de son égale du, dV , j'ai $g, \frac{mdt}{dt} :: G, \frac{mdT}{dT}$, ce qui se réduit à $g, G :: m, m$; donc $g = G$.

Dans l'Hypothèse de Galilée, la sollicitation g est égale à la sollicitation G , c'est-à-dire, la sollicitation au mouvement est la même par-tout.

Soit $u, V :: t^n, T^n$, donc $du, dV :: nt^{n-1}dt, nT^{n-1}dT$, & mettant cette dernière raison au lieu de son égale du, dV dans l'analogie trouvée $g, G :: \frac{mdu}{dt}, \frac{mdV}{dT}$, j'ai $g, G :: \frac{nm t^{n-1} dt}{dt}, \frac{nm T^{n-1} dT}{dT} :: t^{n-1}, T^{n-1} :: \frac{t^n}{t}, \frac{T^n}{T} :: t^n T, T^n t$, & mettant au lieu de t^n, T^n la raison u, V , qui lui est égale, j'ai $g, G :: uT, Vt$; donc, &c.

Si les vitesses sont entr'elles comme des puissances ou des racines quelconques des tems, les sollicitations au mouvement sont en raison composée de la raison directe des vitesses & de la raison réciproque des tems.

Puisque nous avons trouvé $g, G :: t^n T, T^n t$; donc en divisant la seconde raison par tT , nous aurons $g, G :: t^{n-1}, T^{n-1}$, c'est-à-dire,

Si les vitesses sont entr'elles comme des puissances ou des racines quelconques des tems, les sollicitations au mouvement sont comme les tems élevés à l'exposant n diminué de l'unité.

Donc si $n = 2$, les sollicitations sont comme t^{2-1}, T^{2-1} ; c'est-à-dire, comme t, T , ou comme les tems. Si $n = 3$, les sollicitations sont comme t^{3-1}, T^{3-1} , c'est-à-dire, comme t^2, T^2 , ou comme les quarrés des tems. Si $n = 4$, les sollicitations sont t^{4-1}, T^{4-1} , ou comme t^3, T^3 , ou comme les cubes des tems, & ainsi de suite.

Or les mêmes sollicitations sont en raison composée de la raison directe des vitesses & de la réciproque des tems. Donc cette raison composée est égale à la raison des tems élevés à l'exposant n diminué de l'unité.

REMARQUE.

83. On peut remarquer en passant que ce que nous venons de dire nous fournit un Theorème, touchant les nombres ou les grandeurs en général qui merite quelque attention. Voici le Theorème.

Si deux nombres t , T , sont élevez à une puissance quelconque t^n , T^n , ou si on extrait une racine quelconque t^n , T^n , & qu'ensuite on vienne à multiplier ces puissances ou ces racines réciproquement par t , T , les produits $t^n T$, $T^n t$ sont entr'eux, comme les nombres t , T , élevez au même exposant n diminue de l'unité.

Ce Theorème se prouve de même que ci-dessus; car si l'on divise $t^n T$, $T^n t$ par $t T$, les quotients t^{n-1} , T^{n-1} , seront encore comme les dividendes $t^n T$, $T^n t$; donc $t^n T$, $T^n t :: t^{n-1}$, T^{n-1} .

Si $n=2$, on aura $t^2 T$, $T^2 t :: t$, T , c'est-à-dire, les quarez des deux nombres multipliez réciproquement par les nombres sont entr'eux comme ces nombres.

Si $n=3$, on aura $t^3 T$, $T^3 t :: t^2$, T^2 , ou les cubes des deux nombres multipliez réciproquement par ces nombres sont comme les quarez des mêmes nombres, & ainsi des autres.

Le Theorème est également vrai lorsque n est un nombre rompu, & que par conséquent t^n , T^n sont des racines des nombres t , T . Mais si on veut un Theorème particulier pour ce cas, le voici.

Si on prend les racines secondes, troisièmes, quatrièmes, &c. de deux nombres, & qu'on multiplie ces racines réciproquement par les nombres, les produits seront entr'eux comme des fractions dont les numérateurs seront toujours l'unité, & les dénominateurs seront des racines des nombres, lesquelles auront pour exposant $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c.

Soit $n=\frac{1}{2}$, donc on aura par le Theorème général $t^{\frac{1}{2}} T$, $T^{\frac{1}{2}} t :: t^{\frac{1}{2}-1}$, $T^{\frac{1}{2}-1} :: t^{-\frac{1}{2}}$, $T^{-\frac{1}{2}} :: \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}$.

Soit $n=\frac{1}{3}$, donc on aura $t^{\frac{1}{3}} T$, $T^{\frac{1}{3}} t :: t^{\frac{1}{3}-1}$, $T^{\frac{1}{3}-1} :: t^{-\frac{2}{3}}$, $T^{-\frac{2}{3}} :: \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{T^{\frac{2}{3}}}$.

Soit $n=\frac{1}{4}$, on aura $t^{\frac{1}{4}} T$, $T^{\frac{1}{4}} t :: t^{\frac{1}{4}-1}$, $T^{\frac{1}{4}-1} :: t^{-\frac{3}{4}}$, $T^{-\frac{3}{4}} :: \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$, $\frac{1}{T^{\frac{3}{4}}}$, & ainsi des autres.

Quoique ceci ne regarde pas le sujet que je traite, on ne sera pas fâché de cette petite digression.

PROPOSITION XXVIII.

84. Connoissant les espaces parcourus, & les sollicitations au mouvement, connoître les vitesses acquises à la fin de ces espaces, & les tems pendant lesquels ils ont été parcourus.

PREMIERE SOLUTION.

On peut résoudre ce Problème par le moyen du précédent ; car si les sollicitations sont égales, on connoitra aisément que les vitesses sont entr'elles comme les tems. Si les sollicitations sont comme les tems, on connoitra que les vitesses sont comme les quarrés des tems, &c. & ainsi des autres. Mais si l'on veut une solution générale, je vais la donner en cette sorte.

SECONDE SOLUTION.

Que les droites AP, AB, (Fig. 16.) représentent les espaces s , S , parcourus par un Corps, les droites PM, BC, les vitesses inconnues u , V , acquises à la fin de ces espaces, les droites PN, BQ, les sollicitations au mouvement g , G , aux points P, B, je mene l'ordonnée pm infiniment proche de PM, & bc infiniment proche de BC, donc $Pp = ds$, & $Bb = dS$. Je nomme m la masse du Corps qui se meut, & dt , dT , les instans de tems pendant lesquels le corps parcourt les espaces infiniment petits Pp , Bb .

Les vitesses PM, pm , ne différant entr'elles que d'un infiniment petit, peuvent être regardées comme égales, & par conséquent la vitesse de l'instant Pp peut être regardée comme uniforme ; or dans le mouvement uniforme les vitesses sont comme les espaces divisez par les tems (N. 23) ; donc j'ai $u, \frac{ds}{dt} :: V, \frac{dS}{dT}$, d'où je tire $u dt, ds :: V dT, dS$; & par conséquent $dt, \frac{ds}{u} :: dT, \frac{dS}{V}$, ou $dt, dT :: \frac{ds}{u}, \frac{dS}{V}$.

D'autre part, j'ai $g, \frac{mdu}{dt} :: G, \frac{mdV}{dT}$ (N. 82.) ; donc $g dt, mdu :: G dT, mdV$, & $dt, \frac{mdu}{g} :: dT, \frac{mdV}{G}$, ou $dt, dT :: \frac{mdu}{g}, \frac{mdV}{G}$; or nous venons de

GENERALÉ; LIVRE I.

41

de trouver dt , $dT :: \frac{ds}{u}$, $\frac{dS}{V}$, donc $\frac{mdu}{g}$, $\frac{mdV}{G}$, $\frac{ds}{u}$, $\frac{dS}{V}$, ou $\frac{mdu}{g}$, $\frac{mdV}{G}$, $\frac{ds}{u}$, $\frac{dS}{V}$; d'où je tire mdu , $gds :: mVdV$, GdS , ou gds , $GdS :: udu$, VdV ; tirant donc l'integrale j'ai $\int gds$, $\int GdS :: \frac{1}{2}u^2$, $\frac{1}{2}V^2 :: u^2$, V^2 ; or gds est le petit espace $PNnp$, qui est la différence de l'espace $ADNP$, ou de la somme des sollicitations au mouvement de A en P, & GdS est le petit espace $BQqb$, qui est la différence de l'espace $ADQB$, ou de la somme des sollicitations de A en B; donc

Les quarez des vitesses u , V , sont entr'eux comme la somme des sollicitations à la fin du premier espace est à la somme des sollicitations à la fin du second espace, & par conséquent les vitesses sont entr'elles comme les racines des sommes des sollicitations.

Soit par exemple g comme m , c'est-à-dire, que la sollicitation soit toujours la même partout comme dans l'hypothèse de Galilée, la somme des sollicitations en P sera AP multipliée par la sollicitation m , & la somme des sollicitations en B sera AB multipliée par la même sollicitation m ; donc ces deux sommes seront entr'elles comme les espaces; & par conséquent les vitesses u , V , seront comme les racines de ces espaces, ce qui s'accorde avec ce que nous avons déjà dit plus haut.

Supposons de même que les sollicitations soient comme les quarrés des espaces, si je divise AB en une infinité de parties égales, & que des points de division je mene des paralleles qui soient entr'elles comme les quarez des espaces 1, 2, 3, 4, 5, &c. c'est-à-dire, comme 1, 4, 9, 16, &c. ces paralleles seront les Elemens de l'espace $ADQB$, & représenteront en même tems les sollicitations à la fin de chaque espace. Or les Elemens de l'espace $ADPN$ étant comme les quarrés des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. à l'infini, cet espace est le tiers du rectangle $AP \times PN$, par les regles de l'Arithmétique des Infinis que nous avons expliquées dans la *Mesure des Surfaces & des Solides*, &c. & par la même raison l'espace $ADQB$ est le tiers du rectangle $AB \times BQ$; donc les quarez des vitesses PM , BC , sont comme les rectangles $AP \times PM$, $AB \times BQ$; & par conséquent les vitesses sont entr'elles comme les racines de ces rectangles, & ainsi des autres.

On peut m'objecter 1°. que selon les regles de l'Arithmétique des Infinis, les suites 1, 2, 3, 4, &c. 1, 4, 9, 16, &c. doivent commencer par zero & non pas par l'unité, mais cela n'y fait rien; car l'unité étant infiniment petite par rapport au dernier

terme peut être regardée comme n'étant rien.

En second lieu, on peut dire que si les Elemens de l'espace ADNP sont comme les quarrés des nombres 1, 2, 3, 4, &c. cet espace doit donc être un complement de demi-Parabole, & que par conséquent le point D devrait être le même que le point A; mais à cela je réponds que le point D doit être séparé du point A, parce qu'au commencement du premier espace ou au commencement du mouvement, le corps qui doit se mouvoir a une sollicitation au mouvement ou une pesanteur exprimée par AD, & qu'ainsi l'on peut regarder l'espace ADNP comme un complement de Parabole qui auroit été tronqué au sommet à une distance infiniment proche de ce sommet, ce qui ne sçauroit empêcher que le complement ne soit le tiers du rectangle AP × PN.

Or pour être convaincu que le corps qui doit se mouvoir vers le centre de la terre a une sollicitation ou pesanteur, il n'y a qu'à faire attention que si on veut l'élever il résiste, ce qui ne sçauroit provenir que parce qu'il y a une force qui le sollicite à une direction opposée, laquelle force est la cause de sa pesanteur.

Maintenant pour trouver les tems correspondans à chaque espace s, S, j'ai d'une part $u, V :: \frac{ds}{dt}, \frac{dS}{dT}$; ainsi qu'on a vû en cherchant les vitesses, & de l'autre $\int g ds, \int G dS :: u^2, V^2$; donc $\sqrt{\int g ds}, \sqrt{\int G dS} :: u, V$; & par conséquent $\frac{ds}{dt}, \frac{dS}{dT} :: \sqrt{\int g ds}, \sqrt{\int G dS}$, ou $\frac{ds}{dt}, \sqrt{\int g ds} :: \frac{dS}{dT}, \sqrt{\int G dS}$, d'où je tire $ds, dt \sqrt{\int g ds} :: dS, dT \sqrt{\int G dS}$, ou enfin $dt, \frac{ds}{\sqrt{\int g ds}} :: dT, \frac{dS}{\sqrt{\int G dS}}$; donc tirant l'intégrale, j'ai $t, T :: \int ds \frac{1}{\sqrt{\int g ds}}, \int dS \frac{1}{\sqrt{\int G dS}}$.

Or $\int g ds, \int G dS$ representent les sommes des sollicitations en P, & en B, c'est-à-dire les espaces ADNP, ADQB, lesquels sont connus, puisque les sollicitations sont connues, ainsi divisant l'unité par chacun de ces espaces, & faisant PH, BR qui soient entr'eux comme les quotients, j'ai $PH, BR :: \frac{1}{\sqrt{\int g ds}}, \frac{1}{\sqrt{\int G dS}}$ & multipliant PH par $Pp = ds$, & BR par $Bb = dS$, j'ai $PH \times Pp, BR \times Bb :: ds \frac{1}{\sqrt{\int g ds}}, dS \frac{1}{\sqrt{\int G dS}}$; & divisant l'espace AB en parties infiniment petites, & faisant la même chose à tous les points de division, j'ai la courbe RHX. Or $PH \times Pp$, est la différence de

l'espace APHXY, & BR × Bb, est la différence de l'espace ABRXY ; donc APHXY, ABRXY :: $\int ds \frac{1}{\sqrt{gds}}$, $\int dS \frac{1}{\sqrt{GdS}}$:: t , T, c'est-à-dire, que les tems t , T, sont comme les espaces APHXY, ABRXY.

Pour trouver les valeurs de ces espaces, je mets au lieu de g , G , leur rapport 1, 1, dans l'hypothèse de Galilée, ou leur rapport à s , S , dans les autres hypothèses, & je tire ensuite l'intégrale, ainsi qu'on va voir:

Si g , G :: m , m , j'ai t , T :: $\int ds \frac{1}{\sqrt{gds}}$, $\int dS \frac{1}{\sqrt{GdS}}$:: $\int ds \frac{1}{\sqrt{s}}$, $\int dS \times \frac{1}{\sqrt{S}}$:: $\int ds \times s^{-\frac{1}{2}}$, $\int dS \times S^{-\frac{1}{2}}$:: $2s^{\frac{1}{2}}$, $2S^{\frac{1}{2}}$:: $s^{\frac{1}{2}}$, $S^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire, les tems t , T, sont comme les racines des espaces PA, AB.

Si g , G :: s^2 , S^2 , j'ai t , T :: $\int ds \frac{1}{\sqrt{s^2 ds}}$, $\int dS \frac{1}{\sqrt{S^2 dS}}$:: $\int ds \frac{1}{\sqrt{s^3}}$, $\int dS \frac{1}{\sqrt{S^3}}$:: $\int \frac{ds \times s^{-3}}{\sqrt{s}}$, $\int \frac{dS \times S^{-3}}{\sqrt{S}}$:: $\int ds \times s^{-3}$, $\int dS \times S^{-3}$:: $-\frac{1}{2}s^{-2}$, $-\frac{1}{2}S^{-2}$:: s^{-2} , S^{-2} :: $\frac{1}{s^2}$, $\frac{1}{S^2}$, c'est-à-dire les tems t , T, sont entr'eux comme des fractions dont les numerateurs sont l'unité & les dénominateurs sont les quarrés des espaces, & en général si g , G :: s^n , S^n , on trouvera t , T :: $\frac{1}{s^n}$, $\frac{1}{S^n}$.

Or delà, il est aisé de voir que les sollicitations g , G , ne scauroient être en raison d'une puissance, ou d'une racine quelconque des espaces ; car il est visible que $\frac{1}{s^2}$, est plus grand que $\frac{1}{S^2}$, & par conséquent si cette supposition avoit lieu, il s'en suivroit que t , seroit plus grand que T, ce qui est impossible.

COROLLAIRE I.

85. La courbe des tems RHX est une hyperbole du second genre dans l'hypothèse de Galilée, & les droites AB, AY, sont ses asymptotes.

Nous avons fait ci-dessus PH, BR :: $\frac{1}{\sqrt{gds}}$, $\frac{1}{\sqrt{GdS}}$:: \sqrt{gds} , \sqrt{GdS} ; or nous avons trouvé u , V :: \sqrt{gds} , \sqrt{GdS} . Donc PH, BR sont en raison réciproque des vitesses PM, BC, c'est-à-dire, les ordonnées de la courbe RHX, sont réciproques aux ordonnées de la courbe AMC. Or la courbe AMC est une parabole quarrée, parce que les vitesses PM, BC sont entr'elles comme

les racines des espaces AP, AB, donc les ordonnées de la courbe RHX sont réciproques aux ordonnées d'une parabole ; & par conséquent elles sont aussi réciproques aux racines quatrièmes des espaces AP, AB, c'est-à-dire PH, BR :: $\overline{AB}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{AP}^{\frac{1}{2}}$; ainsi élevant tout au carré, nous aurons \overline{PH}^2 , \overline{BR}^2 :: AB, AP ; donc $\overline{PH}^2 \times AP = \overline{BR}^2 \times AB$. Faisant donc un cube $a^3 = \overline{PH}^2 \times AP$, ce cube sera égal au carré de chaque ordonnée de la courbe RHX multiplié par son abscisse, c'est pourquoi nommant l'ordonnée PH = y, l'abscisse AP = x, nous aurons $y^2 x = a^3$, ou bien $y^2 x = 1$, en faisant $a = 1$, & cette équation sera l'équation de la courbe RHX ; or l'équation $y^2 x = 1$ est à une hyperbole du second genre entre les asymptotes dont la puissance = 1, donc la courbe RHX est une hyperbole du second genre.

COROLLAIRE II.

86. Nous avons trouvé ci-dessus que les tems t , T, dans l'hypothèse de Galilée sont comme $s^{\frac{1}{2}}$, $S^{\frac{1}{2}}$, ou comme $\overline{AP}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{AB}^{\frac{1}{2}}$. Donc les espaces hyperboliques APHXY, ABRXY de l'hyperbole du second genre RHX, sont entr'eux comme les racines quatrièmes de leurs abscisses AP, AB, & cette propriété de cette hyperbole peut se démontrer directement en cette sorte.

Je nomme toujours AP = s, AB = S, & à cause que nous avons trouvé PH, BR :: V, u, je nomme PH = V, BR = u, & la puissance de l'hyperbole = 1. Donc PHhp = Vds, & c'est la différence de l'espace APHXY ; or l'équation de cette hyperbole est $V^2 s = 1$, donc $V^2 = \frac{1}{s} = s^{-1}$, & $V = s^{-\frac{1}{2}}$; mettant donc cette valeur de V dans la différence Vds, nous aurons $s^{-\frac{1}{2}} ds$, & tirant l'intégrale, nous aurons $APHXY = 2s^{-\frac{1}{2}+1}$, & mettant V au lieu de $s^{-\frac{1}{2}}$ qui lui est égal, nous aurons $APHXY = 2Vs$, on trouvera de la même façon que $ABRXY = 2uS$, donc $APHXY$, $ABRXY$:: $2Vs$, $2uS$; mais V , u :: $S^{\frac{1}{2}}$, $s^{\frac{1}{2}}$, mettant donc cette dernière raison au lieu de V, u, dans la dernière analogie, nous aurons $APHXY$, $ABRXY$:: $2S^{\frac{1}{2}}s$, $2s^{\frac{1}{2}}S$:: $S^{\frac{1}{2}}s$, $s^{\frac{1}{2}}S$:: $S^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}$, $s^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}$, & divisant la dernière raison par $S^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}$, nous aurons enfin $APHXY$, $ABRXY$:: $s^{\frac{1}{2}}$, $S^{\frac{1}{2}}$, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE III.

87. Si la loi d'accélération est telle que les vitesses acquises à la fin des espaces soient entr'elles comme les espaces, c'est-à-dire que $u, V :: s, S$, l'hypothèse est impossible. Par le Probleme présent nous avons $gds, Gds :: udu, VdV$, mettant donc au lieu de udu, VdV , la raison sds, SdS qui lui est égale, par la supposition, nous aurons $gds, GdS :: sds, SdS$, ou $gds, sds :: GdS, SdS$; donc $g, s :: G, S$, c'est-à-dire la sollicitation au mouvement est comme l'espace. Or au commencement du mouvement l'espace est nul ou $= 0$, donc alors g est comme zero, c'est-à-dire au commencement du mouvement le corps n'a point de pesanteur, ce qui est absurde, & par conséquent l'hypothèse est impossible.

COROLLAIRE IV.

88. Dans les autres hypothèses la pesanteur au commencement du mouvement est comme 1, ou comme la masse.

Par le Probleme présent nous avons $gds, udu :: GdS, VdV$, donc gds est comme udu ; ainsi si nous prenons l'hypothèse de Galilée nous aurons u comme t , donc du comme dt , & par conséquent gds est comme udt , ou $\frac{gds}{dt}$ est comme u ; mais nous avons trouvé dans ce même présent Probleme u comme $\frac{ds}{dt}$, donc gu est comme u , & par conséquent divisant par u , nous aurons g , est comme 1, ou comme m .

Si nous prenons l'hypothèse qui fait u comme t^n , nous aurons du comme $nt^{n-1}dt$, donc gds étant comme udu , sera comme $nut^{n-1}dt$, & $\frac{gds}{dt}$ comme nut^{n-1} , ou $\frac{nut^n}{t}$; mais $\frac{ds}{dt}$ est comme n , donc gu comme $\frac{nut^n}{t}$ ou g comme $\frac{nt^n}{t}$; or au commencement du mouvement $t = 0$ donc $\frac{nt^n}{t} = \frac{0}{0} = 1$, ainsi g est comme 1, ou comme la masse.

REMARQUE.

89. J'avois résolu de ne point parler de la loi d'accélération que M. de Newton & la plupart des Astronomes ont établie.

parce que cela regarde plutôt l'Astronomie que la Méchanique ordinaire ; mais afin qu'on ne soit point obligé de l'aller chercher ailleurs , j'en vais faire un précis en peu de mots.

Soit O (Fig. 17.) le centre où le corps A tend le long de la droite AO , les droites AP , AB , deux espaces s, S , les droites PM , BC , les vitesses acquises u, V , les droites PN , BQ , les sollicitations au mouvement g, G , & les espaces APHXY , ABRXY , les tems t, T .

Selon M. de Newton & les Astronomes , les vitesses u, V , sont comme les racines quarrées des espaces AP , AB , divisées par les racines quarrées des espaces restans PO , BO.

Nommant donc $AO = a$ nous aurons $PO = AO - AP = a - s$ & $BO = AO - AB = a - S$, donc $u, V :: \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{a-s}}, \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{a-S}}$
 $:: \frac{s^{\frac{1}{2}}}{a-s^{\frac{1}{2}}}, \frac{S^{\frac{1}{2}}}{a-S^{\frac{1}{2}}} :: s^{\frac{1}{2}} \times a - s^{-\frac{1}{2}}, S^{\frac{1}{2}} \times a - S^{-\frac{1}{2}}$

Pour avoir le rapport des tems selon cette loi , nous avons trouvé ci-dessus (N. 79.) $\int dt, \int dT :: \int \frac{ds}{u}, \int \frac{dS}{V}$ ou $t, T :: \int \frac{ds}{u}, \int \frac{dS}{V}$;

mettant donc au lieu de u, V la raison $s^{\frac{1}{2}} \times a - s^{-\frac{1}{2}}, S^{\frac{1}{2}} \times a - S^{-\frac{1}{2}}$, nous aurons $t, T :: \int \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}} \times a - s^{-\frac{1}{2}}}, \int \frac{dS}{S^{\frac{1}{2}} \times a - S^{-\frac{1}{2}}}$

$:: \int s^{-\frac{1}{2}} ds \times a - s^{\frac{1}{2}}, \int S^{-\frac{1}{2}} dS \times a - S^{\frac{1}{2}}$, ainsi on n'aura qu'à tirer les integrales indiquées dans les termes du second membre selon les regles du Calcul Integral , & l'on aura le rapport des tems ; mais comme ces integrales ne peuvent s'exprimer que par des suites infinies , qui ne donnent que des approximations , on n'aura aussi le rapport des tems que par approximation.

Pour connoître la sollicitation au mouvement , nous avons trouvé (N. 82.) $g, G :: \frac{mdu}{ds}, \frac{m dV}{dT} :: \frac{du}{ds}, \frac{dV}{dT}$; mettant donc au lieu

de du, dV , les différences des vitesses qui sont $\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}}ds \times a - s^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}}ds \times a - s^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}S^{-\frac{1}{2}}dS \times a - S^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}S^{\frac{1}{2}}dS \times a - S^{-\frac{1}{2}}$ & les différences des tems qui sont $s^{-\frac{1}{2}}ds \times a - s^{\frac{1}{2}}, S^{-\frac{1}{2}}dS \times a - S^{\frac{1}{2}}$, nous aurons $g, G :: \frac{s^{-\frac{1}{2}}ds \times a - s^{\frac{1}{2}} + s^{\frac{1}{2}}ds \times a - s^{-\frac{1}{2}}}{2s^{-\frac{1}{2}}ds \times a - s^{\frac{1}{2}}}, \frac{S^{-\frac{1}{2}}dS \times a - S^{\frac{1}{2}} + S^{\frac{1}{2}}dS \times a - S^{-\frac{1}{2}}}{2S^{-\frac{1}{2}}dS \times a - S^{\frac{1}{2}}}$;

$$\frac{s^{-\frac{1}{2}} dS \times a - S^{-\frac{1}{2}} + S^{\frac{1}{2}} a S \times a - S^{-\frac{1}{2}}}{2S^{-\frac{1}{2}} a S \times a - S^{-\frac{1}{2}}} :: \frac{1}{a-s} + s \times \frac{1}{a-s^2},$$

$$\frac{a-S^{-1} + S \times a - S^{-2}}{a-s^2} :: \frac{1}{a-s} + \frac{s}{a-s^2}, \frac{1}{a-s} + \frac{s}{a-s^2} ::$$

$$\frac{a-s+s}{a-s^2}, \frac{a-S+S}{a-S^2} :: \frac{a}{a-s^2}, \frac{a}{a-S^2}.$$

Au commencement du mouvement on a $s=0$, donc effaçant s , dans $\frac{a}{a-s^2}$, qui est le rapport de g , nous aurons g comme $\frac{a}{a^2}$ ou g comme a , c'est-à-dire la pesanteur du corps au point A est comme a , ou plutôt comme m ; car en général nous avons gds comme udu (N. 84.) dont g comme $\frac{udu}{ds}$, mais au point A on a $udu=0$, & $ds=0$, donc $\frac{udu}{ds} = 0 = 1$, & par conséquent g est comme m .

Quand le corps arrive en O, on a $s=a$, donc $a-s=0$, & par conséquent g est alors comme $\frac{a}{0}$, c'est à-dire la sollicitation au mouvement au point O, est infiniment grande; ainsi si par le point O on mene une ordonnée OI, cette ordonnée sera l'asymptote de la courbe DNQZ des sollicitations.

Puisque u est comme $\frac{V'}{\sqrt{1-s}}$, & qu'au point O nous avons $a-s=0$, donc en ce point la vitesse est comme $\frac{V'}{0}$, c'est-à-dire qu'elle est infinie, & par conséquent l'ordonnée OI est aussi l'asymptote de la courbe AMCL des vitesses.

Nous avons trouvé dans le present Probleme (N. 84.) PH, BR :: $\frac{1}{\sqrt{fGds}}$, $\frac{1}{\sqrt{fGdS}}$:: $fGdS$, $fGds$:: & u , V :: $fGds$, $fGdS$; donc PN est à BR, reciproquement comme V à u , ou comme BC, PM, mais PM est moindre que BC, donc BR est aussi moindre que PH, & par conséquent les ordonnées de la courbe ORHX vont en augmentant du côté de A. Or chacune de ces ordonnées étant comme $\frac{1}{\sqrt{fGds}}$, & au commencement du mouvement ayant $s=0$, on a aussi $ds=0$, donc l'ordonnée AY est comme $\frac{a}{0}$, c'est-à-dire infinie, & par conséquent elle est l'asymptote de la courbe des tems ORHX.

Pour trouver la nature de la courbe des sollicitations DNQZ, je conçois que l'espace AO soit divisé en une infinité de petites parties égales, & que des points de division soient menées des ordonnées qui représenteront les sollicitations à la fin de chaque espace, ainsi PN étant comme $\frac{a}{a-s}$, les ordonnées de la courbe seront entr'elles comme les $\frac{a}{a-s}$ qui leur correspondent.

Or si nous faisons $a-s$, $\sqrt{a} : \sqrt{a}, x$, nous aurons $\frac{a}{a-s} = x = g$, c'est-à-dire que les sollicitations sont troisièmes proportionnelles aux $a-s$ & aux \sqrt{a} . Cela posé.

Je décris un complément de parabole AOa, (Fig. 18.) dont la tangente au sommet O soit l'espace total AO, & dont la hauteur Aa soit égale à AO, & la tangente AO étant conçue, divisée en parties infiniment petites AB, BC, CD, &c. les ordonnées étant menées, il est sûr par la propriété de cette parabole, que les ordonnées aA, bB, cC, &c. seront comme les quarrés des abscisses AO, BO, CO, &c. or puisque les AB, AC, AD, &c. sont les s, les OA, OB, OC, &c. seront les $a-s$, donc les ordonnées aA, bB, cC, &c. seront comme les $a-s$.

Je conçois un quarré A1O élevé sur AO, & perpendiculaire au plan du complément de parabole AOa, les ordonnées B2, C3, &c. de ce quarré étant égales seront comme les a, donc leurs racines seront comme les \sqrt{a} , & par conséquent elles seront aussi égales entr'elles; ainsi les \sqrt{a} étant entr'elles comme les a, les ordonnées A1, B2, C3, &c. peuvent représenter les \sqrt{a} .

Je prens des troisièmes proportionnelles aux élémens du complément de parabole & à ceux du quarré, c'est-à-dire je fais $\frac{a}{a-s}$, $\sqrt{a} : \sqrt{a}, x$, & j'ai $x = g = \frac{a}{a-s}$, ainsi les troisièmes proportionnelles AE, BF, CG, &c. sont entr'elles comme les g.

Or par la construction j'ai $bB \times BF = \overline{B_2^2}$ & $cC \times CG = \overline{C_3^2}$, & il est visible que $\overline{B_2^2} = \overline{C_3^2}$, donc $bB \times BF = cC \times CG$, & par conséquent $BF, CG : cC, bB$, c'est-à-dire les ordonnées de la courbe EFGY sont reciproques aux ordonnées du demi complément; mais par la propriété du complément nous avons cC
bB

$OB :: \overline{CO}^2, \overline{BO}^2$, donc $BF, CG :: \overline{CO}^2, \overline{BO}^2$, & par conséquent $BF \times \overline{BO}^2 = CG \times \overline{CO}^2 = EA \times \overline{AO}^2$; mais il est évident que $EA \times \overline{AO}^2 = \overline{AI}^3 = \overline{AO}^3$, donc $BF \times \overline{BO}^2 = CG \times \overline{CO}^2 = \overline{AI}^3$; ainsi nommant les $g=y$, & les abscisses $a-s=x$, nous aurons $yx^2 = a^3$ qui est l'équation d'une hyperbole du second genre. Donc la courbe EFGY des sollicitations est une hyperbole du second genre.

Et pour mieux faire voir que l'équation $yx^2 = a^3$ représente la courbe des sollicitations, supposons $a=1$, & mettons au lieu de x^2 la valeur $\overline{a-s}^2$, nous aurons $y \times \overline{a-s}^2 = 1$; donc $y=g = \frac{1}{1-s^2}$, & c'est précisément la valeur de g que nous avons trouvée, c'est-à-dire $\frac{a}{a-s^2} = \frac{1}{1-s^2}$.

Pour décrire la courbe des vitesses, c'est-à-dire la courbe dont les ordonnées sont $y = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{a-s}}$, je décris une demi-parabole AOa (Fig. 19.), dont le sommet est au point O de l'espace AO, & dont la base Aa=AO, les abscisses OD, OC, OB, &c. seront par conséquent les $a-s$, & les ordonnées Dd, Cc, &c. seront les $\sqrt{a-s}$ par la propriété de la parabole. Je conçois une parabole du troisième genre AOH, qui a son sommet en A & qui est élevée perpendiculairement sur le plan de la parabole AOa. Les quatrièmes puissances des ordonnées B₁, C₂, &c. seront comme les abscisses AB, AC, &c. & par conséquent comme les s ; donc ces mêmes ordonnées seront les $\sqrt[4]{s}$, ou comme les $s^{\frac{1}{4}}$; je prens des troisièmes proportionnelles aux ordonnées $\sqrt{a-s}$ de la parabole AOa & aux ordonnées $s^{\frac{1}{4}}$ de AOH, c'est-à-dire, je fais $\overline{a-s}^{\frac{1}{2}}, s^{\frac{1}{4}} :: s^{\frac{1}{4}}, y$, & j'ai $y = \frac{s^{\frac{1}{4}}}{\overline{a-s}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{a-s}} = u$, donc la courbe AY est la courbe demandée.

La courbe ORHX des tems (Fig. 17.) se trouve en prenant les ordonnées PH, BR reciproques aux ordonnées BC, PM de la courbe AMCL des vitesses.

De tout ce que nous venons de dire touchant la loi d'accélération de Mr de Newton, il s'ensuit 1°. Que la vitesse & la sollicitation au mouvement étant infinies, l'espace AO, doit aussi

être infini. 2°. Que si deux corps d'inégale masse tombent en même tems du point A, ils parcourront dans le même tems des espaces égaux ; car supposant que le premier que je nomme A, soit au second que je nomme B, comme 1 à 2 ; je coupe le premier en deux parties égales que je nommerai F, G, ainsi la partie F aura la même pesanteur que le corps A, car les masses F, A, étant égales, il n'y a pas de raison de pouvoir dire que l'une ait plus de pesanteur que l'autre. Donc puisque l'une & l'autre ne se meuvent que par l'effet de leurs pesanteurs, la partie F parcourra l'espace AP dans le même tems que le Corps A parcourra le même espace. Par la même raison la partie G parcourra aussi le même espace dans le même tems ; & par conséquent les deux parties F, G, prises ensemble, c'est-à-dire le corps B, parcourront le même espace AP. Nommant donc t le tems que le corps A employe à parcourir l'espace AP, T celui qu'il employe à parcourir l'espace AB, z le tems employé par le corps B à parcourir AP, & Z celui qui est employé par le même corps à parcourir AB, nous aurons d'une part $t, T :: \int s^{-\frac{1}{2}} ds \times a - s^{\frac{1}{2}}, \int S^{-\frac{1}{2}} dS \times a - S^{\frac{1}{2}},$ & de l'autre $z, Z :: \int s^{-\frac{1}{2}} ds \times a - s^{\frac{1}{2}}, \int S^{-\frac{1}{2}} dS \times a - S^{\frac{1}{2}};$ donc $t, T :: z, Z,$ mais nous venons de voir que $t = z,$ donc $T = Z,$ c'est-à-dire, les tems employez par le corps A à parcourir les espaces AP, AB, sont égaux aux tems employez par le corps B à parcourir les mêmes espaces. 3°. Que les vitesses acquises par le corps A à la fin des espaces AP, AB, sont égales aux vitesses acquises par le corps B à la fin de ces mêmes espaces ; car les espaces étant les mêmes de part & d'autre, & les tems employez à les parcourir étant aussi égaux, les vitesses sont aussi nécessairement égales. 4°. Que les sollicitations au mouvement, c'est-à-dire, les pesanteurs des deux corps sont entr'elles comme leurs masses m, M ; car la sollicitation au mouvement du premier corps est comme $\frac{mdu}{ds}$ (N. 82.) & celle du second est comme $\frac{Mdu}{ds},$ à cause que la loi d'accélération est la même ; or le rapport $\frac{du}{ds}$ est le même de part & d'autre, à cause qu'à la fin des mêmes espaces, les vitesses & les tems du corps A sont égaux aux vitesses & aux tems du corps B, donc $\frac{mdu}{ds}, \frac{Mdu}{ds} :: m, M.$

Il est aisé de voir que les trois dernières conséquences sont communes à toutes les loix d'accélération.

II. REMARQUE.

90. Pour mieux faire entendre aux Commençans ce que nous venons de dire dans les Problèmes précédens, je vais rapporter une autre loi d'accélération.

Supposons donc qu'un corps A (Fig. 20.) tombe librement du point A vers le centre O, & qu'à la fin de chaque espace AP, AB, les sollicitations soient comme les distances PO, BO, nommant AO = a, AP = s, AB = S, nous aurons g, G :: a — s, A — S.

Maintenant pour trouver les vitesses u, V, nous avons $fgds$, $fGdS$:: $\frac{1}{2}u^2$, $\frac{1}{2}V^2$:: u^2 , V^2 (N. 84.) ; mettant donc au lieu de g, G, le rapport a — s, a — S, nous aurons $fds \times a - s$, $fSdS \times a - S$:: $\frac{1}{2}u^2$, $\frac{1}{2}V^2$, & par conséquent $fads - fsds$, $fadS - fSdS$:: $\frac{1}{2}u^2$, $\frac{1}{2}V^2$; donc $as - \frac{1}{2}s^2$, $aS - \frac{1}{2}S^2$:: $\frac{1}{2}u^2$, $\frac{1}{2}V^2$, ou $2as - s^2$, $2aS - S^2$:: u^2 , V^2 ; donc $\sqrt{2as - s^2}$, $\sqrt{2aS - S^2}$:: u, V.

Je décris du centre O & de l'intervalle OA un quart de cercle AMCL, & des points P, B, menant les ordonnées PM, BC, je dis que les vitesses u, V, sont entr'elles comme ces ordonnées ; car le diamètre du cercle étant double de AO sera = 2a, & le diamètre moins l'abscisse AP = s sera 2a — s, or par la propriété du cercle, j'ai $\overline{PM}^2 = 2a - s \times s = 2as - s^2$; donc $PM = \sqrt{2as - s^2}$, par la même raison $BC = \sqrt{2aS - S^2}$, donc PM, BC :: $\sqrt{2as - s^2}$, $\sqrt{2aS - S^2}$:: u, V, donc

Si les sollicitations à la fin des espaces sont entr'elles comme les distances au centre, & qu'on décrive un quart de cercle qui ait pour rayon la distance totale, les vitesses acquises à la fin des espaces seront comme les sinus tirés des extrémités des espaces.

Pour trouver les tems t, T, nous avons trouvé t, T :: $\int \frac{ds}{u}$, $\int \frac{dS}{V}$ (N. 79.) mettant donc au lieu de u, V, la raison $\sqrt{2as - s^2}$, $\sqrt{2aS - S^2}$, nous aurons t, T :: $\int \frac{ds}{\sqrt{2as - s^2}}$, $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS - S^2}}$.

Du point M je tire le rayon MO, & la tangente MY, je mene l'ordonnée pm infiniment proche de PM, & MR parallele à AO ; j'ai donc Pp = MR = ds, les triangles rectangles MRm,

MPO sont semblables ; car les angles POM, PMO pris ensemble valent un angle droit, & sont par conséquent égaux à l'angle OMM ; donc si d'une part j'ôte l'angle POM, & de l'autre l'angle OMR égal à son alterne POM, il reste RMm = PMO ; donc PM, MO :: MR, Mm, ou $\sqrt{2as - s^2}$, $a :: ds, \frac{ads}{\sqrt{2as - s^2}} = Mm$; mais le petit arc de cercle compris entre PM & pm étant infiniment petit peut être regardé comme égal à Mm, qui est infiniment petit ; donc Mm est la différence de l'arc AM, & par conséquent son integrale $\int \frac{ads}{\sqrt{2as - s^2}}$, ou $af \frac{ds}{\sqrt{2as - s^2}}$ est la valeur de l'arc AM ; par la même raison l'arc AC est $af \frac{dS}{\sqrt{2aS - S^2}}$; donc

AM, AC :: $af \frac{ds}{\sqrt{2as - s^2}}, af \frac{dS}{\sqrt{2aS - S^2}} :: \int \frac{ds}{\sqrt{2as - s^2}}, \int \frac{dS}{\sqrt{2aS - S^2}} :: t, T$; donc les temps t, T , sont entr'eux comme les arcs de cercle AM, AC.

Puisque les sollicitations sont comme les distances OB, OP, OA, il est visible que si l'on décrit un triangle rectangle OAG, les ordonnées BQ, PN, AG, représenteront les sollicitations au mouvement.

La sollicitation au mouvement au centre O sera donc comme zero, & au commencement du mouvement, elle sera comme a ; car alors $s=0$, & par conséquent $g=a-s$, est $g=a-0=a$, ou pour mieux dire g est comme m ; car en general nous avons gds comme mdu (N. 84.) donc g comme $\frac{mdu}{ds}$; mais la vitesse & l'espace étant nuls au point A, nous avons $udu=0$, & $ds=0$; donc $\frac{udu}{ds} = \frac{0}{0} = 1$, & par conséquent g est comme m .

Si m est comme a , la courbe des vitesses sera le quart de circonférence AML, mais si m est comme une grandeur b moindre ou plus grande que a , cette courbe se changera en Ellipse ainsi que nous allons voir.

Soit $AG=m=b$, nous avons AO, PO :: AG, PN ; donc $a, a-s :: b, \frac{ab-b^2}{a} = PN = g$. Or nous avons en général $\frac{1}{2}u^2$, comme $\int gds$ (N. 84.) mettant donc $\frac{ab-b^2}{a}$ au lieu de g , nous aurons $\frac{1}{2}u^2$, comme $\int \frac{a's - b^2}{a}$, ou comme $\frac{a's - \frac{1}{2}s^2}{a}$, ou comme $bs - \frac{bs^2}{2a}$, & multipliant par 2, puis par $2a$, nous aurons $2au^2$, comme $4abs - 2bs^2$.

Je prens un diametre double de AO, & avec un parametre double de AG, je decris un quart d'Ellipse AHI, & je dis que les ordonnées PH, BK, feront comme les vitesses u ; car l'axe ou le double de AO fera $= 2a$, le double de AO moins l'abscisse AP fera $2a - s$; or par la propriété de la courbe, on a $\overline{HP}^2, 2as - s \times s :: 2b, 2a$; donc $2a \times \overline{HP}^2 = 4abs - 2bs^2$, par la même raison on aura $2a\overline{BK}^2 = 4abS - 2bS^2$; ainsi nous aurons $2a\overline{HP}^2, 2a\overline{BK}^2 :: 4abs - 2bs^2, 4abS - 2bS^2$; mais nous venons de trouver $2au^2, 2aV^2 :: 4abs - 2bs^2, 4abS - 2bS^2$; donc $2a\overline{HP}^2, 2a\overline{BK}^2 :: 2au^2, 2aV^2$; d'où l'on tire $HP, BK :: u, V$.

COROLLAIRE IV.

91. Par la presente Proposition nous avons gds comme udu (N. 84.) ou $gds = udu$; or tirant la droite MB perpendiculaire en M à la courbe des vitesses (Fig. 16.) & menant Mr parallele à Pp, & mMT tangente en M, les triangles rectangles Mrm, PMB sont semblables; car l'angle BMm étant droit, vaut les deux angles PBM, PMB pris ensemble, ôtant donc d'une part PBM & de l'autre BMr égal à son alterne PBM, il reste l'angle aigu PMB égal à l'angle aigu rMm; donc Mr, rm, PM, PB, ou $ds, du :: u, \frac{udu}{ds} = PB$; or nous avons $gds = udu$; donc $g = \frac{udu}{ds}$, & par conséquent $g = PB$, c'est-à-dire,

Quelle loi d'accélération qu'on veuille établir, la sollicitation au mouvement est toujours égale à la sous-perpendiculaire de la courbe des vitesses.

CHAPITRE IV.

Du Centre de Gravité des Figures & des Corps.

DEFINITIONS.

92. **D**eux corps sont dits être en équilibre, lorsqu'ils s'empêchent mutuellement de se mouvoir, ou lorsqu'ils s'entretiennent l'un & l'autre dans le repos.

Soient, par exemple, les deux corps A, B, (Fig. 21.) attachés aux extrémités d'un Levier horifontal AB suspendu par le point C,

Gij

si le corps A empêche le corps B de descendre par sa propre pesanteur, & que le corps B empêche aussi le corps A de descendre, il est visible qu'il n'y aura point de mouvement, & que les deux corps seront en équilibre.

Si au lieu de l'un des corps A on met une puissance qui tire vers O, & que cette puissance empêchant le corps B de descendre, le corps B l'empêche aussi d'aller vers O, la puissance & le corps B seront en équilibre.

Si deux Corps A, B, (Fig. 22.) poussés l'un de C vers A, l'autre de D vers B, venant à se rencontrer ne peuvent se faire changer de direction ni l'un ni l'autre, il resteront en repos, supposé qu'il n'y ait point d'élasticité, & par conséquent ils seront en équilibre.

Ce que nous venons de dire de deux corps doit aussi s'entendre des parties d'un même corps. Par exemple, si le corps AD (Fig. 23.) est coupé en deux parties en EF, en sorte que la partie AF empêche la partie ED de se mouvoir, & la partie ED empêche le mouvement de AF, les deux parties AF, ED, du corps AD seront en équilibre.

93. Le *Centre de gravité* est le point autour duquel toutes les parties d'une grandeur sont en équilibre.

Le centre de gravité étant empêché de descendre vers le centre de la terre, les corps ou les parties d'un corps qui sont en équilibre ne se meuvent donc point; par conséquent on peut considérer les pesanteurs de plusieurs corps ou des parties d'un corps comme réunies au centre de gravité.

94. L'*axe* ou le *diamètre* de gravité est une ligne droite dans laquelle se trouve le centre de gravité.

Donc si une grandeur a plusieurs diamètres de gravité, le centre de gravité doit se trouver dans l'intersection de ces diamètres.

95. Le *plan* de gravité est un plan dans lequel se trouve le centre de gravité ou le diamètre de gravité.

Donc l'intersection de deux plans de gravité est un diamètre de gravité.

96. On dit qu'un corps est *homogene* lorsque toutes ses parties de volume égal ont une pesanteur égale, & qu'il est *hétérogene* lorsque ses parties d'égal volume n'ont pas une égale pesanteur.

97. Le *centre de grandeur* est l'endroit qui divise une grandeur dans deux parties égales.

Dans les corps homogenes le centre de grandeur est le même que le centre de gravité, puisqu'il se trouve alors autant de pesanteur d'un côté que de l'autre.

AXIOME.

98. *Les effets sont proportionnels à leurs causes*, car si une telle cause est capable de produire un tel effet, il est évident qu'il faut une cause double ou triple pour produire un effet double ou triple.

PROPOSITION XXIX.

99. *Si deux ou plusieurs corps de différentes masses qui sont en repos viennent à tomber librement d'un point A (Fig. 16.) ils parcourront des espaces égaux dans des tems égaux.*

DEMONSTRATION.

J'ai démontré ceci (N. 89.) en parlant de la loi d'accélération de M. Newton, & j'ai dit qu'il étoit facile de le démontrer à l'égard de toutes les autres loix. En effet, prenons la loi de Galilée, & supposons que le premier corps que je nomme A soit au second que je nomme B, comme 1 à 2 ; je partage B en deux parties égales que je nommerai F, G ; ainsi F aura la même pesanteur que A, car les masses A, F, étant égales, il n'y a pas de raison de pouvoir dire que l'une aye plus de pesanteur que l'autre ; donc F décrira l'espace AP dans le même tems que A décrira cet espace ; par la même raison G décrira aussi l'espace AP dans le même tems ; donc les deux parties ensemble F, G, c'est-à-dire, le corps B décrira dans le même tems l'espace AP. Ainsi nommant t le tems que le corps A emploie à parcourir l'espace AP, T celui qu'il emploie à parcourir l'espace AB, z le tems employé par le corps B à parcourir AP, & Z le tems employé par le même corps à parcourir AB, nous aurons d'une part $t, T :: \sqrt{s}, \sqrt{S}$, & de l'autre $z, Z :: \sqrt{s}, \sqrt{S}$. Donc $t, T :: z, Z$, mais nous venons de trouver $t = z$; donc $T = Z$, c'est-à-dire, les tems employez par le corps A à parcourir les espaces AP, AB, sont égaux aux tems employez par le corps B à parcourir les mêmes espaces, & on prouvera la même chose en supposant toute autre loy d'accélération.

Nota. 1°. Que nous supposons que le milieu à travers duquel les corps descendent n'ait point de résistance, c'est pour-

quoi si les expériences ne s'accordent pas tout-à-fait avec ce que nous venons de dire, cela vient de la résistance de l'air.

Nota. 2°. Qu'un Auteur celebre par le profond Sçavoir qui regne dans ses Ecrits a démontré cette Proposition d'une manière insuffisante à laquelle il est bon de faire attention pour éviter certains parallogismes dans lesquels les Sçavans mêmes peuvent tomber quelquefois. Voici sa démonstration.

» Quand le Corps A, dit-il, aura parcouru l'espace AP, le tems
 » qu'il aura employé sera comme \sqrt{s} , & quand le corps B aura
 » parcouru le même espace AP, le tems qu'il aura employé sera
 » aussi comme \sqrt{s} . Donc le tems employé par A sera au tems
 » employé par B, comme \sqrt{s} à \sqrt{s} ; & par conséquent ces tems
 » seront égaux.

Or je dis que cette Démonstration n'est qu'un parallogisme; car par la Démonstration que je viens de donner, nous avons trouvé $t, T :: z, Z$, & comme nous avons $t, T :: \sqrt{s}, \sqrt{S}$; si nous supposons $\sqrt{s} = 1$, & $\sqrt{S} = 2$, nous aurons $t, T :: 1, 2$, & $z, Z :: 1, 2$; mais il ne s'ensuit pas delà que si $t = 1$ minute, & $T = 2$ minutes, z doive être $= 1$ minute, & $Z = 2$ minutes. Car pourvû que z, Z , soient deux nombres dont le rapport soit égal au rapport $1, 2$, j'aurai toujours $z, Z :: 1, 2 :: t, T$; par exemple, supposant $z = 3$, & $Z = 6$, j'aurai $z, Z :: 3, 6 :: 1, 2 :: t, T$; donc tout ce qu'on peut tirer de ceci, c'est que les tems t, T , étant proportionnels à \sqrt{s}, \sqrt{S} , & les tems z, Z , étant aussi proportionnels à \sqrt{s}, \sqrt{S} , les tems t, T , sont proportionnels à z, Z , mais je n'en sçauois conclure que les tems t, T , sont égaux aux tems z, Z ; & pour pouvoir raisonner ainsi, il faut que je recoure à un autre principe, qui est celui que j'ai employé dans ma Démonstration, à sçavoir que les pesanteurs des corps A, B, sont toujours proportionnelles à leurs masses; car ce principe posé, il est visible que si une pesanteur comme 1 fait parcourir à une masse comme 1, un espace comme 1 dans un certain tems; une pesanteur comme 2 fera parcourir à une masse comme 2 le même espace comme 1 dans le même tems, attendu que la pesanteur 1 ne donne pas plus de vitesse à la masse 1, que la pesanteur 2 à la masse 2 dans le même tems.

D'où l'on voit que si l'on avoit deux forces différentes des pesanteurs des corps A, B, & qui ne fussent point proportionnelles aux masses, & que ces deux forces vinssent à pousser les corps A, B, en sorte que leur mouvement s'accélérait selon la loi de Galilée,

Galilée, l'espace parcouru par le corps A au premier instant pourroit n'être pas égal à l'espace parcouru par le corps B dans le même instant, quoique les espaces parcourus par le corps A à la fin des tems 1, 2, 3, 4, &c. fussent entr'eux comme les quarrés 1, 4, 9, 16, &c. & que les espaces parcourus par le corps B à la fin des mêmes tems fussent aussi comme 1, 4, 9, 16, &c. Quand nous disons donc que dans toute loi d'accélération deux corps inégaux qui passent du repos au mouvement, parcourent dans des tems égaux des espaces égaux, c'est que nous supposons que les forces motrices de ces corps ne sont autre chose que leurs pesanteurs, lesquelles sont toujours proportionnelles aux masses, &c.

COROLLAIRE.

100. Les vitesses acquises à la fin des espaces égaux par divers corps qui étant en repos, viennent à tomber librement sont égales; car quelque loi d'accélération qu'on veuille établir, les tems employés par le corps A à parcourir les espaces AP, AB étant égaux aux tems employez par le corps B à parcourir les mêmes espaces, il est visible que les vitesses du corps A à la fin de ces espaces seront égales aux vitesses du corps B.

PROPOSITION XXX.

101. *Les forces des corps sont en raison composée de la raison des masses & de celle des vitesses.*

DEMONSTRATION.

Supposons que le corps A (Fig. 24.) parcoure l'espace AB dans le même tems que le corps D d'inégale masse parcourt l'espace DE, la quantité de mouvement du corps A sera mu , c'est-à-dire, le produit de la masse par la vitesse (N. 10.) & la quantité de mouvement du corps D sera par la même raison MV ; or les forces étant les causes des quantités de mouvement sont proportionnelles à ces quantités (N. 98.); donc la force du corps A est à celle du corps D comme mu est à MV , & par conséquent ces forces sont entr'elles en raison composée des masses & des vitesses.

COROLLAIRE I.

102. Si les masses sont égales & les vitesses inégales, les forces
H

sont comme les vitesses, car les forces étant comme mu , MV , & par la supposition m étant égale à M , on a mu , $MV :: u$, V , & par conséquent les forces sont comme u , V .

COROLLAIRE II.

103. Quand les masses sont inégales & les vitesses égales, on a mu , $MV :: m$, M , & par conséquent les forces sont comme les masses; ainsi les forces ne sont alors autre chose que les pesanteurs, & le mouvement est accéléré, ou retardé.

COROLLAIRE III.

104. Quand les masses sont égales & les vitesses aussi, on a $mu = MV$; donc les forces sont aussi égales.

COROLLAIRE IV.

105. Quand les masses étant inégales, & les vitesses inégales, les quantités de mouvement se trouvent égales, les forces sont aussi égales, car on a $mu = MV$, & en ce cas les masses sont réciproques aux vitesses; car puisque $mu = MV$, donc m , $M :: V$, u .

REMARQUE.

En forme de Dissertation touchant les Forces vives.

106. Il y a des Auteurs modernes qui prétendent que la Proposition que nous venons de démontrer, n'est vraie qu'à l'égard des Forces mortes, telles que seroit la Force d'un corps suspendu, & non pas à l'égard des Forces vives, telle qu'est la Force d'un corps qui est actuellement dans un mouvement accéléré, qui dure depuis un tems déterminé; car dans ce second cas, disent-ils, les forces sont entr'elles en raison composée de la raison des masses, & de la raison des quarrés des vitesses. Or voici comment ils prétendent le démontrer.

Supposons, disent ces Geomètres, que les corps A , B , (*Fig. 25.*) étant suspendus auparavant, viennent à être lâchés, & tombent librement, en sorte que le premier parcourt l'espace AC , & le second l'espace BD ; ces corps étant arrivés en C & D auront acquis des forces capables de les faire remonter aux mêmes hauteurs CA , DB (ce qui sera démontré plus bas *N. 211.*) les Forces en A & B seront donc des Forces mortes; & si nous supposons que les corps A & B étant parvenus en C & D , remon-

rent en A & B, leurs Forces seront des Forces vives; mais ces forces en C & D seront en raison composée des masses, $A=M, B=m$, & des hauteurs CA, DB, parce que chacune de ces hauteurs consume totalement la Force du corps qui la parcourt, donc les Forces vives seront $M \times CA, m \times DB$, mais dans l'hypothèse de Galilée les espaces AC, DB sont comme les quarrés des vitesses acquises V, u en C & D. Mettant donc V^2, u^2 au lieu de CA, DB, les Forces vives seront entr'elles comme MV^2, mu^2 , c'est-à-dire en raison composée de la raison des masses, & de la raison des quarrés des vitesses, & si l'on suppose les masses égales, les Forces vives seront comme les quarrés des vitesses.

Telle est la prétendue démonstration de ces Auteurs, mais il est aisé de voir que leur hypothèse roule sur une supposition différente de la notre. Selon nous les tems employés par les corps à parcourir leurs espaces, sont égaux entr'eux, au lieu que selon les Défenseurs des Forces vives, les tems sont toujours inégaux, & c'est à quoi ils auroient dû faire un peu plus d'attention; pour en être convaincu, il n'y a qu'à observer que les corps A, B, étant supposés descendre librement doivent parcourir des espaces égaux dans des tems égaux; car selon l'hypothèse de Galilée, que tout le monde adopte, deux corps qui commencent à descendre parcourent dans les mêmes tems des espaces égaux quoique leurs masses soient inégales, (comme il a été démontré ci-dessus Proposition 29. N. 99); or les espaces AC, BD sont inégaux, donc les tems employés à les parcourir sont aussi inégaux. Ainsi pour rentrer dans notre hypothèse, il faut nécessairement diviser les produits MV^2, mu^2 par les tems T, t, ou ce qui revient au même par les vitesses V, u, qui sont dans la même raison que les tems selon les loix du mouvement uniformément accéléré ou retardé, & dès-lors nous aurons pour l'expression des Forces agissantes non plus MV^2, mu^2 , mais MV, mu , ce qui fait voir que les Forces agissantes sont entr'elles dans la raison composée des masses & des vitesses, de même que les Forces mortes, & non pas dans la raison des masses & des quarrés des vitesses.

Il est vrai que la Force du corps A ne pouvant être éteinte par la pesanteur qu'à la fin d'un tems plus grand que celui à la fin duquel la force du corps B est entièrement consumée, il semble d'abord que cette différence des tems doit entrer dans la considération des forces des deux corps; mais pour peu qu'on y fasse

attention, on découvrira aisément que cette différence ne vient point de ce que ces Forces sont dans un rapport différent de celui de leurs vitesses, mais seulement de ce que les vitesses que la pesanteur ôte à chacune d'elles dans un même tems, étant égales entr'elles, ne sont point proportionnelles aux Forces primitives, d'où il suit que la force du corps A, qui a perdu moins à proportion que la force du corps B dans un tems égal, doit nécessairement durer d'avantage.

Pour mettre ceci dans tout son jour, supposons que le premier corps soit descendu pendant deux tems égaux BF, FE, (*Fig. 11.*) & ait parcouru l'espace BIE, & que le second corps pendant le premier tems BF ait parcouru l'espace BFH; selon l'hypothèse de Galilée, les vitesses de ces deux corps seront comme les tems BE, FB, ou comme 2 à 1. Or si ces corps en remontant ne trouvoient point la pesanteur sur leurs pas, le premier parcourroit dans deux tems EF, FB égaux aux deux tems de sa descente, l'espace BEIM double de BIE qu'il a parcouru en descendant (*N. 211.*), & le second corps pendant un tems FB égal au tems de sa descente parcourroit l'espace FHOB double de l'espace FHB parcouru dans sa chute; ainsi le premier corps dans le tems EF ne parcourroit que l'espace EINF, qui n'est que la moitié de l'espace EIMB qu'il parcourroit dans un tems double, & par conséquent les deux corps parcourroient dans un tems égal des espaces EINF, FHBO qui seroient comme leurs vitesses, c'est-à-dire comme 2, 1; mais les masses multipliées par les espaces parcourus dans des tems égaux, sont la mesure des Forces; donc les Forces agissantes des deux corps, considérées dans des tems égaux, seroient comme 2 à 1, ou comme les masses multipliées par les vitesses dans le cas où les masses sont inégales, si la pesanteur n'agissoit pas sur eux.

Voyons donc ce que fait cette pesanteur; elle ôte au premier tems un degré de vitesse au premier corps, & dans le même tems elle en ôte aussi un degré au second, & de-là il arrive que le second, à qui la pesanteur ôte tout ce qu'il avoit de vitesse, perd toute sa force; & que le premier, à qui la pesanteur n'ôte que la moitié de sa vitesse, ne perd que la moitié de sa force, laquelle par conséquent dure d'avantage, non pas parce qu'elle est avec la force du second dans un rapport différent du rapport 2, 1 des vitesses, mais uniquement parce qu'on lui ôte moins à proportion, dans un tems qu'on n'ôte

égard à tout ce qui entre dans la composition du mouvement, je veux dire au tems, à la masse, & à l'espace; mais si l'on nous disoit que les Forces mortes, ou d'autres Forces qui seroient dans le rapport des Forces mortes, sont en raison composée des masses & des espaces qu'elles tendent à faire parcourir ou qu'elles font parcourir, la proposition pourroit être vraie ou fautive, & son énoncé seroit vîeux. Elle seroit vraie si les espaces étoient parcourus dans des tems égaux, parce qu'alors les vitesses seroient comme les espaces, mais elle seroit fautive si les tems étoient inégaux, parce qu'en ce cas les espaces ne seroient pas dans la raison des vitesses; & le défaut du raisonnement ne pourroit être imputé qu'à la négligence qu'on auroit eue de ne point faire attention au tems, lequel doit toujours être considéré lorsqu'il s'agit du mouvement.

Les Défenseurs des Forces vives disent, que ce n'est qu'après que le mouvement des corps a duré pendant un tems, à la vérité petit, mais fini & déterminé, que les Forces des corps sont en raison composée des masses & des quarrés des vitesses; ainsi supposons qu'un corps qui commence à se mouvoir parcoure dans un instant un petit espace, & qu'un autre corps égal en masse au premier parcoure un espace égal à celui que le premier a parcouru, mais dans deux instans, les Forces de ces corps n'étant point encore des Forces vives, seroient comme les forces mortes. Or on voit bien que si on disoit que ces deux forces sont en raison composée des masses & des espaces, on auroit tort, puisque la vitesse du premier seroit double de la vitesse du second, à cause qu'il auroit parcouru son espace dans un seul instant, au lieu que l'autre ne l'auroit parcouru que dans deux. Donc, &c.

Nous avons démontré, ajoute-t-on, que les Forces vives sont entières en raison composée des masses & des quarrés des vitesses. On l'auroit démontré si l'on avoit prouvé qu'on doit prendre pour leur mesures les produits des masses par les hauteurs, lesquelles sont comme les quarrés des vitesses dans les mouvemens accélérés ou retardés; mais comme nous avons fait voir que cette façon de mesurer les forces n'étoit pas legitime, non-seulement à cause que l'on néglige la différence des tems, mais encore parce que cette différence ne provient que de ce que les vitesses que le moment retardé ôte aux Forces dans un même tems, ne sont pas proportionnelles à ces forces, ce qui ne change rien à la

nature des Forces en elle-même ; il s'ensuit qu'on croit vainement avoir démontré que les Forces agissantes sont en raison composée , &c.

Donc , conclut-on , nous avons démontré que les Forces vives ne sont pas comme les Forces mortes. Cette conséquence est absolument fautive , puisque le principe sur lequel elle s'appuie n'a nulle apparence de vérité.

M. de Leibnits fut le premier qui imagina la distinction des Forces mortes & des Forces vives , & malgré le mauvais accueil que les Savans de France & d'Angleterre firent à ce sentiment , M. Jean Bernouilli dans la suite ne craignit pas de l'embrasser. Cet illustre Geomètre convint que la preuve que M. de Leibnits tiroit du mouvement retardé ne lui paroissoit pas assez convaincante ; mais il en apporta d'autres qu'il regarda comme autant de démonstrations que personne à l'avenir ne pourroit plus contester. On les trouve dans son Discours sur les Loix du Mouvement , imprimé à Paris en 1727 , chez Jombert Libraire rue S. Jacques. Depuis ce tems-là Messieurs Volf, Poleni, Bulfinger, Gravesande , Muschembroc & quelques autres se sont attachés à appuyer le même sentiment , non-seulement sur des raisons géométriques, mais encore sur des expériences très-capables d'obscurcir la vérité si l'on n'y faisoit attention. Quoi qu'en fait de Mathématiques les seules démonstrations aient force de loix ; il y a cependant bien des personnes sur qui le nom de quelques Auteurs célèbres fait de grandes impressions , surtout lorsqu'on néglige de répondre aux raisonnemens dont ces Auteurs appuient leurs idées. Pour prévenir ce mauvais effet , je vais rapporter dans toute leur étendue les deux preuves dont M. Bernouilli se sert comme de deux boucliers impénétrables à la plus severe critique , & j'espère d'en faire voir le foible d'une manière si évidente , qu'on n'aura plus lieu de suspendre son jugement entre les deux partis. Le premier de ces argumens demande quelques principes préliminaires que je vais établir , afin que le Lecteur ne trouve rien qui puisse l'arrêter.

Si un corps ABC (*Fig. 26.*) se trouvant comprimé par une ou plusieurs puissances , ou par une cause quelconque , a dans soi-même une force de se remettre dans l'état où il étoit avant la compression , après qu'il aura consumé ou repoussé par sa résistance les Forces qui le comprimoient , ce corps se nomme corps *elastique* , corps à *ressort* , ou simplement *ressort*.

Un ressort ABC qui est tenu dans un état de compression par une ou plusieurs puissances, est en équilibre avec ces puissances. Si les puissances A, C, étoient plus foibles que le ressort, elles seroient forcées de céder à la force du ressort, & si elles étoient plus fortes le ressort cederoit, & se trouveroit dans un état de compression plus grand.

Si un ressort ABC est tenu dans un état de compression par deux puissances, ces puissances sont égales entr'elles. Si la puissance A pressoit plus fortement que la puissance C, la force du ressort se porteroit sur la puissance plus foible C, & l'obligeroit de céder jusqu'à ce que les deux puissances pussent se trouver en équilibre.

Si un ressort ABC étant tenu dans un état de compression par deux puissances A, C, on substitue à la place de l'une des puissances C un plan immobile EF, la puissance A ne fera pas plus d'effort qu'elle en faisoit auparavant. La résistance du plan EF ne presse pas davantage la jambe CB que la puissance C ne la pressoit; car ce plan ne fait autre chose que d'empêcher la jambe CB de s'écarter de la jambe AB; or la force A étoit en équilibre avec la force C, donc elle doit être en équilibre avec la résistance du plan EF.

Si deux puissances A, B, (Fig. 27.) tiennent plusieurs ressorts égaux dans un état de compression, elles ne font pas plus d'effort que si elles ne comprimoient qu'un seul de ces ressorts ACD. Supposons que les deux Forces A, B, étant appliquées aux extrémités A, D, du ressort ACD, le compriment en lui faisant faire un angle de 30 degrés, je mets à la place de la puissance B un plan immobile MN, & le ressort n'étant pas plus comprimé qu'auparavant, la puissance A ne fera pas aussi plus d'effort qu'elle n'en faisoit. Je prens un autre ressort DEF égal au ressort ACD, & faisant appuyer sa jambe DE sur le plan immobile MN, j'applique à l'autre extrémité F la puissance B. Il est visible que ce ressort sera aussi comprimé que le ressort ACD, puisque tout est égal de part & d'autre. Or l'effort de la jambe CD sur le plan immobile MN, est égal à l'effort de la jambe DE sur le même plan, donc si nous ôtons le plan MN, les deux jambes CD, DE seront en équilibre, & les puissances A, B, ne feront pas plus d'effort qu'elles n'en faisoient avant qu'on ôtât le plan, c'est-à-dire qu'elles n'agiront pas plus que si elles ne comprimoient que le seul ressort ACD; par la même raison, si au lieu de la puissance

fance B mise en F, on substitue un plan OP, la puissance A ne fera pas plus d'effort qu'elle n'en faisoit auparavant, & si l'on met un autre ressort FGH égal à ACD, & qui s'appuyant d'une part sur le plan OP, soit comprimé de l'autre par la puissance B mise en H, cette puissance fera le même effort qu'elle feroit en D, & comme en ôtant le plan OD les deux jambes EF, FG seront en équilibre, il s'ensuit que les deux puissances A, B, mises en A & en H, comprimeront les trois ressorts ACD, DEF, FGH, chacun sous un angle de 30 degrés en ne faisant pas plus d'effort qu'en comprimant le seul ressort ACB sous le même angle, & on prouveroit la même chose s'il y avoit un plus grand nombre de ressorts.

Que si au lieu de l'une des puissances A on met un plan immobile VX, il est évident que la puissance B ne fera pas plus d'effort pour comprimer les ressorts ACD, DEF, FGH, &c. chacun sous un angle de 30 degrés, que si elle n'en comprimoit qu'un. Tout ceci supposé, venons à la première démonstration de M. Bernoulli.

Concevons, dit cet Auteur, deux rangs de ressorts égaux & également bandés, composés l'un de douze ressorts & l'autre de trois, dont une des extrémités soit appuyée contre les points fixes A, B (Fig. 28), & l'autre arrêtée par les boules L, P, que des puissances R & S empêchent de se mouvoir; il est visible que les deux boules L, P sont également pressées, & que par conséquent les Forces mortes qui pressent ces boules sont égales. Voyons ce que ces impressions ou Forces mortes mises en œuvre peuvent produire de Forces vives. Pour cet effet, imaginons-nous que les puissances R, S se retirent, il est constant que les boules L & P seront obligées de céder, & que dans le mouvement accéléré que leur imprimeront les ressorts, la boule L acquerra plus de vitesse par les efforts continués de douze ressorts, que la boule P égale à la boule L n'en peut acquérir par les efforts continués de trois ressorts.

Je suppose deux lignes droites quelconques données AC, BD, (Fig. 29.) que je prens pour deux rangs de petits ressorts égaux & également bandés; (nous concevrons que ces deux droites sont comme 12 à 3, afin de ne pas abandonner la supposition que M. Bernoulli a commencé de faire, ainsi qu'on vient de voir). Je suppose de plus que deux boules égales commencent à se mouvoir des points C, D vers F & L, lorsque les ressorts commencent à se dilater. Soient CML, DNK deux lignes courbes, dont les ordonnées

GM, HN expriment les vitesses acquises aux points G, H; je nomme $BD = a$, l'abscisse $DH = x$, sa différence $HP = dx$, l'ordonnée $HN = u$, & sa différence $TO = du$; je prens ensuite les abscisses CG, CE de la courbe CML telles qu'elles soient aux abscisses de la courbe DNK, comme AC est à BD, ou ce qui est la même chose, je fais $BD, AC :: DH, CG :: DP, CE$, & supposant $AC = na$, on aura $CG = nx$, $GE = ndx$; soit enfin l'ordonnée $GM = z$, tout ceci supposé je raisonne ainsi.

Les boules étant parvenues aux points H & G, chaque ressort, tant de ceux qui étoient resserrés dans l'intervalle AC, que de ceux qui l'étoient dans l'intervalle BD, sera dilaté également, parce que $AC, CG :: BD, DH$; chacun de ces ressorts aura donc perdu une partie égale de son élasticité, & il leur en restera à chacun également, donc les pressions ou les Forces mortes que les boules en reçoivent en H & en G sont aussi égales entr'elles; je nomme cette pression p. Or l'accroissement élémentaire de la vitesse en H, je veux dire la différence TO ou du, est par la loi connue de l'accélération en raison composée de la Force motrice ou de la pression p, & du petit tems que le mobile met à parcourir la différence HP ou dx, lequel tems s'exprime par $\frac{HP}{HN} = \frac{dx}{u}$ (voyez ci-dessus N. 84.) on aura donc $du = \frac{pdx}{u}$, & par conséquent $udu = pdx$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2}uu = spdx$; par la même raison on a $dz = \frac{p \times GE}{GM} = \frac{pndx}{z}$, par conséquent $zdz = pndz$, & en intégrant $\frac{1}{2}zz = spndx$, d'où il suit que $uu, zz :: spdx, spndx :: 1, n :: a, na :: BD, AC$; or BD est à AC comme la Force vive acquise en H est à la Force vive acquise en G, donc ces deux Forces sont entr'elles comme uu est à zz; ainsi les Forces vives des corps égaux en masses sont comme les quarrés de leurs vitesses, & ces vitesses elles-mêmes sont comme les racines quarrées des Forces vives, ce qu'il falloit démontrer.

Avant de réfuter cette preuve de M. Bernoulli, nous chercherons le rapport des tems pendant lesquels les deux boules se meuvent, & nous nommerons t le tems de la boule P (Fig. 28.) & T le tems de la boule L, il est sûr par les regles de la proposition que nous venons de citer (N. 84.) que nous aurons $t, T :: sdx \times \frac{1}{\sqrt{pdx}}, nsdx \times \frac{1}{\sqrt{npdx}} :: sdx \times \sqrt{npdx}, nsdx \times \sqrt{spdx}$. Or sdx est l'intégrale de DH (Fig. 29.) & $nsdx$ est l'intégrale de CG, donc $sdx = DH$, & $nsdx = CG$; de même ayant trouvé ci-dessus $uu, zz :: spdx, spndx$, nous aurons $u, z :: \sqrt{spdx}, \sqrt{npdx}$; mettant

donc dans la proportion $t, T :: sdx \times \sqrt{npdx}, nspdx \times \sqrt{pdx}$ les valeurs DH, CG de sdx , & $nspdx$, & la raison u, z , au lieu de son égale \sqrt{spdx}, \sqrt{npdx} , nous aurons $t, T :: DH \times z, CG \times u$; mais par la construction nous avons DH, CG :: BD, AC, & nous avons trouvé BD, AC :: uu, zz ; donc $t, T :: uu z, zz u$ ou u, z , c'est-à-dire, le tems employé à la fin de l'espace DH est au tems employé à la fin de l'espace CG, comme la vitesse acquise à la fin de DH est à la vitesse acquise à la fin de CG.

De tout ce que nous venons de voir, il suit que le mouvement des deux boules est un mouvement uniformement accéléré, car la force morte ou pression des boules égales L, P, (Fig. 28.) est égale de même que leur pesanteur est égale, les espaces parcourus sont entr'eux comme les quarrés des vitesses, & les tems sont comme les vitesses; tout suit donc ici la loi de Galilée; or dans cette loi lorsque les espaces parcourus sont égaux, les tems employés à les parcourir vont en diminuant, & les impressions de la pesanteur correspondantes à ces tems inégaux diminuent aussi, puisque ces impressions ne sont égales que lorsque les tems étant égaux, les espaces vont en augmentant; donc les forces des ressorts qui tiennent ici lieu des impressions de la pesanteur, & dont les débandemens font parcourir des espaces égaux aux corps, sont des impressions inégales sur ces corps. Par exemple, le premier ressort M fait plus d'impression sur L. que le second, & le second en fait plus que le troisième, & ainsi de suite, à cause que les tems correspondans aux débandemens égaux vont en diminuant; ainsi quoique les douze ressorts qui agissent sur la boule L. soient égaux entr'eux, cependant les impressions qu'ils font sur cette boule vont en diminuant à mesure qu'ils en sont plus éloignés, & il faut dire la même chose des trois ressorts qui agissent sur la boule P. D'où il suit que les impressions des douze ressorts sur la boule L. prises ensemble, valent moins que les forces de ces douze ressorts prises ensemble, puisque les forces des douze ressorts sont égales, au lieu que les impressions vont en diminuant, & par la même raison les impressions des trois ressorts qui agissent sur la boule P. prises ensemble valent moins que les forces de ces trois ressorts. Or les forces agissantes des boules L, P, sont proportionnelles aux impressions des ressorts qui les poussent, puisqu'elles en sont les effets, donc ces forces sont moindres que les forces des ressorts, & par conséquent elles ne sont pas dans la raison des espaces ou des quarrés des vitesses.

Il semble que M. Bernoulli auroit dû s'appercevoir du défaut de son raisonnement.

Et pour faire voir que les forces des corps en mouvement sont ici comme les vitesses de même que par-tout ailleurs, il n'y a qu'à considérer que les vitesses étant comme $\sqrt{12}$ est à $\sqrt{3}$, ou comme $2\sqrt{3}$ à $\sqrt{3}$, ou enfin comme 2 à 1, le tems de la boule L est au tems de la boule P, comme 2 à 1; c'est pourquoi supposant que les deux boules fassent effort pour retenir les ressorts avec les vitesses acquises à la fin des débandemens, la boule L ne consumera sa force qu'à la fin de deux tems à chacun desquels elle perdra un degré de vitesse, à cause de l'égalité des tems, & la boule P perdra sa force à la fin du premier tems, parce que la vitesse qu'elle perdra étant égale à la vitesse qu'elle avoit, il ne lui restera rien; or comme la boule L ne continuera de se mouvoir après le premier tems que parce que la vitesse qu'elle aura perdu en formant des ressorts sur son passage, sera moins grande par rapport à sa vitesse totale, que la vitesse que la boule P aura perdu dans le même tems, n'est grande par rapport à sa vitesse totale, & qu'au contraire en supposant que les vitesses ôtées à chaque boule dans un même tems fussent proportionnelles à leurs vitesses totales, les deux boules perdroient toute leur force à la fin de ce premier tems; il s'ensuit que les forces de ces boules doivent être comme les vitesses qu'elles perdroient en même tems si les vitesses perdues dans des tems égaux étoient proportionnelles aux vitesses acquises, ou comme les espaces qu'elles parcourroient dans le même-tems si elles ne perdoient rien de leurs vitesses. Mais les portions proportionnelles des vitesses que les boules perdroient dans un même-tems, sont comme les vitesses acquises, & non pas comme leurs quarrés; donc les forces de ces boules ne sont pas comme les quarrés des vitesses acquises, mais simplement comme ces vitesses.

L'argument que l'on tire contre les forces vives de la différence des tems, à paru si fort à M. Bernoulli, qu'il n'a pris d'autre parti que celui de nier qu'on dût faire attention à cette différence; mais comme ce Sçavant Géometre n'ignoroit pas qu'on ne nie point une Proposition, sans donner les raisons qui engagent à prendre la négative, il s'est appuyé sur une propriété de la Cycloïde renversée que nous démontrerons plus bas (N. 204.) Soient les deux corps A, B, (*Fig. 30.*) attachés à deux différens points A, B, de la demi-cycloïde renversée ABC, si l'on vient à cou-

per les fils qui les retiennent, & que ces corps ne puissent se mouvoir que le long de la demi-cycloïde, ils se mouvront d'un mouvement accéléré, puisque la demi-cycloïde est un polygone d'une infinité de côtés ou de plans inclinés, & que le mouvement sur des plans inclinés est un mouvement qui s'accélere (N. 186); cependant ces deux corps arriveront à la fin d'un même-tems au point C, quoique les espaces qu'ils ont à parcourir soient différens; donc si ces deux corps après être parvenus en C viennent à remonter avec leurs vitesses acquises, ils parviendront aussi dans un même-tems aux points A, B, d'où ils étoient partis, & par conséquent, dit M. Bernoulli, il est aisé de faire monter des corps pesants à différentes hauteurs dans des tems égaux.

Je ne sçai pas quel avantage M. Bernoulli prétend tirer d'une expérience qui se trouve directement opposée à ce qu'il veut établir. Deux corps égaux peuvent dans des tems égaux parcourir des espaces inégaux par un mouvement accéléré; cela est indubitable, & ne sçauroit même manquer d'arriver, quand les vitesses acquises avec lesquelles les corps remontent sont inégales; mais les espaces inégaux parcourus dans des tems égaux, seront-ils comme les quarrés des vitesses acquises, c'est ce que nous nierons toujours comme étant opposé aux loix du mouvement retardé, & ce que M. Bernoulli ne nous fera jamais trouver dans la cycloïde renversée; au contraire nous démontrerons plus bas dans l'endroit cité (N. 204.) que les espaces CA, CB, parcourus dans des tems égaux par les corps A, B, sont précisément comme les vitesses acquises à la fin de leur descente, & ceci seroit pour nous un nouveau motif d'attaquer les forces vives, si nous cherchions à entasser expérience sur expérience, plutôt qu'à établir un raisonnement décisif contre lequel on ne puisse plus revenir.

Après la prétendue Démonstration touchant les ressorts que nous venons de réfuter, M. Bernoulli en apporte une autre qu'il nomme géométrique & générale, & qui, à son avis, est si fort au-dessus de toute exception, qu'elle est seule capable de convaincre les partisans les plus obstinés de l'opinion vulgaire. Voyons si en effet elle a de quoi nous convaincre pleinement, ou si à notre tour, nous n'aurons pas quelque raison plus forte qui emportât le dessus. Ceux qui n'entendent pas les regles du mouvement composé, auront soin avant de lire ceci, de voir ce que nous enseignons touchant ce mouvement dans le Chapitre suivant.

Figurons-nous, dit M. Bernoulli, que le corps C (Fig. 31.) frappe obliquement un ressort placé en L, avec la vitesse CL; soit l'angle d'obliquité CLP de 30 degrés, afin que la perpendiculaire CP devienne égale à $\frac{1}{2}$ CL; soit la vitesse CL=2, & soit enfin la résistance du ressort L, telle que pour le plier il faille précisément un degré de vitesse dans le corps C, lorsque ce corps le heurte perpendiculairement; on suppose que le corps C se meut sur un plan horizontal. Ceci connu, je dis qu'après que le corps C aura choqué obliquement le corps L avec une vitesse CL de deux degrez, vitesse qui, en vertu de la composition du mouvement, est composée de CP=1, & de PL= $\sqrt{3}$, ce corps perdra entierement le mouvement perpendiculaire par CP, & ne retiendra que le mouvement par PL= $\sqrt{3}$; ainsi le corps C après avoir consumé son mouvement par CP à plier le premier ressort L, continuera à se mouvoir selon la direction PLM avec la vitesse LM=PL= $\sqrt{3}$. Concevons au point M un second ressort semblable au premier, & l'angle de l'obliquité LMQ tel que la perpendiculaire LQ soit 1, il est clair que le mouvement par LM étant composé des deux collatéraux par LQ & QM, continuera selon la direction QMN avec une vitesse MN égale à QM= $\sqrt{2}$; imaginons au point N un ressort égal à chacun des précédens que le corps rencontre sous un angle demi-droit MNR, afin que MR perpendiculaire à la ligne de situation du ressort devienne égal à 1. Il est manifeste que le mouvement par MN composé des mouvemens par MR & par RN consumera le premier de ces mouvemens par MR à plier le ressort N, & par conséquent son autre mouvement par RN continuera avec une vitesse NO=RN=1; le corps C conserve donc encore un degré de vitesse suivant la direction RNO, après avoir plié les trois ressorts L, M, N, & c'est avec ce degré de vitesse qu'il pliera le quatrième ressort O contre lequel je suppose qu'il heurte perpendiculairement.

Il paroît de tout ceci que le corps C a la force de plier avec deux degrez de vitesse quatre ressorts dont chacun demande pour être plié un degré de vitesse dans le corps C. Mais ces quatre ressorts pliés font l'effet total de la force du corps C mû avec deux degrez de vitesse, puisque toute cette vitesse du corps C se consume à plier ces quatre ressorts l'un après l'autre, & un seul ressort plié est l'effet total de la force du même corps C mû avec un degré de vitesse, puisque la résistance de chaque ressort est telle qu'elle détruit précisément un degré de vitesse dans ce corps C; puis donc que les effets totaux sont entr'eux comme les forces qui ont produit les effets, il faut que la force vive du corps C mû avec deux degrez de vitesse soit quatre fois plus

grande que la force vive du même corps mis avec un degré de vitesse.

Quand on soutient une mauvaise cause, l'esprit & le sçavoir sont d'un très foible secours ; le raisonnement de M. Bernoulli montre assez que ce Geometre s'est servi habilement & de l'un & de l'autre, mais malgré la subtilité de ses raisons, il n'est pas difficile d'en découvrir le défaut.

Je ne sçaurois disconvenir qu'il n'y ait ici quatre degrés de force, puisque les quatre ressorts n'agissant point l'un sur l'autre, demandent chacun un degré pour être comprimé ; mais je nie que ces quatre degrés de force soient produits uniquement par les deux degrés de vitesse du corps C, & que les quatre ressorts n'aient consumé que deux degrés de vitesse, comme M. Bernoulli l'avance ici. Le corps C ayant perdu un degré de vitesse par le choc du ressort L, n'en auroit plus qu'un degré s'il continuoît à se mouvoir selon la même direction CL, c'est-à-dire si le ressort L eût été perpendiculaire sur la direction CL, & lui eût ôté un degré de vitesse ; mais comme il prend la direction LM, la vitesse devient $\sqrt{3}$; or $\sqrt{3}$ étant plus grand que 1, il est constant que l'excès de vitesse que le corps C gagne dans la direction LM sur la vitesse 1 qui lui resteroit s'il suivoit sa première direction est $\sqrt{3} - 1$; de même la vitesse LM = $\sqrt{3}$ étant diminuée de 1 après le choc du ressort M, il ne devoit rester au corps C que $\sqrt{3} - 1$ de vitesse, mais il lui reste $\sqrt{2}$ plus grand que $\sqrt{3} - 1$; donc ce que le corps gagne de vitesse est $\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1$; enfin la vitesse MN = $\sqrt{2}$ étant diminuée de 1 par le choc du ressort N, la vitesse restante après ce choc devoit être $\sqrt{2} - 1$, mais cette vitesse restante est 1, donc le corps C a gagné $1 - \sqrt{2} + 1$; ajoutant donc toutes ces vitesses gagnées par les différens changemens de direction, nous aurons $\sqrt{3} - 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + 1 + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2$, ainsi les changemens de direction ont augmenté la vitesse primitive 2 du corps C de deux degrés de vitesse ; & par conséquent il y a eu à la fin du mouvement quatre degrés de vitesses éteintes, de même qu'il y a eu quatre forces consumées ; or les quatre ressorts ayant été comprimés par des degrés égaux de vitesse CP, LQ, MR, NO, & leur résistance ayant fait périr quatre forces égales, il s'ensuit que chacune de ces forces a été proportionnelle à la vitesse, & que par conséquent la somme des quatre forces, c'est-à-dire, la force totale du corps A, est comme la somme des quatre vitesses, & non pas comme le quarré de cette somme.

Il est vrai que la force éteinte par les quatre ressorts est comme le carré 4 de la vitesse primitive du corps 2, mais comme cette vitesse ne renferme pas toute la vitesse qui a composé cette force, puisqu'elle n'en est que la moitié, il faudroit donc dire que la force agissante est comme le carré de la moitié de sa vitesse totale, encore ne seroit-ce que dans l'exemple présent, car si au lieu de la vitesse primitive 2, nous prenions 4, c'est-à-dire, si nous faisons $CL=4$, & $CP=1$, ce qui demanderoit que l'angle de l'obliquité CLP fut plus aigu, alors en faisant à peu près la même construction que M. Bernoulli, nous trouverons que le corps C avec 4 de vitesse pourroit former 16 ressorts, dont chacun demanderoit un degré de force pour être comprimé; ainsi la force totale seroit 16, & par conséquent elle seroit comme le carré 16 de la vitesse primitive 4; mais comme 4 ne renfermeroit pas toute la vitesse de cette force, puisqu'il y auroit 16 vitesses correspondantes aux 16 ressorts bandés, il faudroit dire que la force agissante seroit ici comme le carré du quart de sa vitesse totale, tandis que dans le cas précédent il auroit fallu dire que la force agissante étoit comme le carré de la moitié de toute sa vitesse; d'où l'on voit que la force agissante dans ces sortes d'exemples n'a point de rapport fixe avec le carré de sa vitesse totale, au lieu qu'elle est constamment comme cette vitesse.

Ce n'est donc qu'à la décomposition du mouvement, & non pas à aucune qualité des forces agissantes qu'il faut attribuer la différence des effets que produit un corps en mouvement lorsqu'il suit successivement les directions des forces qui composent son mouvement; les forces composantes prises ensemble sont toujours plus grandes que la composée, par exemple, les vitesses CP , PL prises ensemble sont plus grandes que la vitesse CL qu'elles composent, c'est pourquoi si le corps C après avoir suivi la direction CL rencontre un obstacle qui lui faisant perdre le mouvement selon CP , l'oblige de se mouvoir selon LM qui est dans la direction PL , la vitesse qu'il aura selon cette direction sera plus grande que celle qu'il auroit eue après le choc, s'il avoit suivi la direction CL , ce qu'il auroit pu faire si le ressort L avoit été perpendiculaire sur CL , & ne lui avoit ôté sur sa direction qu'une vitesse égale à CP . Donc en suivant la direction LM , il aura plus de force que s'il suivoit toujours la direction CL , & il est visible qu'en décomposant plusieurs fois son mouvement, on augmentera sa force & on le rendra capable de plus
grands

grands effets ; mais tout cela ne dit rien en faveur des Forces vives, & quoiqu'on veuille établir là-dessus, jamais on ne prouvera que ces forces soient comme les quarrés de leurs vitesses.

Pour mieux faire voir la fausseté de la prétention de M. Bernoulli, je n'ai qu'à montrer que s'il y a ici quatre degrés de force agissante, il y a aussi quatre forces mortes qui tendent chacune selon sa direction à donner 1 de vitesse, & que par conséquent les forces agissantes sont ici dans la même raison que les forces mortes ; or voici comme je le prouve : la vitesse CL est composée de CP, PL ; la vitesse PL ou LM est composée de LQ, QM, & la vitesse QM ou MN est composée de MR, RN ou NO ; donc la vitesse CL est composée des quatre CP, LQ, MR, RN qui sont égales entr'elles. Menant donc par le point C la droite CZ égale & parallèle à LQ, la droite CX égale & parallèle MR, & la droite CF égale & parallèle à NO, la force CL sera composée des quatre forces mortes CP, CZ, CX, CF, qui toutes tendront à donner au corps C selon leurs directions un degré de vitesse ; c'est pourquoi si le corps C choque successivement selon ces quatre directions, il y aura quatre degrés de force agissante correspondans aux quatre forces mortes, & si le corps C suit toujours la direction CL, il n'y aura que deux degrés de force agissante correspondans à une force morte qui tendroit à donner sur CL les deux degrés de vitesse que les quatre forces mortes tendent à donner au corps selon cette direction CL. Donc les forces agissantes sont comme les forces mortes, mais celles-ci sont comme les vitesses qu'elles tendent à donner ; donc les forces agissantes sont aussi comme leurs vitesses, & non pas comme leurs quarrés ; & si elles sont comme le quarré de la vitesse qui suivroit toujours la direction CL, c'est que les forces mortes qui composent cette vitesse, sont aussi comme le quarré de la vitesse de cette direction.

Je pourrois rapporter ici quelques autres prétendues Démonstrations que les Partisans de M. Leibnits apportent pour soutenir son sentiment, mais comme les réfutations que j'en ferois rouleroit à peu près sur les mêmes principes, je me contenterai de dire que les Auteurs qui prennent ce parti se trompent, ou en négligeant la différence des tems, ou en prétendant mesurer les forces par les produits des masses par les espaces, ou enfin dans le mouvement composé en prenant une partie des vitesses pour les vitesses totales.

J'achevois de répondre à la dernière preuve de M. Bernoulli, lorsque j'appris que M. de Mairan avoit traité des Forces vives dans sa sçavante Dissertation imprimée en 1728. dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Le mérite & la réputation de cet illustre Académicien, joint au desir que j'avois de profiter de ses lumieres, me porterent à m'adresser directement à lui. Il me reçut avec sa politesse ordinaire, & loin d'être piqué que j'eusse écrit sur un sujet qu'il avoit si bien discuté, comme il arrive à quelques Sçavans hérissés & jaloux qui s'imaginent qu'on leur fait tort quand on écrit après eux, il m'exhorta lui-même à continuer mon travail ; mais sa modestie ne lui permettoit pas de voir que sa Dissertation dont il me faisoit part alloit bientôt me faire tomber la plume des mains. En effet, à la première lecture que j'en fis, j'y trouvai des preuves si solides & si convaincantes contre le sentiment des Forces vives, que je crus qu'il étoit inutile de revenir sur une question qui avoit été si clairement résolue. Ce ne fut même qu'en faveur des personnes qui n'ont point les Mémoires de l'Académie que je laissai subsister dans ma Méchanique Générale ce que j'avois déjà écrit. Je serois toujours resté dans le même sentiment, si les *Institutions de Physique* n'avoient été mises au jour : l'érudition & le sçavoir qui paroît dans cet Ouvrage méritent bien qu'on marque le cas qu'on en fait, en répondant à ce qui s'y trouve d'opposé à notre façon de penser ; ce n'est pas que j'aye dessein d'examiner tout ce qui y est rapporté en faveur des Forces vives, la plupart des preuves étant les mêmes que celles de MM. Leibnits & Bernoulli que j'ai réfutées ci-dessus ; je ne pourrois les discuter de nouveau sans tomber dans des redites dont je m'assure que tout Lecteur raisonnable voudra bien me dispenser. Mais il n'en est pas de même à l'égard d'un article des *Institutions de Physique*, où la Dissertation de M. de Mairan est attaquée, & si je ne dois pas avoir la témérité de croire que je puisse donner quelque degré de clarté aux Ecrits de ce célèbre Geometre ; du moins je dois aimer assez la vérité pour faire voir à mes Lecteurs qu'on tâchera toujours vainement de l'obscurcir dans un Ouvrage où elle a été mise dans tout son jour.

M. de Leibnits inventeur des Forces vives, semble n'avoir appuyé son sentiment que sur la première preuve que nous avons réfutée ci-dessus. Que deux corps A, B, (*Fig. 242.*) commençant à tomber des points A & B parcourent l'un l'espace AC, dans

deux secondes, & l'autre l'espace BD dans une seconde ; les espaces AC, BD, seront entr'eux comme les quarrés 4, 1, des tems 2, 1, & les vitesses acquises à la fin de ces tems ne seront que comme les tems mêmes, ou comme 2, 1 ; cependant si l'on conçoit que ces corps étant parvenus en C & D, soient repoussés en haut avec leur vitesse acquise, le corps A remontera en A dans un tems égal à celui qu'il a employé à descendre de A en C, & le corps B remontera en B dans un tems égal à celui qu'il a employé à parvenir de B en D, tout le monde convient de ceci. Or, disoit M. de Leibnits, les espaces que deux Forces font parcourir à deux corps, sont la mesure la plus naturelle qu'on puisse assigner à leurs quantités, & ces espaces sont ici comme les quarrés des vitesses acquises à la fin des tems, donc les Forces qui font remonter les corps A, B, sont comme les quarrés de leurs vitesses ; mais ces Forces sont des Forces vives, car elles sont acquises par un mouvement actuel & dans des tems finis & déterminés, donc les Forces vives sont entr'elles comme les quarrés des vitesses, en supposant les masses égales comme nous faisons ici, ou comme les produits des masses par les quarrés des vitesses si les masses sont inégales.

Si cette preuve de M. de Leibnits pouvoit rester sans replique, elle suffiroit pour donner gain de cause aux Partisans des Forces vives ; mais au contraire, si on parvient à démontrer sa fausseté, toutes les autres qu'on nous objecte doivent nécessairement tomber d'elles-mêmes, non-seulement par le rapport qui se trouve entre les expériences sur lesquelles on les fonde, & celle que nous venons de rapporter, mais encore parce qu'on ne pourroit nous dire pourquoi ces Forces se trouveroient ici en défaut, tandis qu'on voudroit les faire subsister dans tous les autres cas. C'est donc à ce point principal d'où dépend la décision du différent que M. de Mairan s'est attaché avec le plus de soin ; d'abord il nous fait voir que les espaces que deux différentes Forces font parcourir à des corps égaux ne sauroient être la mesure des quantités de ces Forces que dans la supposition de l'égalité des tems ; or il est visible que les tems sont ici différens puisqu'ils sont comme 2, 1, donc les espaces AC, BD ne sont pas la mesure des Forces qui font remonter les corps en A & B. Cette réponse a toute la solidité qu'on peut demander ; en fait de mouvement si l'on n'a égard à tout ce qui est renfermé dans son idée, je veux dire à la masse, à l'espace & au tems ; on se met-

ira toujours en danger de tomber dans l'erreur, & dans les cas particuliers où l'on ne se sera point trompé, il arrivera par hazard que les choses qu'on aura négligées seront égales, ce qui vérifiera la conclusion qu'on aura tirée sans justifier le raisonnement. Et qu'on ne dise point qu'il y a une distinction à faire entre les Forces uniformes & les Forces retardées; je sais que celles-ci rencontrent à chaque pas des obstacles, qui les affoiblissant peu à peu, les font enfin périr; & qu'au contraire celle-là ne rencontrant point d'obstacles, conservent toujours une entière vigueur, mais ces obstacles ne changent point la valeur intrinsèque des Forces. Il sera toujours vrai de dire qu'une Force comme deux sera toujours comme deux, soit qu'elle soit détruite par une cause étrangère, ou qu'elle ne le soit pas, ce qui aura été détruit ne sera jamais que 2, de même qu'en ôtant la cause qui détruit on ne retrouvera que deux.

Il paroît donc que M. de Mairan auroit pu s'en tenir à la réponse que nous venons de rapporter; mais comme on se seroit peut-être imaginé qu'en négligeant la différence des tems, il devoit du moins admettre que les Forces agissantes sont dans la raison des quarrés de leurs vitesses; il pousse la chose plus loin, & recherchant la véritable cause des effets qui ont occasionné la question, il nous fait voir, que malgré la diversité des tems, les Forces agissantes ne sont que comme leurs vitesses & non pas comme leurs quarrés. *Ce ne sont point, dit-il, les espaces parcourus par le mobile dans le mouvement retardé qui donnent l'estimation & la mesure de la Force motrice, mais les espaces non parcourus, & qui l'auroient dû être par un mouvement uniforme dans chaque instant; ces espaces non parcourus sont en raison des simples vitesses, & partant les espaces qui répondent à une Force motrice retardée ou décroissante en tant qu'elle se consume dans son action, sont toujours proportionnels à cette Force & à la vitesse du mobile, tant dans les mouvemens retardés que dans le mouvement uniforme.* Cette assertion qui paroît une espèce de paradoxe, comme M. de Mairan l'avoue lui-même, se trouve démontrée dans toute la rigueur géométrique dans sa Dissertation, & l'on peut dire que c'est ici le plus rude coup que les Forces vives ayent jamais essuyé. L'Auteur des Institutions de Physique a l'esprit trop pénétrant pour ne l'avoir pas senti; quoique l'Ouvrage de M. Mairan contienne grand nombre d'autres preuves, qui toutes tendent à la destruction des Forces vives; il ne s'est attaché qu'à celle-ci, convain-

cu, peut-être, que si l'on pouvoit une fois la reduire au neant, routes les autres seroient faciles à dissiper; à son avis M. de Mairan n'a rien oublié de tout ce qu'on peut dire en faveur d'une mauvaise cause; mais son raisonnement est toujours vicieux dans le fonds, & plus il est séduisant, plus il se croit obligé de faire sentir aux Lecteurs que la doctrine des Forces vives n'en peut souffrir aucune atteinte. Je rapporterai bientôt, & la démonstration de M. de Mairan, & les raisons que lui oppose l'Auteur des Institutions de Phylique; mais auparavant je suis bien aise de rappeler en peu de mots ce qui regarde la nature & les propriétés des mouvemens accelerés & retardés, & d'en tirer quelques conséquences qui mettront le Lecteur en état de juger plus facilement du parti que l'on doit prendre dans cette question.

Soit le corps A (Fig. 243.) qui commence à tomber du point A, & qui se meut pendant un tems représenté par la ligne AF, que je suppose divisé en quatre petits tems égaux finis & déterminés AC, CD, DE, EF, supposons aussi que l'espace parcouru pendant le premier tems AC soit représenté par le triangle ACH. Il est sur que si à la fin du tems AC la pesanteur cessoit d'agir sur le corps A, & que ce corps ne se meut que par la vitesse acquise à la fin de ce tems, l'espace CHMD qu'il parcourroit pendant le second tems CD, seroit double de l'espace ACH parcouru pendant le premier tems, personne ne disconvient de ceci, & en effet, il est clair qu'une vitesse acquise & uniforme doit faire parcourir un espace double de celui qui a été parcouru avec une vitesse qui s'est augmentée par des accroissemens insensibles & égaux, en supposant l'égalité des tems de part & d'autre. Or tandis que la vitesse acquise à la fin du tems AC seroit parcourir au corps A l'espace CHDM pendant le tems CD, la pesanteur de son côté, si elle agissoit toute seule, lui feroit parcourir dans le même tems CD l'espace HMN égal à l'espace ACH qu'elle auroit fait parcourir dans le premier instant; car la pesanteur agissant toujours de la même maniere sur le corps, les accroissemens de vitesse qu'elle donne dans des tems égaux sont égaux; laissant donc agir la vitesse acquise à la fin du tems AC & la pesanteur, l'espace parcouru pendant le tems CD sera CHND & cet espace sera composé de deux parties dont l'une CHMD seroit parcourue avec une vitesse uniforme, si elle agissoit seule, & l'autre HNM sera parcourue avec une vitesse accelerée. Il est aisé de voir que si la vitesse acquise pendant le tems

CD agissoit seule sur le corps pendant le tems DE, l'espace parcouru MNZX seroit double de HNM, & que laissant agir cette vitesse conjointement avec la pesanteur & avec la vitesse acquise à la fin du tems AC, l'espace parcouru DNOE sera composé de trois parties, dont les deux DMXE, MNZX seroient parcourues avec des vitesses uniformes & égales, si elles agissoient seules, & la troisième NOZ sera parcourue avec une vitesse accélérée, & continuant le même raisonnement, on trouvera que les espaces parcourus, à l'exception du premier, sont tous parcourus par un mouvement dont une partie seroit uniforme & l'autre accélérée, c'est-à-dire le mouvement du premier espace seroit accéléré, celui du second auroit une partie uniforme & l'autre accélérée, celui du troisième en auroit deux uniformes & l'autre accélérée & ainsi de suite.

Et il faut observer que quoique je dise que chacun des espaces est parcouru avec des vitesses, dont les unes seroient uniformes si elles agissoient seules, & dont la dernière est accélérée; je ne veux pas dire pour cela qu'une partie de ces espaces soit parcourue uniformément, & l'autre d'une manière accélérée, car les vitesses uniformes & l'accélérée agissant ensemble ne forment qu'une seule vitesse accélérée dans chaque espace.

Puisque la vitesse acquise à la fin du tems AC seroit parcourir l'espace CHMD dans le tems CD, que celle-ci jointe à la vitesse que la pesanteur auroit ajouté à la fin du tems CD, c'est-à-dire toute la vitesse acquise à la fin des deux tems AC, CD, seroit parcourir pendant le tems DE l'espace DNZE, & ainsi de suite, il s'ensuit que les vitesses acquises à la fin des tems AC, AD, AE, AF, sont comme les espaces CHDM, DNZE, EOKF, FPIL; mais ces espaces ayant les hauteurs égales, sont comme leurs dimensions inégales, CH, DN, EO, FP, & à cause des triangles semblables ACH, ADN, &c. ces dimensions CH, DN, &c. sont comme les tems AC, AD, &c. donc les vitesses acquises à la fin des tems AC, AD, &c. sont comme les tems; mais à cause des mêmes triangles semblables, les espaces ACH, ADN parcourus à la fin des tems AC, AD, &c. sont comme les carrés de ces tems, donc les espaces parcourus à la fin des tems AC, AD, sont comme les carrés des tems, tandis que les vitesses ne sont que comme les tems.

Les forces acquises à la fin des tems AC, AD, &c. sont comme les vitesses acquises à la fin de ces mêmes tems; car les vitesses ac-

quises sont comme les espaces CHDM, DNZE, EOKF, &c. qu'elles feroient parcourir dans des tems égaux CD, DE, EF, &c. & les espaces parcourus dans des tems égaux, sont la mesure la plus naturelle des quantités des Forces qui sont parcourir ces espaces, ce que les Partisans des Forces vives ne peuvent nier, puisqu'ils l'admettent même lorsque les tems ne sont pas égaux; donc les Forces acquises à la fin des tems AC, AD, &c. sont comme les vitesses acquises à la fin de ces mêmes tems.

De ce que nous venons de prouver, il suit nécessairement qu'il n'y a point de différence entre les vitesses acquises & les Forces acquises à la fin des mêmes tems; or les Partisans des Forces vives conviennent que les vitesses acquises sont comme les tems AC, AD, donc ils doivent convenir aussi que les Forces acquises sont comme les tems, mais les Forces acquises à la fin des tems AC, AD, &c. sont des Forces agissantes, puisqu'elles sont acquises par un mouvement actuel & après un tems déterminé, donc les Forces agissantes sont comme les tems ou comme les vitesses, & non pas comme les quarrés.

Je vois bien qu'on me dira que les Forces dont je parle sont des Forces uniformes, au lieu que M. de Leibnits parloit des Forces retardées, mais je redirai aussi que les Forces uniformes & les retardées n'ont rien en elles-mêmes qui puisse les distinguer, & que toute la différence qu'on y trouve ne venant que des obstacles que les unes rencontrent tandis que les autres n'en rencontrent point, tout ce qu'il en arrive, c'est que celles-ci se trouvent affoiblies peu à peu & perissent même totalement, tandis que celles-là sont toujours dans la même vigueur. Pour s'en convaincre pleinement on n'a qu'à supposer que deux corps d'égale masse soient poussés avec des vitesses égales, mais qu'e l'un rencontre sur sa route d'autres corps, qui par leur choc détruisent peu à peu son mouvement, & que l'autre n'en rencontre point, celui qui aura été choqué se trouvera en repos, tandis que l'autre continuera à se mouvoir & parcourra par conséquent un espace plus grand; dira-t-on pour cela que ces deux corps n'ont pas été poussés avec des forces égales; c'est ce que je ne crois pas qu'aucun Geomètre ou Physicien ose jamais avancer, & ce qui me fait croire aussi qu'on ne soutiendra jamais qu'une Force qu'on transforme d'uniforme en retardée, ou de retardée en uniforme, puisse être différente d'elle-même, mais allons plus avant.

Supposons qu'un autre corps B (Fig. 243.) commençant à tom-

ber du point B, se meuve pendant les tems Bc, cd égaux chacun à chacun aux tems AC, CD , l'espace Bch parcouru par le corps B pendant le tems Bc sera égal à l'espace ACH parcouru par le corps A pendant le tems $AC = Bc$, & l'espace Bdn que B parcourra pendant le tems Bd , sera égal à l'espace ADN que A parcourra pendant le tems AD ; & comme les vitesses ou les Forces acquises par le corps B à la fin des tems Bc, Bd seront entr'elles comme les droites ch, dn égales chacune à chacune aux droites CH, DN , à cause de la similitude des triangles $Bch, ACH; Bdn, ADN$, & des hauteurs égales $Bc, AC; Bd, AD$, il s'ensuit que la vitesse ou l'force acquise du corps B à la fin du tems Bc sera à la vitesse ou Force acquise du corps A à la fin du tems AF , comme dn est à FP ou comme 2 à 4, ou comme 1 à 2; maintenant supposons que les deux corps A, B ayant parcouru les espaces AFP, Bdn , à la fin des tems AF, Bd soient repoussés en haut avec leurs vitesses acquises à la fin de ces tems, il est clair que si la pesanteur cessoit d'agir sur ces corps, le corps A parcourroit l'espace $ARPF$ double de l'espace APF dans un tems égal à celui qu'il a employé à parcourir APF ; car sa vitesse ou Force acquise à la fin du tems AF lui feroit parcourir pendant le tems EF l'espace $FPQE$, qui est le quart du rectangle FPR , & comme cette vitesse seroit uniforme, puisque nous supposons qu'elle ne trouveroit point d'obstacles, il s'ensuit qu'elle feroit parcourir au corps A le rectangle $FPRA$ quadruple du rectangle $FPQE$ dans le tems FA quadruple de FE ; par la même raison le corps B parcourroit l'espace $dnvB$ double de l'espace Bdn , dans un tems égal à celui qu'il a employé à parcourir Bdn , & ces deux espaces $FPRA, dnvB$, seroient entr'eux comme 4 à 1, à cause que les bases FP, dn , & les hauteurs AF, Bd sont entr'elles comme 2 à 1, ainsi les espaces parcourus seroient en raison doublée des vitesses acquises, ou des vitesses qui obligeroient les corps A, B à remonter.

Que si nous laissons agir la pesanteur sur les deux corps A, B pendant qu'ils remonteront, il arrivera que pendant le tems EF la pesanteur empêchera le corps A de parcourir l'espace OQP , car la pesanteur agissant uniformément sur le corps, soit qu'il descende ou qu'il monte, elle doit l'empêcher en montant pendant un tems, de parcourir un espace OQP égal à l'espace OKP qu'elle lui feroit parcourir dans le même tems s'il descendoit; ainsi la vitesse qu'elle fera perdre au corps en mon-

tant

tant pendant le tems EF, étant égale à celle qu'elle lui auroit fait acquérir en descendant pendant le même tems, laquelle vitesse acquise lui feroit parcourir dans un tems semblable un espace semblable & égal à l'espace KOPQ; il ne doit plus rester au corps A, à la fin de ce tems, qu'une vitesse, laquelle ne lui feroit parcourir pendant le tems ED que l'espace EOTD, si elle ne rencontroit point d'obstacles; mais comme la pesanteur s'oppose toujours à son passage, le corps A perdra pendant ce tems la partie de cette vitesse qui lui auroit fait parcourir un espace semblable & égal à ZOTN; & continuant ce même raisonnement, on trouvera que les vitesses perdues pendant les tems FE, ED, DC, CA, sont représentées par les espaces KPOQ, ZOTN, MNYH, CHAG, lesquels pris ensemble sont égaux à l'espace FPQE, que le corps auroit parcouru dans le premier tems EF, & qui représente la vitesse acquise avec laquelle le corps remontoit; par la même raison, le corps B en remontant aura perdu des vitesses représentées par les espaces *mnyh*, *chg* B, qui pris ensemble sont égaux à l'espace *dnyc* qui représente la vitesse acquise avec laquelle il remontoit; or les espaces réellement parcourus par les corps A, B en remontant étant les triangles AFP, Bdn, qui sont moitiés des rectangles AFPR, Bdnu, qu'ils auroient parcouru s'ils n'avoient point trouvé de résistance; il est évident que ces espaces sont encore entr'eux comme les quarrés des vitesses qui font remonter les corps, d'où il semble d'abord qu'il faut faire une distinction entre les vitesses & les Forces des corps, à cause que les vitesses étant comme 2 à 1, les espaces que l'on confond mal-à-propos avec les Forces dans le cas présent, sont comme 4 à 1.

Pour lever cette difficulté, on répond d'abord, que les espaces ne sont ici comme 4 à 1, que parce que la première Force agit dans un tems double de celui qui est employé par la seconde Force; & en effet, si on ne laisse agir la force uniforme du corps A, que pendant le tems FD égal au tems dB de la Force uniforme du corps B, on trouvera aisément que le corps A parcourra un espace qui ne sera à l'espace parcouru par B que comme 2 à 1, ou comme la vitesse acquise de A à la vitesse acquise de B; mais comme on pourroit prétendre que la diversité des tems en augmentant l'espace parcouru par A augmente aussi la Force de ce corps, nous allons montrer que cette Force est la même, soit qu'elle agisse pendant les deux tems FE, ED, ou qu'elle

agisse pendant les quatre, FE, ED, DC, CA.

Les effets étant toujours proportionnels à leurs causes, on ne peut mieux juger de la quantité d'une Force qui se détruit en agissant, que par les obstacles qui causent sa destruction. Or les obstacles qui détruisent la force de A sont les impressions de la pesanteur, lesquelles sont périr au premier instant FE la vitesse qui feroit parcourir un espace égal à KPQO, au second la vitesse qui feroit parcourir un espace égal à ZOTN, au troisième celle qui feroit parcourir un espace égal à MNYH, & au quatrième celle qui feroit parcourir un espace égal à CHGA; donc ces impressions ou obstacles sont comme les espaces KPQO, ZOTN, MNYH, CHGA; par la même raison les obstacles qui sont périr & consumer la Force de B, sont comme *mnyh*, *chgB*, mais les quatre espaces KPQO, ZOTN, MNYH, CHGA, sont aux espaces *mnyh*, *chgB*, comme 4 à 2, ou comme 2 à 1, donc les obstacles qui détruisent les Forces de A & de B sont comme 2 à 1, & par conséquent les Forces sont comme 2 à 1 ou comme leurs vitesses.

On voit par là que la seule considération des mouvemens accélérés & retardés nous découvre, 1°. Que la vitesse d'un corps multipliée par la masse n'est point différente de sa force, soit que le mouvement soit uniforme ou qu'il soit accéléré, ou retardé. 2°. Que la force n'augmente point par la plus grande durée du mouvement. 3°. Enfin que M. de Mairan a eu raison de dire que ce sont les espaces non parcourus & qui l'auroient dû être par un mouvement uniforme, qui donnent l'estimation & la mesure de la Force motrice dans le mouvement retardé; les espaces non parcourus par le corps A, c'est-à-dire les espaces que la pesanteur a empêché de parcourir sont au premier instant l'espace PQO, au second l'espace OTN, au troisième l'espace NYH, & au quatrième l'espace HGA; de même les espaces non parcourus par le corps B sont au premier instant l'espace *nyh*, & au second l'espace *hgB*, mais ces espaces non parcourus de part & d'autre étant comme 4 à 2, sont en même raison que les obstacles qui ont détruit leurs Forces, donc puisque les Forces sont comme les obstacles qui les détruisent, elles sont aussi comme les espaces non parcourus. Mais il est tems de faire voir comment M. de Mairan démontre lui-même la Proposition que nous avons rapportée ci-dessus; c'est à la page 29 de la première édition de sa

Dissertation, ou à la page 67 de la seconde édition qu'il s'explique ainsi. *

Concevons deux mobiles égaux A & B (Fig. 244.) qui remontent sur les lignes AD de 4 toises Bd, de 2 toises, l'un savoir A avec deux degrez de vitesse, & l'autre B avec un degre. Si rien ne s'opposoit à la Force motrice du corps B, c'est-à-dire si le mouvement étoit uniforme, B parcourroit au premier tems les deux toises Bd sans rien perdre de cette force ni du degre de vitesse dont elle résulte; mais parce que, par hypothèse, les impulsions contraires de la pesanteur qui lui sont continuellement appliquées pendant ce tems achevent de consumer sa Force & sa vitesse, & l'arrêtent enfin lorsqu'il est parvenu à la fin b de la premiere toise, le mobile B ne parcourra qu'une toise dans son mouvement retardé, & je dis de même du mobile A; il auroit parcouru dans le premier instant les quatre toises AD, mais les impulsions contraires de la pesanteur l'ont fait, pour ainsi dire reculer d'une toise DC pendant ce tems, de sorte qu'il n'en a parcouru réellement que trois, & ces impulsions contraires ont consumé ou détruit en lui un degre de force & un degre de vitesse, comme ils ont fait dans le corps B pendant un tems semblable; mais parce que le corps A avoit 2 degrez de force & 2 de vitesse, il lui en reste encore 1, & il se trouve par là en C, & à la fin du premier tems dans le cas où se trouvoit le corps B au commencement de ce premier tems. Il a donc tout ce qu'il faut pour parcourir encore 2 toises CE, en un second tems semblable au premier, si aucune impulsion contraire ne s'y oppose; mais les impulsions contraires de la pesanteur vont s'y opposer de la même façon qu'elles se sont opposées au mouvement du corps B, donc le corps A ne parcourra pendant ce second tems que la toise CD, ayant pour ainsi dire reculé de l'autre toise ED en vertu du retardement, ou des impulsions contraires à sa Force motrice, après quoi il s'arrêtera en D, comme le corps B en b, de sorte qu'il n'aura parcouru en tout dans les deux tems de son mouvement que 4 toises. Ce sont ces espaces Bd, CD dans le premier instant, & DE dans le second, & ainsi de suite, que j'appelle non parcourus; ils sont non parcourus relativement à la Force motrice des corps A, B, & à leur direction donnée de B vers d, & de A vers E, à laquelle seule on fait attention; quoi qu'en un sens ils soient très-réellement parcourus en valeur, en direction contraire, & par l'effet d'une autre Force motrice opposée à

* La premiere édition est in-4. & se trouve à la tête des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'année 1728, & la seconde qui vient de se faire est in 12, & se vend à Paris chez Jombert, Libraire rue S. Jacques.

la premiere, qui s'y mêle, & qui la modifie continuellement, comme feroit le mouvement contraire d'un plan sur lequel le mobile seroit porté.

Et à la page 33 de la premiere édition, & 75 de la seconde, M. de Mairan continue ainsi. *Les espaces non parcourus à chaque instant representent la Force perdue & consumée à cet instant, ou ce qui revient au même, l'effort de la puissance contraire qui la détruit, ou qui la consume en s'exerçant contre elle; mais la somme de toutes les Forces perdues ou de tous les efforts contraires est égale à la Force totale du mobile. Donc, &c.*

Les espaces Bb, AC parcourus par le mobile dans le premier instant, sont l'effet de la Force constante & conservée, & non de la Force retardée ou perdue; ainsi ils ne doivent point mesurer la perte qui s'en est faite dans le tems employé à les parcourir. Cette perte, dis-je, s'est faite en les parcourant & non à les parcourir, elle doit être repandue sur ces espaces, & sur le tems employé à les parcourir; mais elle n'a d'effet réel, & n'apporte du changement à la Force motrice totale, & ne la fait decroître que proportionnellement à l'espace non parcouru, ou à la valeur de l'espace non parcouru repandue ou retranchée continuellement sur les portions correspondantes d'espaces parcourus; l'espace parcouru n'exprime que la repetition de la Force totale ou de la partie qui en est conservée, espace qui seroit infini si elle étoit toujours conservée, quelque finie qu'elle pût être. C'est donc l'espace non parcouru Bd, CD, DE, qui mesure sa partie perdue ou consumée, celle là même qui fait le complement de la totale, avec celle qui s'est conservée à chaque instant, & qui se seroit conservée de même si le mouvement eût été uniforme, & s'il eût fait parcourir au mobile l'espace qu'il ne parcourt pas faute d'uniformité.

Il est clair que les espaces bd, CD, DE, qui ne sont que l'unité répétée à chaque instant & à chaque degré de vitesse perdu, sont égaux en nombre aux instans, & aux degrés de vitesse; & par conséquent que leur somme est égale ou proportionnelle à la simple vitesse initiale du mouvement retardé; mais leur somme est égale à la force du mobile (ce qui a été démontré ci-dessus); donc la force est proportionnelle à la simple vitesse, soit qu'on la considere dans un instant particulier de son action, soit qu'on la considere dans la somme des instans de sa durée & de son action totale.

Après une Demonstration aussi nette & geometrique que celle-ci, on avoit lieu d'esperer que les partisans de l'opinion contraire se rendroient enfin à une verité qui leur étoit si clairement

expliquée. Mais les noms de MM. Leibnits & Bernoulli sont si célèbres, qu'il semble qu'on ait tort d'opposer des Démonstrations à leur autorité.

Voici de quelle maniere l'Auteur des Institutions de Physique attaque ce qui vient d'être rapporté : *Pour sentir*, dit-il, pag. 430. *le vice de ce raisonnement, il suffit de considerer l'action de la pesanteur comme une suite infinie de ressorts égaux qui communiquent leurs forces en descendant, & que le corps referme en remontant ; car alors on verra que les pertes d'un corps qui remonte, sont comme le nombre des ressorts, c'est-à-dire, comme les espaces parcourus, & non pas comme les espaces non-parcours.*

La comparaison que l'on fait des impressions de la pesanteur avec les impressions d'une suite de ressorts égaux a quelque chose de brillant qui éblouit d'abord, mais quand on examine la chose de près, on y trouve un défaut de parité si sensible, qu'il paroît surprenant que M. Bernoulli ait pû s'y laisser prendre le premier. Lorsqu'un corps se meut en conséquence des impressions toujours égales de la pesanteur, les espaces parcourus d'une impression à l'autre, vont en augmentant dans la raison des nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. & les tems sont égaux ; d'où il suit que si l'on divise en espaces égaux, l'espace total qu'un corps doit parcourir pendant un tems déterminé, les impressions de la pesanteur d'un espace à l'autre iront en diminuant, & les tems employés à parcourir ces espaces égaux diminueront aussi à mesure qu'ils s'éloigneront du mouvement ; cela est incontestable dans le système de Galilée que les Défenseurs des forces vives reçoivent de même que nous. Si l'on veut donc établir une comparaison juste entre les impressions de la pesanteur & les impressions d'une suite de ressorts égaux, il faut, ou qu'on dise que les espaces parcourus en conséquence des impressions successives des ressorts sont comme les nombres 1, 3, 5, 7, &c. & que les tems employés à les parcourir sont égaux, ou qu'on veuille au contraire que ces espaces soient tous égaux, & que les tems aillent en diminuant de même que les impressions. Mais on ne peut vouloir que les espaces parcourus d'une impression à l'autre, augmentent dans la progression des nombres impairs ; car M. Bernoulli a démontré lui-même, comme on a vû ci-dessus, que les espaces parcourus par la boule P (Fig. 28.) en conséquence des impressions des trois ressorts BN sont aux espaces parcourus par la boule L en conséquence des impressions des douze ressorts

AM, comme 3 à 12, c'est-à-dire, comme les nombres des ressorts ou des impressions faites sur P, est au nombre des ressorts ou des impressions faites sur L, & cela ne sçauroit être si ces espaces alloient en augmentant, puisqu'en ce cas les espaces parcourus par P seroient aux espaces parcourus par L comme 9 à 144, c'est-à-dire, comme les quarteux 3 & 12 des impressions, à cause que dans toute progression des nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. la somme de la progression est toujours égale au carré du nombre qui marque la multitude des termes, & que les nombres qui marquent ici les multitudes des espaces parcourus par P & par L sont les nombres 3 & 12 des impressions ou des ressorts; donc il faut nécessairement qu'on dise que les espaces parcourus d'une impression à l'autre sont des espaces égaux entr'eux, & que les tems employés à les parcourir vont en diminuant de même que les impressions; mais si les impressions diminuent, il est visible que leur somme, c'est-à-dire, les forces que les corps reçoivent, sont moindres que la somme des forces égale des ressorts; donc on a tort de soutenir que les forces des corps mus par des ressorts soient comme ces ressorts, ni que ces corps en refermant les ressorts fassent des pertes qui leur soient proportionnelles, puisque les impressions contraires qui seroient la cause de ces pertes ne seroient pas dans la même proportion.

Quel sera donc le rapport des impressions des ressorts? le voici. De même que dans le mouvement des corps qui tombent, les impressions de la pesanteur sont égales & les tems aussi, lorsque les espaces parcourus d'une impression à l'autre sont comme les nombres 1, 3, 5, 7, &c. de même aussi dans le mouvement des corps poussés par une suite infinie de ressorts, les impressions seront égales & les tems aussi quand les espaces parcourus seront dans la même progression. Mais dans le mouvement des corps qui tombent, les sommes des impressions sont comme les sommes des tems égaux à la fin d'un tems total, ou comme la vitesse acquise à la fin de ce tems, ou enfin comme la racine de l'espace total parcouru; donc dans le mouvement des corps pressés par des ressorts, les sommes des impressions à la fin d'un tems total, sont aussi comme la vitesse acquise à la fin de ce tems, ou comme la racine de l'espace total.

Et il faut observer en passant que la somme des impressions n'étant que comme la racine de l'espace total, & les ressorts étant au contraire comme cet espace, ou comme la somme des es-

paces égaux qui le composent, & dont chacun est égal à la place qu'occupe le débandement d'un ressort, il s'ensuit nécessairement que s'il a fallu pour une première impression l'espace du débandement d'un ressort, il faudra pour une seconde impression égale à la première, l'espace du débandement de trois ressorts, pour une troisième l'espace du débandement de cinq, & ainsi de suite dans la progression des nombres impairs.

Après avoir montré que les pertes d'un corps qui remonte ne sont pas comme la somme des ressorts, mais simplement comme la racine de cette somme, il faut encore montrer que ces pertes sont comme les espaces non parcourus, & non pas comme les espaces parcourus, ainsi que l'Auteur des Institutions de Physique le prétend.

Supposons donc que les corps A, B, (Fig. 243.) étant parvenus en F & en d, remontent avec leurs vitesses acquises, les ressorts qu'ils seront obligés de surmonter en des tems égaux seront les mêmes qui leur auront donné leurs forces en descendant; donc le corps A qui dans l'instant FE parcourroit l'espace FPQE s'il ne trouvoit point de ressort, sera obligé de perdre l'espace PQO égal à l'espace OKP que les ressorts qu'il rencontre lui auront fait parcourir en descendant, & comme ces ressorts en lui donnant l'espace OKP lorsqu'il descendoit, lui auront donné une vitesse capable de parcourir l'espace KPQO dans un instant, de même en remontant la force de ces mêmes ressorts, en lui ôtant l'espace PQO lui ôtera une vitesse qui lui feroit parcourir un espace égal à KPQO dans un instant; ainsi le corps A ne pourroit plus parcourir dans l'instant ED que l'espace EOTD s'il ne se trouvoit point d'obstacle, mais comme il se rencontre encore des ressorts qu'il faut surmonter, il perd l'espace OTN & une vitesse capable de faire parcourir un espace double de OTN dans un instant, & continuant à raisonner de la même manière, on trouvera que dans les deux autres instans le corps A aura perdu deux espaces NYH, AGH égaux aux deux espaces précédens, & deux vitesses égales aux précédentes; de même le corps B aura perdu en remontant deux espaces nhy, hgB, & deux vitesses semblables & égales à celles que le corps A aura perdu. Or ces espaces & ces vitesses perdues consomment totalement les deux forces, & ce sont les espaces perdus qui en périssant ont fait face aux ressorts, & les ont fait périr; donc les forces perdues sont comme les espaces perdus ou non parcourus, & non pas comme les es-

paces parcourus, puisqu'il est évident que ceux-ci ne sont pas comme les espaces non parcourus. Il semble que l'Auteur des Institutions de Physique auroit dû voir que la Demonstration de M. de Mairan avoit réfuté ce qu'il avance ici avec toute la clarté qu'on pouvoit désirer.

Pour mieux faire voir que ce n'est pas par les espaces plus grands qu'une force retardée parcourt dans un tems plus grand qu'il faut juger qu'elle est plus grande qu'une autre; M. de Mairan s'exprime ainsi dans un autre endroit de sa Dissertation page 24. de la premiere Edition, & 57. de la seconde : *Comme il ne s'ensuit pas de ce que le mouvement uniforme d'un corps fini qui a une vitesse finie ne cesse jamais ou dure toujours, que la force motrice actuelle qui le produit soit infinie, il ne s'ensuit pas non plus à la rigueur que la force motrice de ce même corps dans le mouvement retardé en soit plus grande de ce qu'elle doit durer davantage. Elle n'est réellement plus grande que parce qu'elle fait parcourir de plus grands espaces en des tems égaux, ou plutôt ces espaces ne sont plus grands en des tems égaux que parce que la force est plus grande en vertu d'une plus grande vitesse; & dans ce cas elle doit durer davantage ou perir plus tard, non pas à la rigueur parce qu'elle est plus grande, car la seule raison de la masse pourroit la rendre telle, mais parce qu'en des tems égaux elle fait parcourir de plus grands espaces. C'est par-là accidentellement qu'elle dure davantage ou perit plus tard la plus longue durée sera si l'on veut une indication d'une plus grande vitesse, mais non pas un second principe de valeur qui doive multiplier la valeur qu'indique déjà la vitesse ou les espaces parcourus appliqués au tems. Ce seroit faire un espece de double emploi très-vicieux, mesurer une force par ses effets & par les effets de ses effets, & toute leur suite répandue successivement sur differens espaces.*

Tout ceci est évident & se démontre de lui-même, mais les forces vives ne s'en accommodent point; il faut donc absolument prendre le parti d'y trouver à redire & de le critiquer. On voit aisément, dit l'Auteur des Institutions de Physique, *que dans le mouvement uniforme supposé éternel, il n'y a nulle destruction de force, au lieu que lorsque la force motrice pendant un tems double a derangé des obstacles quadruples, il y a eu une dépense réelle de force, laquelle n'a pu se faire sans un fonds de force quadruple, & qu'ainsi ces deux cas ne peuvent se comparer. S'il pouvoit se faire que la force motrice pendant un tems double derangeât des obstacles quadruples, nous ne saurions disconvenir qu'il ne fallût un fonds de force quadruple*
pour

pour produire un pareil effet, mais si au contraire les obstacles dérangés dans des tems doubles ne sont jamais que doubles, de même que les espaces parcourus dans le mouvement uniforme en différens tems sont toujours proportionnels à ces tems, je ne vois pas pourquoi nous ne pourrions comparer les obstacles qui sont dérangez par la force retardée, avec les espaces que la force uniforme fait parcourir. Or M. de Mairan a démontré que les espaces non parcourus dans des tems doubles sont comme ces tems, & il est visible que ces espaces sont dans la même raison que les obstacles qui les ont empêchés d'être parcourus; donc il faut ou que l'Auteur des Institutions de Physique nous fasse voir le vice de sa Demonstration, ou qu'il convienne lui-même du peu de solidité de son raisonnement.

Plus on a poussé les Partisans des forces vives par la justesse & la solidité des raisonnemens, plus aussi ont-ils appelé les expériences à leur secours. Les uns, à l'imitation de M. Bernoulli, ne nous parlent que de la force des ressorts, & les autres au contraire ne nous entretiennent que des propriétés des corps mols. Nous avons déjà réfuté les preuves que M. Bernoulli prétend tirer des expériences des chocs des corps élastiques, & nous en parlerons encore au sujet du fameux Problème d'une boule qui en choque immédiatement plusieurs autres (N. 601). Il ne me reste donc plus qu'à répondre à ce qu'on nous objecte touchant les corps mols, & c'est ce que nous allons faire en peu de mots.

Si l'on prend de l'argile EFGH (Fig. 245.) dont la consistance soit assez forte pour soutenir un corps qu'on poseroit sur la surface EF, & qu'après avoir élevé ce corps à différentes hauteurs AB, CB, &c. on le laisse tomber à chaque fois, on trouvera toujours que les enfoncemens du corps dans l'argile seront proportionnels aux hauteurs dont il sera tombé, c'est-à-dire, si les hauteurs AB, CB, sont comme 1 à 2, les enfoncemens du corps dans l'argile seront dans la même raison; or ces enfoncemens étant causés par la seule vitesse acquise par le corps lorsqu'il est parvenu sur la surface EF, & la pesanteur n'y contribuant rien, puisqu'on suppose que cette surface peut en arrêter l'action, les Partisans des Forces vives raisonnent ainsi: « Les enfoncemens sont les effets des Forces du corps, mais les effets sont toujours proportionnels à leurs causes; donc ces enfoncemens sont entr'eux comme les forces acquises du corps, lorsqu'il est parvenu en B; mais par l'expérience les enfoncemens sont comme

« les hauteurs AB, CB, & ces hauteurs sont comme les quarrés
 « des vitesses acquises; donc les forces sont aussi comme les quarrés
 « des vitesses acquises ». A ce raisonnement spécieux, M. de Mairan répond que les enfoncemens du corps ne pouvant se faire sans déplacer à chaque instant des nouvelles parties d'argile, le mouvement du corps est retardé de la même façon que s'il remontoit au point d'où il est tombé, & que de même qu'il parcourroit en remontant des espaces plus grands & pendant plus de tems à mesure qu'il seroit tombé de plus haut & pendant un plus long-tems, de même aussi il s'enfonce plus avant dans l'argile & pendant un tems plus long, lorsque la hauteur dont il est tombé se trouve plus grande. Mais, comme ce Sçavant Géometre, dans la vûe d'éclairer davantage l'esprit, n'a pas jugé à propos de s'en tenir à la seule raison tirée de la différence des tems, lorsqu'il s'est agi du mouvement retardé d'un corps qui remonte, & que la conformité qui se trouve entre le mouvement retardé du corps qui s'enfonce dans l'argile, & du corps qui remonte l'engageoient à se servir des mêmes preuves; voici de quelle manière il applique ce qu'il a dit au sujet des corps qui remontent non-seulement aux corps qui s'enfoncent dans des corps, mais encore à tous les effets du mouvement & du choc des corps à ressort, page 30. de la premiere Edition, & 71. de la seconde.

Ce que je dis des espaces non parcourus, n'a pas moins lieu à l'égard de tous les autres effets du mouvement & du choc, par rapport aux espaces parcourus, & nous dirons de même que ce ne sont pas les parties de matiere déplacées ni les ressorts bandés ou aplatis qui donnent l'estimation & la mesure de la force motrice, mais les parties de matiere non-déplacées, les ressorts non-bandez & non-applatis, & qui l'auroient été si la force motrice se fut toujours soutenue, & n'eut point souffert de diminution, &c.

Pour en donner un exemple: Soient des impulsions, des obstacles, ou des résistances quelconques infiniment repetées & placées sur le chemin AF (Fig. 246.) du mobile A, telles par exemple que les particules de matiere 1, 2, 3, 4, 5, &c. ou des lames de ressort à déplacer, à abbatre, à soulever, ou à bander. Il est évident que si le mobile avec un degré de vitesse & de force peut en soulever deux en un instant par un mouvement uniforme, c'est-à-dire, en conservant ou en reprenant toujours toute sa force & toute sa vitesse, après avoir soulevé la premiere, & qu'au contraire il n'en puisse soulever

qu'une par un mouvement retardé, toute sa force & toute sa vitesse s'étant consumée à soulever ou à bander la première, il est, dis je, évident que le mobile A ayant deux degrez de force, & autant de vitesse, souleveroit ou banderoit quatre de ces lames de ressort dans un instant par un mouvement uniforme. Mais il perd dans cet instant & en bandant les premiers ressorts un degre de sa force & de sa vitesse, & un degre de force & de vitesse perdue, donne par hypothese une lame de moins soulevée, ou bandée; donc il n'en bandera que trois au premier instant; sçavoir 1, 2, 3, & il s'en faudra la lame 4 & l'espace CD qu'il ne fasse ce qu'il auroit fait s'il n'étoit rien perdu. Cependant comme il lui reste encore un degre de force & de vitesse qui lui seroient soulever deux lames 4, 5, & parcourir le chemin CDE en un second instant, si son mouvement demeurait uniforme, il doit continuer de se mouvoir & d'agir contre les resistances qui s'opposent à son mouvement; mais au lieu de deux, il n'en doit surmonter qu'une lame 4D, à cause que son mouvement y est retardé, & que sa force se trouve totalement éteinte. Ce qui fera en tout quatre portions de matiere déplacées, ou quatre ressorts bandez en vertu de deux degrez de force résultans de deux degrez de vitesse, & de l'action totale qui a duré deux instans J'appellerai donc, portions de matiere non-déplacées, ressorts non-soulevés, non-bandés, & en général, obstacles non-surmontés, tous ceux qui ne l'ont point été faute d'uniformité & de perseverance dans la force du mobile, sçavoir 4D dans le premier instant, 5E dans le second, &c. quoiqu'ils puissent être censés surmontés par la force contraire dont les impressions redoublées peuvent enfin arrêter entierement le mobile.

C'est ici où l'Auteur des Institutions de Physique paroît triompher par la façon dont il attaque ce raisonnement. Dans les obstacles surmontés, dit-il, page 430. comme les déplacemens de matiere, les ressorts fermez, &c. on ne peut reduire même par voye d'hypothese ou de supposition le mouvement retardé en uniforme, comme M. de Mairan l'avance dans son Memoire, & quelque estime que j'aye pour ce Philosophe, je ne crains point d'avancer qu'il dit ici une chose impossible; car il est aussi impossible qu'un corps avec la force necessaire pour fermer quatre ressorts, en ferme six (quelque supposition que l'on fasse) qu'il est impossible que 2 & 2 fasse 6. Si l'on suppose avec M. de Mairan que le corps n'auroit consumé aucune partie de sa force pour fermer quatre ressorts dans la premiere seconde d'un mouvement uniforme, je dis que les quatre ressorts ne seroient point fermez, ou qu'ils le seroient par quelque autre agent; que si on suppose au con-

traire qu'ayant épuisé une partie de sa force à fermer les trois premiers ressorts dans la première seconde, & n'ayant plus que la force capable de lui faire fermer un ressort dans la deuxième seconde, le corps reprendroit une partie de sa force pour en fermer deux dans la deuxième seconde par un mouvement uniforme ; (car il faut faire l'une ou l'autre de ces suppositions), on suppose dans le dernier cas que le corps à renouvelé sa force, ce qui sort entièrement de la question. Ainsi il n'est point vrai que la force totale d'un corps soit représentée parce qu'elle en fait, si elle ne se fut point consumée ; car elle ne pouvoit jamais faire un effet plus grand que celui qui l'a détruite, & ne contenoit en puissance que ce qu'elle a déployé dans l'effet produit.

Il n'y a qu'à lire l'endroit de la Dissertation de M. de Mairan que j'ai rapporté pour voir qu'on n'attaque ici qu'un vain phantôme bien éloigné de la réalité. De quelque matière que l'on traite, il est toujours permis de faire telle supposition que l'on voudra possible ou impossible, pourvu que les conséquences que l'on en tire se trouvent renfermées dans les bornes de la possibilité. Que M. de Mairan suppose qu'un corps qui se meut d'un mouvement uniforme, & qui rencontre des obstacles sur ses pas, reprenne toute sa force à chaque obstacle qu'il renverse, on ne sauroit le trouver mauvais, sans être de mauvaise humeur ; chaque obstacle dans cette supposition sera renversé par la partie que le corps perdra de sa force, & le mouvement de ce corps sera cependant uniforme en vertu de la reproduction de la partie perdue qui se fera dans l'instant ; ce seroit uniquement vouloir chicaner que de dire que ces obstacles ou ressorts ne seroient point fermés, ou qu'ils le seroient par quelqu'autre agent.

Mais si après cette supposition M. de Mairan concluoit qu'un corps qui consume toute sa force à détruire quatre obstacles, pourroit ne la consumer qu'après en avoir détruit six ou huit ; dès-lors le vice du raisonnement seroit manifeste, & quelque estime que l'on ait pour ce Philosophe, on ne craindroit point d'avancer que son sentiment seroit faux. M. de Mairan est trop éclairé pour donner dans des Paralogismes de cette nature. Un corps qui consume sa force à fermer quatre ressorts, n'en fermera jamais six en agissant selon les mêmes loix, cela est indubitable, & le contraire est aussi impossible, qu'il est impossible que 2 & 2 fassent 6. Mais il est sûr aussi que si ce corps pouvoit reprendre toute sa force à chaque ressort qu'il ferme, il pourroit en fermer huit dans un tems égal à celui qu'il a employé à en

fermer quatre lorsque sa force se consumoit, & c'est uniquement ce que M. de Mairan a prétendu, & ce qu'il a pu prétendre conformément à la doctrine de Galilée ; or c'est de ce raisonnement que l'on ne scauroit éluder que ce scavant Geometre tire la solution de la dispute. Le corps B avec 1 de force & 1 de vitesse uniforme pourroit dans une seconde fermer deux ressorts 1, 2, s'il pouvoit reprendre sa force après avoir renversé le premier, mais avec 1 de force & 1 de vitesse retardée, il ne ferme qu'un ressort dans une seconde. De même le corps A égal à B ayant 2 de force & 2 de vitesse uniforme, pourroit fermer quatre ressorts dans une seconde, s'il pouvoit reprendre toute sa force à mesure qu'il ferme chaque ressort, mais avec 2 de force & 2 de vitesse retardée, il ne ferme dans une seconde que trois ressorts, & il perd un degré de vitesse ; il est évident qu'à la fin de la premiere seconde, le corps A se trouvant dans le cas où étoit le corps B, au commencement de la premiere seconde pourroit fermer deux ressorts dans la deuxieme seconde si la vitesse 1 & la force 1 qui lui reste à la fin de la premiere, pouvoit se conserver sans rien perdre, & qu'au contraire sa force s'affoiblissant, il ne fermera qu'un ressort dans la deuxieme seconde. Or puisque le corps A en conservant toute sa force, comme il a été dit, auroit fermé six ressorts dans deux secondes, c'est-à-dire, quatre dans la premiere seconde, si sa vitesse 2 s'étoit conservée, & deux à la deuxieme seconde, si sa vitesse 1 eut été uniforme, & que le mouvement retardé par les pertes qu'il fait ne lui permet de fermer dans ces deux mêmes secondes que quatre ressorts, il s'ensuit qu'il a perdu une quantité de force qui lui auroit fait fermer encore deux ressorts ; par la même raison on trouvera que le mouvement retardé du corps B lui a fait perdre une quantité de force avec laquelle il auroit fermé encore un ressort dans la premiere seconde. Mais les pertes que les deux corps ont faites sont la cause de leur destruction & les causes sont proportionnelles aux effets ; donc les pertes 2 & 1 sont comme les forces des corps A, B, & par conséquent les forces des corps A, B, sont comme les ressorts non-fermés, & qui l'auroient été si les corps avoient pu conserver dans chaque seconde la vitesse qu'ils avoient au commencement de cette seconde.

Il faut observer ici que M. de Mairan ne dit point que le corps A, à la fin de la premiere seconde, n'aye plus qu'une Force uniforme capable de lui faire fermer un ressort dans la deuxi-

me seconde , mais que ce corps ayant encore un degré de vitesse & un de force , pourroit dans la deuxième seconde fermer deux ressorts si son mouvement ne se retardoit point , ce qui est bien différent de ce que l'Auteur des Institutions de Physique semble vouloir lui faire dire pour avoir droit d'en conclure qu'il sort de la question.

Il faut encore observer que quoique les obstacles que le corps A surmonte soient tous égaux entr'eux , cependant les Forces qu'ils déploient contre ce corps ne sont pas égales ; car les espaces $A1$, 12 , 23 , &c. sur lesquels on doit concevoir que les obstacles 1 , 2 , 3 , &c. sont repandus , étant tous égaux entr'eux , le corps A emploie plus de tems à parcourir le second qu'à parcourir le premier , à cause que sa force diminuant , sa vitesse diminue ; ainsi l'obstacle 1 séjourne moins de tems sur le corps A que l'obstacle 2 , & par conséquent il lui ôte une moindre vitesse ; par la même raison l'obstacle 2 , ôte au corps A une vitesse moins grande que celle que la troisième 3 lui ôte , & ainsi des autres. Or comme nous supposons que les trois premiers ressorts ou obstacles détruisent un degré de force & de vitesse , & que le quatrième détruit un autre degré de force & de vitesse , il s'ensuit que les résistances des trois premiers obstacles prises ensemble , sont égales à la résistance du quatrième ; & ceci va me servir à répondre à une objection qu'on pourroit me faire sur ce que j'ai dit ci-dessus touchant les corps qui remontent avec leur vitesse acquise à la fin de leur chute.

Supposé , me dira-t-on , que le corps A (*Fig. 247.*) remonte de D vers A avec la vitesse acquise par sa chute à la fin de deux secondes AC , CD , ce corps parcourroit dans une seconde seconde une espace DEMC quadruple de l'espace ACH ; si la pesanteur n'agissoit plus sur lui , mais comme la pesanteur s'oppose à son passage , il ne parcourra dans la première seconde en remontant qu'une espace DEHC , triple de l'espace CHA , qu'il parcourra pendant la deuxième seconde ; or vous avez dit , ajoutera-t-on , que ce corps ne rencontrera qu'un obstacle dans la première seconde , non plus que dans la deuxième , donc , ou il faut que M. de Mairan ne mette qu'un obstacle dans la première seconde , ou que vous en mettiez trois au lieu d'un.

Je repons à cela que lorsque j'ai dit que le corps A ne rencontreroit qu'un obstacle à chaque tems de son mouvement , j'ai entendu l'obstacle total qui repondoit à l'espace total parcouru à la

fin de chaque tems; car il est sûr que ces obstacles totaux sont des résistances qui se trouvent égales à la fin des tems égaux, c'est à-dire, qui détruisent des degrez égaux de vitesse; mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse dire qu'il y a trois obstacles qui répondent aux trois espaces égaux qui composent l'espace total DEHC, parcouru en remontant dans la première seconde; car la pesanteur agissant toujours sur le corps pendant qu'il tend à parcourir les quatre espaces compris dans DEMC, & trouvant plus de vitesse au corps A pendant le premier espace, elle fait moins d'impression sur lui qu'elle n'en fait pendant le second où la vitesse est diminuée, & par la même raison, elle en fait moins pendant le second qu'elle n'en fait pendant le troisième; ainsi ces différentes impressions peuvent être regardées comme différens obstacles égaux en eux-mêmes, mais qui résistent plus ou moins à proportion de la durée de leur résistance ou du séjour qu'ils font sur le corps, lequel emploie plus de tems à parcourir un espace à mesure que sa vitesse diminue par la résistance que l'obstacle précédent lui a fait, mais ces trois obstacles ensemble n'ôtant à la fin de l'espace DEHC qu'un degre de vitesse, de même que l'obstacle du second instant CA n'en ôte qu'un, la résistance des trois premiers obstacles est égale à la résistance du quatrième.

FIN.

On voit ici le parfait rapport qui se trouve entre le mouvement retardé, par la pesanteur & le mouvement retardé par des obstacles surmontés, comme les déplacements de matiere dans les enfoncemens, les ressorts formés dans le choc des corps Elastiques, &c. Dans le mouvement retardé par la pesanteur, les résistances de cette pesanteur vont en augmentant dans les espaces égaux que le corps parcourt, quoique la pesanteur soit toujours la même, & cependant ces résistances dans des tems égaux font perdre des vitesses égales; de plus ces vitesses perdues à la fin du mouvement sont la mesure des Forces, & non pas les espaces parcourus: tout cela a été démontré par M. de Mairan, de façon qu'il n'est pas possible de refuter son raisonnement, on la vü ci-dessus. Or dans le enfoncemens de matiere ou dans le choc des corps elastiques, les obstacles qu'il faut déplacer ou les ressorts qu'il faut fermer dans des espaces égaux, sont égaux entr'eux, de même que la pesanteur est égale à elle-même; car nous supposons que dans les enfoncemens les couches de matiere qu'il faut déplacer sont homogenes, & que dans

le choc des corps élastiques les ressorts à fermer sont égaux ; donc puisque la pesanteur dans des espaces égaux fait des résistances d'autant plus grandes , que les espaces s'éloignent davantage du premier espace , & que cependant ces résistances dans des tems égaux , ne font perdre au corps que des vitesses égales , il s'ensuit que les couches égales de matière qu'il faut déplacer dans les enfoncemens , & les ressorts égaux qu'il faut fermer dans le choc des corps durs doivent faire des résistances & retrancher des vitesses proportionnelles aux résistances de la pesanteur & aux vitesses qu'elle retranche dans des tems égaux , car les causes étant proportionnelles , les effets doivent l'être aussi , & par conséquent il s'ensuit , que puisque la quantité des Forces éteintes par la pesanteur doit s'estimer par les vitesses éteintes , ou par les espaces non parcourus , lesquels sont entr'eux comme les vitesses acquises , & non pas comme les carrés des vitesses , la quantité des Forces éteintes par le developement des matières ou par des ressorts , doit s'estimer aussi par les vitesses éteintes , ou par les couches de matière non déplacées ou les ressorts non fermés , & qui l'auroient été si le corps avoit pu conserver toute sa force de chaque instant.

On ne peut mieux démontrer jusqu'où va la prévention des Partisans des Forces vives , qu'en faisant voir l'erreur où M. Wolf est tombé. Ce Géomètre célèbre par ses savans écrits démontre dans sa Méchanique , que dans le choc de deux corps à ressort , soit que l'un soit en repos , ou que tous les deux se meuvent dans un même sens , ou dans un sens contraire , les carrés des vitesses après le choc multipliés par les masses sont égaux aux carrés des vitesses avant le choc multipliés par les masses. Cette Proposition est vraie , quelque supposition que l'on fasse , pourvu que l'on ne veuille point avoir égard aux directions contraires des vitesses , c'est à-dire , pourvu qu'on ne veuille point retrancher le mouvement qui va d'un sens de celui qui va d'un sens opposé , comme font les Cartesiens ; les Formules Algébriques nous en assurent , & ces Formules ne sauroient nous tromper : mais que conclure de-là ? *C'est* , dit M. Wolf , *qu'il y a toujours une même quantité de Forces vives , avant & après le choc.* Or c'est ici où est l'erreur. Il est certain qu'il y a toujours une même quantité de mouvement avant & après le choc , en ne prenant pour mouvement que celui qui est dans la direction du corps qui avoit le plus de force avant le choc , & en retranchant de ce mouvement

mouvement celui qui s'y trouveroit opposé après le choc. Les Défenseurs des Forces vives en conviennent avec ceux qui sont du parti contraire ; mais qu'il y ait une même quantité de Forces agissantes en négligeant les différentes directions , cela ne sauroit être parce que dans ce sens il arrive toujours que la quantité de mouvement après le choc se trouve plus grande que la quantité de mouvement avant le choc. Comme la plupart des experiences qu'on rapporte en faveur des Forces vives , supposent que le corps choqué soit en repos avant le choc ; tout ce que nous allons dire roulera sur cette supposition.

Soient donc les corps A , B (*Fig. 248.*) dont le premier A se meut selon la direction AB sur un plan extrêmement poli , & le second B est en repos sur ce plan ; je nomme M la masse du corps A , V sa vitesse , & m la masse du corps B. Tout le monde convient que si ces deux corps ne sont pas élastiques , ils se mouvront tous les deux après le choc dans la même direction , avec une vitesse commune exprimée par $\frac{MV}{M+m}$, multipliant donc cette vitesse d'une part par la masse de A , & de l'autre par la masse de B , la quantité de mouvement de A après le choc sera $\frac{MMV}{M+m}$, & celle de B sera $\frac{mMV}{M+m}$, c'est pourquoi ajoutant ces deux quantitez ensemble , la somme sera $\frac{MMV}{M+m} + \frac{mMV}{M+m} = MV$; or la quantité de mouvement avant le choc étoit aussi MV ; donc il se trouve après le choc une quantité de mouvement égale à la quantité de mouvement avant le choc.

Supposons maintenant que les deux corps soient élastiques , on convient encore que la vitesse de A après le choc sera $\frac{MV - mV}{M+m}$, & celle de B $\frac{2MV}{M+m}$ d'où l'on voit que si M est plus grand que m , le corps A après le choc suivra sa première direction & ira moins vite que B , & que si M est moindre que m , le corps A rebroussera chemin , à cause que sa vitesse $\frac{MV - mV}{M+m}$ sera négative. Multipliant donc ces deux vitesses par leur masses , la quantité de mouvement de B après le choc sera $\frac{2mMV}{M+m}$ & celle de A sera $\frac{MMV - mMV}{M+m}$, si sa direction est la même que celle de B ; & $\frac{mMV - MMV}{M+m}$ si sa direction est opposée à la direction de B ;

c'est pourquoi ajoutant ensemble ces deux quantités lorsqu'elles ont la même direction, ou retranchant la quantité de mouvement de A de celle de B lorsque les directions sont contraires, la somme ou le reste sera pour l'un & l'autre cas $\frac{2m.MV - m.MV - MMV}{M+m}$
 $= MV$; or MV est la quantité de mouvement de A avant le choc, donc il y a encore ici même quantité de mouvement avant & après le choc, & cela arrivera toujours toutes les fois qu'on ne prendra pour quantité de mouvement après le choc que celle qui est selon la direction du corps A, & qu'on en retranchera celle qui pourroit lui être opposée.

Pour fixer notre imagination dans ces deux cas, supposons d'abord $M=3$, $V=2$, & $m=2$, la vitesse de A après le choc sera $\frac{MV - mV}{M+m} = \frac{6-4}{5} = \frac{2}{5}$, & celle de B sera $\frac{2MV}{M+m} = \frac{4}{5}$; multipliant donc ces vitesses par leur masses, la quantité de mouvement de A après le choc sera $\frac{4}{5}$, & celle de B sera $\frac{8}{5}$, ainsi ajoutant ces deux quantités ensemble, à cause qu'elles sont dans la même direction, leur somme sera $\frac{12}{5}$; or la quantité de mouvement avant le choc est $3 \times 2 = 6 = \frac{12}{5}$, donc cette quantité est égale à la quantité de mouvement après le choc.

Pour le second cas, supposons $M=2$, $V=2$, & $m=3$, la vitesse de A après le choc étant négative sera $\frac{mV - MV}{M+m} = \frac{6-4}{5} = \frac{2}{5}$, c'est-à-dire, A rebroussera chemin avec $\frac{2}{5}$ de vitesse, & celle de B sera $\frac{2MV}{M+m} = \frac{8}{5}$, multipliant donc ces vitesses par leur masses, la quantité de mouvement de A après le choc, selon la direction contraire sera $\frac{4}{5}$, & celle de B selon la direction primitive sera $\frac{16}{5}$; ainsi retranchant la quantité de mouvement de A de la quantité de mouvement de B, la quantité de mouvement qui restera selon la direction primitive sera $\frac{16}{5} - \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 4$; or la quantité de mouvement de A avant le choc est $2 \times 2 = 4$, donc cette quantité est égale à celle qui se trouve après le choc.

Les Défenseurs des Forces vives nous accordent aisément tout ceci dans le sens que je viens d'expliquer; mais comme dans le second cas le corps A ne laisse pas que d'avoir un vrai mouvement, quoique sa direction soit dans un sens opposé à celle du corps B, & que dans ce sens il y a une plus grande quantité de mouvement après le choc qu'avant le choc, ce qui ne peut provenir que d'une augmentation de force qui se fait dans l'in-

stant du choc, ils prétendent qu'au lieu de dire que les Forces agissantes sont ici proportionnelles aux quantités de mouvement comme on l'a toujours cru, il faut dire au contraire qu'elles sont entr'elles comme les quarrés des vitesses multipliés par les masses, tandis que les quantités de mouvement ne sont que comme les masses multipliées par les vitesses, & cela par la raison que dans tous les cas, il se trouve toujours que les quarrés des vitesses après le choc multipliés par les masses, sont égaux aux quarrés des vitesses avant le choc multipliés par les masses; mais ce raisonnement ne conclut rien, & c'est ce que nous allons faire voir.

Dans le mouvement uniforme, les Forces des corps en mouvement sont entr'elles comme les masses multipliées par les vitesses, ou par les espaces parcourus dans des tems égaux: *Le tems est à considérer*, dit l'Auteur des Institutions de Physique, *dans les occasions dans lesquelles pendant un plus long tems, il peut y avoir un plus grand effet produit comme dans le mouvement uniforme, car alors l'espace total parcouru, qui est le seul effet produit, sera plus ou moins grand, selon que le mouvement du corps sera continué plus ou moins de tems.* Or ce principe posé, voici comme je raisonne.

Le corps A avant le choc se meut d'un mouvement uniforme, puisque nous supposons qu'il est sur un plan bien poli exempt de frottement, & que nous faisons abstraction de la résistance de l'air; donc la force du corps A avant le choc est comme le produit de sa masse par sa vitesse; de même les corps A, B après le choc se meuvent d'un mouvement uniforme, car nous ne voyons rien après le choc qui augmente ou diminue les vitesses que le choc leur a données, donc les forces de ces corps sont aussi comme les produits de leur masses par leur vitesses, & par conséquent il n'est point vrai de dire, comme M. Wolf le prétend, que les forces des corps à ressort, avant ou après le choc, soient comme les quarrés des vitesses multipliés par les masses; quoiqu'il soit vrai que les produits des quarrés des vitesses par les masses soient égaux avant & après le choc.

Mais d'où vient cette multiplication de forces dans les corps à ressort, lors qu'après le choc ils suivent des directions contraires? Elle vient uniquement de leur élasticité qui les rend capables d'être comprimés & de se retabliir, & non pas de quelque différence qui se trouve dans les Forces motrices lorsqu'elles mettent en mouvement des corps qui sont élastiques ou qui ne le sont pas. Supposons le corps $A = M = 2$, sa vitesse $V = 2$

Nij

& $B = m = 3$, si ces deux corps ne sont pas élastiques, leur vitesse commune après le choc sera $\frac{MV}{M+m} = \frac{4}{5}$, donc la quantité de mouvement de A après le choc sera $\frac{4}{5}$ & celle de B $\frac{12}{5}$, & ajoutant ensemble ces deux quantités la somme sera $\frac{16}{5} = 4$, & par conséquent cette somme sera égale à la quantité de mouvement $2 \times 2 = 4$ du corps A avant le choc.

Maintenant supposons que ces corps deviennent élastiques & que $A = 2$ avec la vitesse 2 choque $B = 3$ qui est en repos; la force de A avant le choc sera encore 4, puisque son mouvement est uniforme; ainsi si nous ne faisons attention qu'au mouvement communiqué par la force motrice, les deux corps A, B après le choc, iroient selon la même direction avec une vitesse commune égale à $\frac{4}{5}$, mais comme l'élasticité de ces corps leur donne la force de se comprimer mutuellement & de se redresser, force qui ne vient point de la Force motrice, & qui en est même tout-à-fait indépendante; il arrive comme tout le monde en convient que cette force de ressort agit avec la vitesse primitive 2 qu'elle distribue aux deux corps réciproquement à leur masses, c'est-à-dire, que si on partage la vitesse 2 ou $\frac{4}{2}$ en deux parties $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, qui soient entr'elles comme les masses 2, 3, le corps B reçoit la partie $\frac{2}{3}$, laquelle jointe à $\frac{4}{5}$ que le mouvement de A lui communique indépendamment du ressort, fait $\frac{14}{15}$ de vitesse pour le corps B, & le corps A reçoit $\frac{2}{3}$, mais dans une direction contraire, à cause que c'est en conséquence de la réaction du corps B qu'il reçoit cette vitesse; or indépendamment du ressort, le corps A après le choc à $\frac{4}{5}$ de vitesse selon la direction primitive, donc les $\frac{2}{3}$ qu'il reçoit de la force du ressort selon la direction contraire détruisent ces $\frac{4}{5}$, & il lui reste $\frac{2}{15}$ de vitesse selon la direction contraire; c'est pourquoi multipliant les masses par les vitesses, la quantité de mouvement de A après le choc sera $2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$, & celle de B sera $3 \times \frac{14}{15} = \frac{14}{5}$, donc si l'on n'a pas égard à la différence des directions, la somme des quantités de mouvement après le choc sera $\frac{18}{5}$, & par conséquent cette somme sera plus grande que la quantité de mouvement $4 = \frac{20}{5}$ du corps A avant le choc; & cette augmentation de quantité de mouvement ou de force ne viendra pas de la Force motrice qui n'est que comme 4, mais uniquement de la réaction des ressorts.

Il est vrai que si l'on fait le carré $\frac{14}{15}$ de la vitesse $\frac{14}{15}$ de B après le choc, & qu'on la multiplie par la masse 3, ce qui donne $\frac{196}{15}$,

& qu'après avoir multiplié le carré $\frac{4}{25}$ de la vitesse $\frac{2}{5}$ de A après le choc par la masse 2, ce qui donne $\frac{8}{25}$, on ajoute $\frac{192}{25}$ à $\frac{8}{25}$, la somme sera $\frac{200}{25} = 8$, & par conséquent elle sera égale au carré 4 de la vitesse de A multiplié par sa masse 2, mais cela ne fait rien en faveur des Forces vives, puisque nous avons fait voir que les Forces agissantes de A & B ne sont pas comme les carrés des vitesses multipliés par les masses, mais simplement comme les masses multipliées par les vitesses.

M. Herman ayant fait une expérience dans laquelle la masse du corps élastique choquant A étoit 1, sa vitesse 2, & la masse du corps élastique B qui étoit en repos avant le choc étoit = 3; il s'est trouvé nécessairement que la vitesse de l'un & l'autre corps A, B, après le choc a été 1, il est facile de le justifier en appliquant à ce cas les formules que nous avons rapportées; or comme le carré de 1 n'est pas différent de 1; il est arrivé encore que la force de A après le choc a dû être 1, & que celle de B a dû être 3 soit qu'on veuille que ces forces soient entr'elles comme les produits des vitesses par les masses, ou comme les produits des masses par les carrés des vitesses, l'Auteur des Institutions de Physique, page 435 remarque que ceci est vrai *de l'aveu même de ceux qui refusent d'admettre les forces vives*, & nous n'aurions garde de le désavouer; mais que s'en suit-il de ceci? Le calcul & l'expérience nous disent que le corps A & le corps B ont chacun 1 de vitesse; mais ni l'un ni l'autre ne nous dit si pour mesurer les forces agissantes cet 1 doit être regardé simplement comme 1, ou s'il faut le prendre comme 1 élevé au carré, & par conséquent cette seule expérience ne peut pas plus autoriser les partisans des forces vives à soutenir que les forces agissantes des corps A, B, après le choc sont comme les masses multipliées par les carrés des vitesses, qu'elle ne nous donneroit droit de dire que ces forces sont comme les produits des vitesses par les masses, si nous n'avions pas d'autres preuves à apporter de cette vérité.

Supposons, en effet, qu'un Geometre peu éclairé s'appuyant sur cet exemple osât avancer que quoique les forces après le choc soient comme les masses multipliées par les vitesses, ou comme les quantités de mouvement, il arrive cependant que la somme de ces forces est égale au carré de la vitesse de A avant le choc multiplié par sa masse, par la raison qu'il se trouve dans cet exemple que la somme $1+3=4$ des forces après le choc est égale au

quarré 4 de la vitesse 2 de A avant le choc multiplié par sa masse 1. Il est certain qu'un hypothèse si chimérique seroit bientôt renversée, & qu'il suffiroit pour cela de faire voir à son Auteur que ce n'est ici qu'un cas particulier qui se trouveroit contredit par tous les autres cas où l'on changeroit la vitesse ou le rapport des masses. Supposons, par exemple $A = 2$, $V = 2$, & $B = 3$; deslors la force de A après le choc seroit $\frac{2}{3}$, & celle de B $\frac{2}{3}$, comme on a vu ci-dessus, & par conséquent leur somme $\frac{4}{3}$ ne seroit pas égale au quarré 4 de la vitesse primitive de 2 multiplié par sa masse 2, ce qui seroit $8 = 2^2$, & il en seroit de même d'une infinité d'autres suppositions.

Je conviens que les partisans des forces vives peuvent répondre que dans le cas de M. Herman comme dans tous les autres, les quarrés des vitesses après le choc multipliés par les masses, sont égaux au produit de la masse de A par le quarré de sa vitesse avant le choc; mais de quoi cette réponse peut-elle leur servir? Le principe sur lequel ils se fondent est incontestable, c'est une propriété essentielle au choc des corps à ressort que les quarrés des vitesses après le choc multipliés par les masses sont égaux au quarré de la vitesse primitive du corps choquant multiplié par sa masse, & cette propriété vient de l'élasticité des corps, puisqu'on ne voit rien de semblable lorsque les corps ne sont pas élastiques, il faudroit renoncer aux formules reçues de tous les Sçavans pour disconvenir de cette vérité. Mais s'en suit-il delà que les forces motrices ou agissantes soient comme les masses multipliées par les quarrés des vitesses, je ne le vois pas, & l'on ne viendra jamais à bout de le démontrer. A la vérité, ce n'est que par le mouvement que la force du ressort se manifeste, & par conséquent il faut que les forces motrices agissent afin que nous puissions juger si les corps sont à ressort, & jusqu'à quel point ils le sont. Mais comme cela ne nous dit autre chose, sinon que les forces motrices sont des causes occasionnelles, ou si l'on aime mieux des conditions sans lesquelles le ressort n'agiroit point, & que tous les Physiciens sçavent bien que ces conditions ne sont pas des causes efficaces; il reste toujours aux défenseurs des forces vives à nous donner les fondemens de leurs prétentions. Ce n'est point à des expériences répétées que nous croyons devoir nous en tenir, ces expériences avec quelque soin qu'elles soient faites ne nous montrent que des effets, & ces effets nous disent que les quarrés des vitesses après le choc multipliés par les masses sont égaux

L'on ne donne point ce que l'on n'a pas, c'est un axiome reçu de tout l'Univers, & l'Auteur des Institutions de Physique ne manque pas de s'en servir pour nous montrer qu'un corps qui ne choque qu'avec une certaine force ne peut pas produire une force plus grande que celle qu'il avoit, & qu'ainli si après le choc on trouve plus de force qu'il ne paroïssoit y en avoir auparavant, on se trompoit sans doute sur l'estimation de cette force primitive. Voyons donc qui se trompe de lui ou de nous.

Je reprends son propre exemple qui est celui de M. Herman. Un corps A avec 1 de masse & 2 de vitesse choque le corps B qui est en repos, & qui a 3 de masse; nous supposons que les deux corps sont élastiques. Après le choc, il y a 4 de force; donc, dit-il, le corps A devoit avoir 4 de force avant le choc; car s'il avoit eu moins, il auroit donné plus qu'il n'avoit; donc nous avons mal estimé sa force en multipliant sa masse par sa vitesse. Mais comment nous sommes-nous donc trompés? le corps A se mouvoit d'un mouvement uniforme avant le choc, sa masse étoit 1 & sa vitesse 2, & dans le mouvement uniforme la force est comme la masse multipliée par la vitesse, ou par l'espace parcouru dans un certain tems, l'Auteur des Institutions de Physique en tombe d'accord, page 425; donc il faut qu'il se soit trompé lui-même, ou que nous ne nous trompions pas, mais ne proposons point cette alternative; personne ne se trompe ici, le corps A n'a que 2 de force avant le choc, cela est certain, & après le choc, il y a plus de force qu'il n'y en avoit auparavant, cela est incontestable; d'où vient donc cette différence? c'est de l'élasticité des corps que l'Auteur des Institutions de Physique n'a pas voulu distinguer de la force motrice; le corps A ne peut donner ce qu'il a, mais la force du ressort supplée au reste. Voilà la solution.

M. Huguens a démontré qu'un corps en repos qui ne reçoit le choc que par l'entremise de plusieurs autres corps qui sont entre lui & le corps choquant, reçoit plus de force que si le corps choquant le frappoit immédiatement; or je demande si cette force reçue par le corps choqué étoit dans le corps choquant dans le tems, par exemple, qu'il n'y avoit que trois corps en repos entre le choquant & choqué; si on me dit oui, je mets entre les deux deux fois plus de corps en repos, trois fois plus, & ainsi de suite à l'infini, & comme il arrivera, selon la Démonstration de M. Huguens que la vitesse du corps choqué par l'entremise de tous

choquante avec 1 de vitesse, & aura par conséquent 3 de force; donc après le choc il y aura 4 de force dont le mouvement sera encore uniforme; car nous ne voyons rien après le choc qui augmente ou diminue l'impression que le choc aura donné aux deux boules, à moins qu'il n'arrive par hazard que d'autres boules se trouvent sur leur chemin. Or je dis ces 4 de force seront doubles de la force 2 que la boule choquante avoit avant le choc; donc il n'est pas possible que l'effort 2 que la personne a fait pour pousser la boule choquante soit la cause de cette force 4, autrement il faudroit dire ou que l'effet peut n'être pas proportionnel à sa cause, ou que l'effort 2 a dû devenir comme 4 en conséquence d'un choc arrivé par hazard, ce qui est absurde, attendu que les deux personnes qui ont poussé les deux premières boules ayant fait des efforts comme 2 à 1, & ayant ensuite abandonné les boules à elles-mêmes, ces efforts non plus que les impressions qu'ils ont faites, ne sçauroient par eux-mêmes changer de rapport, à moins qu'une cause étrangere ne vienne les alterer. Il est donc sûr & constant que la boule choquante n'avoit pas avant le choc une force qui fut comme le produit du quarré de sa vitesse par sa masse, c'est-à-dire, une force 4, & que par conséquent s'il s'est trouvé 4 de force après le choc, cette augmentation ne peut être venue que d'une cause étrangere à la force motrice, laquelle cause ne peut être ici que la mutuelle réaction des ressorts; de même la boule choquante, & la choquée ayant reçu du choc, des forces comme 1 & 3, & des vitesses uniformes, il est visible qu'elles se meuvent de la même façon que si elles avoient été poussées par deux personnes qui auroient fait des efforts comme 1 & 3 & qui les auroient ensuite abandonnées à elles-mêmes; d'où il suit que les forces de ces boules ne peuvent être non plus que comme leurs masses multipliées par les vitesses, & non par leurs quarrés; donc ni avant ni après le choc les forces des corps élastiques ne sçauroient être dans des rapports tels que les défenseurs des forces vives leur attribuent, & par conséquent leur expériences ne nous prouvent tout au plus, sinon que dans le choc direct des corps élastiques, il y a plus de force après le choc qu'auparavant, dans le cas où la boule choquante rebrousse chemin, de même que dans les chocs obliques où la force se trouve augmentée par les changemens de direction, comme on a vû ci-dessus dans la Réponse à la seconde preuve de M. Bernoulli.

L'on

L'on ne donne point ce que l'on n'a pas, c'est un axiome reçu de tout l'Univers, & l'Auteur des Institutions de Physique ne manque pas de s'en servir pour nous montrer qu'un corps qui ne choque qu'avec une certaine force ne peut pas produire une force plus grande que celle qu'il avoit, & qu'ainfi si après le choc on trouve plus de force qu'il ne paroïssoit y en avoir auparavant, on se trompoit sans doute sur l'estimation de cette force primitive. Voyons donc qui se trompe de lui ou de nous.

Je reprends son propre exemple qui est celui de M. Herman. Un corps A avec 1 de masse & 2 de vitesse choque le corps B qui est en repos, & qui a 3 de masse ; nous supposons que les deux corps sont élastiques. Après le choc, il y a 4 de force ; donc, dit-il, le corps A devoit avoir 4 de force avant le choc ; car s'il avoit eu moins, il auroit donné plus qu'il n'avoit ; donc nous avons mal estimé sa force en multipliant sa masse par sa vitesse. Mais comment nous sommes-nous donc trompés ? le corps A se mouvoit d'un mouvement uniforme avant le choc, sa masse étoit 1 & sa vitesse 2, & dans le mouvement uniforme la force est comme la masse multipliée par la vitesse, ou par l'espace parcouru dans un certain tems, l'Auteur des Institutions de Physique en tombe d'accord, page 425 ; donc il faut qu'il se soit trompé lui-même, ou que nous ne nous trompions pas, mais ne proposons point cette alternative ; personne ne se trompe ici, le corps A n'a que 2 de force avant le choc, cela est certain, & après le choc, il y a plus de force qu'il n'y en avoit auparavant, cela est incontestable ; d'où vient donc cette différence ? c'est de l'élasticité des corps que l'Auteur des Institutions de Physique n'a pas voulu distinguer de la force motrice ; le corps A ne peut donner ce qu'il a, mais la force du ressort supplée au reste. Voilà la solution.

M. Huguens a démontré qu'un corps en repos qui ne reçoit le choc que par l'entremise de plusieurs autres corps qui sont entre lui & le corps choquant, reçoit plus de force que si le corps choquant le frappoit immédiatement ; or je demande si cette force reçue par le corps choqué étoit dans le corps choquant dans le tems, par exemple, qu'il n'y avoit que trois corps en repos entre le choquant & choqué ; si on me dit oui, je mets entre les deux deux fois plus de corps en repos, trois fois plus, & ainsi de suite à l'infini, & comme il arrivera, selon la Démonstration de M. Huguens que la vitesse du corps choqué par l'entremise de tous

ces corps se trouvera augmentée peu à peu à l'infini, je conclurai que le corps choquant que l'on suppose avoir toujours une même vitesse finie dans tous ces chocs avoit cependant dans lui-même une force infinie, puisqu'à la fin il aura produit une force infinie dans le corps choqué; or cela est absurde, donc il est absurde aussi de dire qu'un corps qui en choque un autre immédiatement ait toujours toute la force qui se trouve après le choc; la multiplication des forces dans le choc immédiat de même que dans le mediat, doit s'expliquer par l'élasticité des corps, & vouloir en chercher ailleurs la cause, c'est vouloir recourir à des qualités occultes à la maniere des anciens.

Je ne m'arrêterai pas davantage sur cette matiere, je crois en avoir assez dit pour montrer que M. de Mairan a découvert toute la fausseté de l'opinion des forces vives, & que sa Dissertation sera toujours vainement attaquée. Mais comme son Ouvrage renferme grand nombre d'autres preuves que je n'ai point rapportées, de peur d'être trop long, je conseille à ceux qui voudront être mieux instruits d'avoir recours à l'original, & d'y prendre cet esprit de justesse, de précision & de clarté qui y brille de toutes-parts.

L'illustre Auteur des *Institutions de Physique*, imprimées à Paris, chez Prault fils, Quai de Conti, en l'année 1740. n'ayant pas jugé à propos de mettre son nom à la tête de cet Ouvrage, j'ai cru devoir n'en parler que comme d'un Auteur anonime qui veut être inconnu, mais cela n'empêche point que je n'aye toute l'estime & le respect qui sont dûs à la sçavante érudition & au rang distingué de la personne qui a mis ce Traité au jour.

PROPOSITION XXXI.

107. Si deux corps A, B, (Fig. 32.) sont attachés à un levier AB, que nous regarderons comme n'ayant aucune pesanteur, & qu'on divise la distance AB en deux parties AC, CB reciproques aux corps, c'est-à-dire, que $AC, CB :: B, A$, le point C sera le centre commun de gravité, ou le centre autour duquel les deux corps seront en équilibre, c'est-à-dire le centre d'équilibre.

PREMIERE DEMONSTRATION.

Je prolonge le levier en D & en E, & je fais $AD = CB$ & $BE = AC$, d'où il suit que $DC = CE$; je divise DE en F, en sorte que DF soit à FE comme A est à B, & je conçois que la pesan-

teur du corps A, ou la masse s'étende uniformement le long de DF, & que la pesanteur ou la masse du corps B s'étende aussi uniformement le long de FE, les deux corps formeront un solide représenté par DE, dont toutes les parties égales auront une égale pesanteur, parce que nous supposons que les corps sont homogènes; ainsi concevant que le solide soit divisé en deux parties égales, c'est-à-dire qu'il soit divisé au point C, le centre de gravité de ce solide sera le point C. Or par la construction la ligne DE est double de la ligne AB, & cette ligne DE étant partagée en F en deux parties DF, FE proportionnelles aux deux parties CB, DE de la ligne AB, il est visible que DF est double de CB ou de DA = CB, & que FE est double de CA ou de BF = CA, donc DF, FE, sont coupées chacune en deux parties égales aux points A, B, & par conséquent le centre de gravité du corps A repandu uniformement sur DF est le point A qui divise ce corps en deux parties égales, & le centre de gravité du corps B repandu uniformement sur FE, est le point B qui divise aussi ce corps en deux parties égales; or que les masses des corps A, B, s'étendent uniformement de part & d'autre de leur centre, ou qu'elles se ramassent autour de ces mêmes centres, leurs pesanteurs sont toujours les mêmes, parce qu'elles sont toujours comme les masses, lesquelles restent les mêmes quoi qu'elles changent de figures; donc supposant que les corps A, B se ramassent autour de leurs centres A, B, le point C qui est leur centre commun de gravité lorsqu'ils sont étendus sera encore leur centre commun lorsqu'ils seront ramassés.

SECONDE DEMONSTRATION.

Supposons que le levier AB, que nous regardons comme inflexible, soit attaché au point C, autour duquel il puisse tourner comme autour d'un axe, le corps B ne peut se mouvoir & décrire l'arc PB, que le corps A ne se meuve & ne décrive dans le même tems l'arc AO; or les vitesses de deux corps qui se meuvent dans des tems égaux sont entr'elles comme les espaces parcourus, donc la vitesse de B est à la vitesse de A comme l'arc BP à l'arc AO; mais l'angle PCB étant égal à l'angle OCB qui lui est opposé au sommet, les secteurs PCB, OCA sont semblables, donc BP, AO :: CB, CA, & par conséquent les vitesses des corps B, A sont comme les distances CB, CA, ainsi les quantités de mouvement étant comme $B \times BP$, $A \times AO$,

c'est-à-dire comme les produits des masses par les vitesses, ou en raison composée de la raison des masses & de celle des vitesses, seront aussi en raison composée de la raison des masses & de celle des distances égale à la raison des vitesses, donc les quantités seront comme $B \times BC$, $A \times AC$, & par conséquent les forces seront dans la même raison, attendu que les forces sont les causes des quantités & leur sont proportionnelles. Or par la construction nous avons $B, A :: AC, BC$, donc $B \times BC = A \times AC$, ainsi la force du corps B est égale à la force du corps A, & les deux corps sont en équilibre autour du point C, qui par cette raison est leur centre de gravité.

Nota. Que dans cette Proposition & dans toutes celles où nous parlerons d'un levier AB (*Fig. 33.*) qui tourne autour d'un point fixe O, il faut toujours supposer que le levier est d'abord dans une situation horizontale, & que son mouvement se fait dans un plan perpendiculaire à l'horison, c'est-à-dire, que s'il faisoit une révolution entière, tous les points, par exemple les points B, D, E, décriroient des circonférences concentriques, dont les cercles seroient perpendiculaires à l'horison, & dans un même plan; & s'il ne faisoit qu'une partie de sa révolution, tous les points ou les poids attachés à ses points décriroient des parties de leurs circonférences proportionnelles à la partie de la révolution; par exemple, supposons que le levier s'arrête dans la position *ab*, & que dans cette position il n'ait décrit que la huitième partie de sa révolution, les arcs *Bb*, *Dd*, *Ee*, décrits par les points B, D, E, ou par les poids attachés à ces points, ne seroient que les huitièmes parties de leurs circonférences, & les secteurs *OBb*, *ODd*, *OEE* de ces arcs seroient dans le même plan des cercles perpendiculaires à l'horison.

COROLLAIRE I.

108. Donc pour trouver le centre de gravité de deux poids A, B (*Fig. 32.*) attachés à un levier, on n'a qu'à couper leur distance AB en deux parties AC, CB reciproques aux poids B, A; ou bien comme on a $A, B :: BC, AC$, on aura aussi $A + B, B :: BC + AC, AC$, c'est-à-dire, que si l'on prend une quatrième proportionnelle à la somme des poids $A + B$, à l'un des poids B & à la distance $BC + AC$ ou AB des poids, cette quatrième proportionnelle sera la distance de l'autre poids A au centre de gravité, & par conséquent on aura le centre cherché.

COROLLAIRE II.

109. Si deux corps A, B attachés à un levier AB sont égaux & en équilibre, leur centre C de gravité commun sera également éloigné de l'un & de l'autre; car pour faire équilibre il faut que $AC, CB :: B, A$, mais $B=A$, donc $AC=CB$.

PROPOSITION XXXII.

110. Si deux ou plusieurs corps A, B, C, D, &c. (Fig. 34.) sont attachés en différens endroits d'un levier inflexible AD, & que ce levier tourne autour d'un point O, soit que ce point soit le centre commun de gravité des corps ou qu'il ne le soit pas, je dis que les forces des corps A, B, C, D, &c. sont entr'elles comme les produits de leur masses par leur distances au point O.

DEMONSTRATION

Concevons que le levier se meuve & parvienne à la position HE, il est visible que les corps A, B, C, D, auront parcouru dans le même tems les arcs AH, BG, FC, ED, donc les vitesses de ces corps seront entr'elles comme ces arcs. Or les arcs sont proportionnels à leurs rayons AO, BO, &c. à cause qu'ils mesurent des angles égaux, donc les vitesses des corps seront comme les rayons, c'est-à-dire comme leurs distances AO, BO, &c. du point O; or les quantités de mouvement des corps A, B, C, D, sont comme les produits de leurs masses par leurs vitesses, ou en raison composée des masses & des vitesses, donc elles sont aussi en raison composée des masses & des distances, lesquelles sont comme les vitesses; mais les forces des corps étant les causes des quantités de mouvement, sont proportionnelles à ces quantités; donc les forces sont en raison composée des masses & des distances, ou comme les produits des corps A, B, C, D par leurs distances AO, BO, &c.

DEFINITIONS.

111. Quand le point O n'est pas le centre de gravité commun des corps attachés en différens endroits du levier, ce point se nomme *centre de mouvement*, & toute ligne droite horisontale qui passe par ce centre, & qui par conséquent coupe le levier, se nomme *axe de mouvement*, lorsque le levier tourne autour d'elle en conservant sa même inclinaison.

Quand le point O est le centre commun de gravité des corps ; on le nomme *centre d'équilibre*, & toute ligne droite horizontale qui passe par ce centre & coupe par conséquent le levier, se nomme *axe d'équilibre*, lorsque le levier en tournant autour d'elle conserve toujours la même inclinaison.

Les produits des masses par leurs distances s'appellent *momens* des corps ; ainsi le produit de A par AO est le moment de A, le produit de B par BO est le moment de B, &c.

Les momens sont donc proportionnels aux forces & aussi aux quantités de mouvement, & ces momens augmentent ou diminuent à mesure que les corps s'éloignent en approchant de O.

PROPOSITION XXXIII.

112. Deux ou plusieurs corps A, B, C, D, (Fig. 35.) étant attachés en différens endroits d'un bras OD de levier FD, qui tourne autour d'un point O, trouver un point H où tous les corps étant transportés, peseroient autant sur ce bras qu'ils pesent chacun en leur places, c'est-à-dire, ou leur moment seroit égal à la somme des momens.

SOLUTION.

Prenez les momens de chaque corps en particulier, faites-en la somme & divisez cette somme par celle des corps, le quotient sera la distance HO du point cherché H au point O.

Ceci est évident, car les corps étant tous transportés au point cherché H, leur moment sera le produit des masses ou de la somme des corps par la distance des corps ; or ce moment doit être égal à la somme des momens que les corps ont chacun en leur place, donc la somme de ces momens est aussi égale au produit de la somme des corps par la distance HO ; mais ce produit étant divisé par la somme des corps donneroit la distance HO, donc la somme des momens des corps divisée par la même somme des corps, doit aussi donner la distance HO.

Soit $A=1$, $B=3$, $C=4$, $D=2$, $OA=2$, $OB=4$, $OC=5$, $OD=6$; donc $A \times OA=2$, $B \times OB=12$, $C \times OC=20$, & $D \times OD=12$ donc la somme des momens sera $2+12+20+12=46$, & cette somme doit être égale au moment des corps transportés en H ; ainsi divisant 46 par la somme des corps $1+3+4+2=10$, le quotient $\frac{46}{10}=4\frac{23}{5}$ sera la distance OH, c'est-à-dire que la distance OH doit être à la distance $OA=2$, comme $4\frac{23}{5}$ est à 2.

COROLLAIRE.

113. Les augmentations de moment que les corps A, B gagnent en s'éloignant de O lorsqu'ils sont transportés en H, sont ensemble égales aux diminutions de moment que les corps C, D souffrent en s'approchant de O lorsqu'on les transporte en H; car puisque lorsque les corps sont tous en H, leur moment est égal à la somme des momens qu'ils avoient chacun en leur place, il faut nécessairement que ce qui a été gagné d'une part se trouve perdu de l'autre.

PROPOSITION XXXIV.

114. *Supposant les mêmes choses que dans la Proposition précédente, trouver le point où il faudroit transporter le centre O de mouvement (Fig. 35.) pour mettre les corps en équilibre.*

SOLUTION.

Cherchez par la Proposition précédente le point H où tous les corps étant transportés, leur moment seroit égal à la somme des momens que les corps ont en leur place, & ce point H sera le centre d'équilibre, de sorte que si on transporte le point O en H, c'est-à-dire, si le levier au lieu de tourner autour du point fixe O tourne autour du point fixe H, les corps seront en équilibre autour de H.

DEMONSTRATION.

Les momens des corps A, B, par rapport à H, sont $A \times AH$, $B \times BH$, & ces momens sont égaux aux augmentations de momens par rapport à O, que les mêmes corps recevraient si on les transportoit en H, de même les momens des corps C, D par rapport à H, sont $C \times CH$, $D \times DH$, & ces momens sont égaux aux diminutions de momens par rapport à O, que ces mêmes corps souffriroient si on les transportoit en H; mais les augmentations prises ensemble sont égales aux diminutions prises ensemble (N. 113.) donc la somme des momens des corps A, B, par rapport à H, est égale à la somme des momens des corps C, D par rapport à H, mais les forces des corps sont proportionnelles aux momens, donc la somme des forces des corps A, B, par rapport à H, est égale à la somme des forces des corps C,

D par rapport à H, & par conséquent le point H est le point d'équilibre cherché.

PROPOSITION XXXV.

115. Supposant encore les mêmes choses, trouver à quel point z ou Z du bras AD (Fig. 35.) il faudroit transporter tous les corps pour augmenter ou diminuer leur moment d'une certaine quantité.

SOLUTION.

Prenez les momens de chaque corps par rapport au centre O de mouvement, faites-en la somme, & ajoutez à cette somme, ou retranchez-en la quantité de mouvement qu'on veut ajouter ou retrancher; divisez ensuite le reste par la somme des corps, & le quotient sera la distance du point cherché Z ou z au centre O.

Ceci est évident, car la somme des momens étant augmentée ou diminuée de la quantité qu'on veut ajouter ou retrancher, doit être égale au moment des corps transportés en z ou en Z ; or le moment en z ou Z est le produit de la somme des corps par la distance cherchée Oz ou OZ , & par conséquent ce moment étant divisé par la somme des corps donneroit la distance cherchée, donc la somme des momens augmentée ou diminuée doit aussi donner la même distance cherchée, si on la divise par la somme des corps.

Soit comme ci-dessus $A=1$, $B=3$, $C=4$, $D=2$, $OA=2$, $OB=4$, $OC=5$, $OD=6$, nous aurons $A \times OA = 2$, $B \times OB = 12$, $C \times OC = 20$, $D \times OD = 12$, donc la somme des momens sera $2+12+20+12=46$, & la somme des corps $1+3+4+2=10$; maintenant si l'on veut que le moment des corps transportés en un point z surpasse par exemple, de 4 la somme 46 des momens, j'ajoute 4 à 46, ce qui fait 50, & divisant par la somme 10 des corps, le quotient $\frac{50}{10} = 5$ marque que la distance zO doit être à la distance AO comme 5 à 2.

Et si au contraire on veut que le moment des corps transportés en un point Z soit moindre de 4 que la somme 46 des momens, je retranche 4 de 46, & divisant le reste 42 par la somme 10 des corps, le quotient $\frac{42}{10} = 4\frac{2}{5}$ marque que la distance OZ doit être à la distance OA comme $4\frac{2}{5}$ à 2.

PROPOSITION

PROPOSITION XXXVI.

116. Deux ou plusieurs corps A, B, C, D, (Fig. 36.) étant attachez aux bras d'un levier AD qui tourne autour d'un point O, lequel n'est pas le centre d'équilibre, trouver quel est le bras surchargé, de combien il est surchargé, & en quel endroit il faudroit transporter tous les corps, afin que leur moment fût égal au moment dont l'un des bras est surchargé.

SOLUTION.

En premier lieu, faites la somme des momens des corps A, B, qui sont sur le bras AO, & la somme des momens des corps C, D, qui sont sur les bras OD. Supposé que la dernière somme soit plus grande que la première, le bras OD sera le bras surchargé.

En second lieu, retranchez la moindre somme de la plus grande, & le reste sera le moment qui surcharge le bras OD.

Enfin, divisez le moment qui surcharge le bras OD par la somme des poids, & le quotient sera la distance OH du point cherché H au centre de mouvement O; car tous les poids étant transportés en ce point H, leur moment par rapport à O doit être égal au moment qui surcharge le bras OD; or le moment des poids transportés en H est égal au produit de la somme des poids par la distance OH, & par conséquent ce moment étant divisé par la somme des poids donneroit la distance OH; donc le moment qui surcharge le bras OD étant divisé par la même somme doit aussi donner la même distance.

PROPOSITION XXXVII.

117. Les mêmes choses étant supposées que dans la Proposition précédente, trouver le point où il faudroit transporter le centre O pour faire équilibre entre les corps (Fig. 36).

SOLUTION.

Cherchez par le Problème précédent le point H, où tous les corps étant transportés leur moment seroit égal au moment qui surcharge le bras OD, & ce point sera le point cherché, en sorte que si le levier vient à être attaché en H, & non plus en O, tous les corps seront en équilibre autour du point H.

P

Le bras OD étant le bras surchargé, le moment des corps C, D peut se diviser en deux momens, dont l'un sera égal au moment des corps A, B du bras AO, & l'autre sera le moment qui surcharge les bras OD; supposons donc d'une part que les corps A, B soient transportés en O, & de l'autre que les corps C, D soient transportés en un point comme R, où ils aient perdu un moment égal au moment que les corps A, B transportés en O auront perdu (N. 115.) il est visible que les corps A, B ayant perdu leur moment, il ne restera du moment des corps C, D que le moment qui surcharge le bras OD; c'est pourquoi si l'on veut que tous les corps transportés en H aient un moment égal au moment surchargeant, il faut que le moment que les corps en O gagnent par rapport à O lorsqu'ils sont en H, soit égal au moment que les corps en R perdent par rapport au même point O lorsqu'ils sont en H, ainsi le moment que les corps A, B perdent sur le bras AO, joint à celui qu'ils gagnent sur le bras OD, est égal au moment que les corps C, D perdent sur le même bras OD; or si l'on transporte le centre de mouvement en H, c'est-à-dire, si le levier vient à être attaché en H & non plus en O, & que tous les corps soient transportés en leur place, les corps A, B auront par rapport à H, non-seulement le moment qu'ils avoient perdu par rapport à O sur le bras AO, mais encore celui qu'ils avoient gagné sur le bras OD, & les corps C, D reprendront par rapport à H le moment qu'ils avoient perdu sur le même bras OD, donc le moment des corps A, B par rapport à H, sera égal au moment des corps C, D par rapport à H, & le point H sera le centre d'équilibre.

PROPOSITION XXXVIII.

118. *Plusieurs poids A, B, C, D (Fig. 36.) étant attachez en différens endroits d'un levier AD, trouver sur ce levier leur centre d'équilibre.*

SOLUTION.

Regardez le point A comme étant le centre de mouvement, & prenant les momens de chacun des corps par rapport au point A, faites-en la somme que vous diviserez par la somme des corps, & le quotient vous donnera la distance AH, & par con-

féquent le point H sera le centre d'équilibre.

DEMONSTRATION.

Puisque la somme des momens divisée par la somme des poids donne la distance AH, donc la somme des poids multipliée par la distance AH est égale à la somme des momens; or la somme des poids multipliée par AH est le moment que tous les poids auroient étant mis en H, donc le point H est le point où tous les corps étant transportés, leur moment est égal à la somme des momens qu'ils auroient chacun en leur place; or quand cela arrive le point H est le centre d'équilibre (N. 114.) donc, &c.

PROPOSITION. XXXIX.

119. Deux ou plusieurs corps A, B (Fig. 37.) étant attachés à un bras OC d'un levier EC, qui tourne autour d'un point fixe O, trouver à quel endroit de l'autre bras EO, il faut attacher un autre corps donné D pour faire équilibre.

SOLUTION.

Prenez les momens des corps A, B par rapport à O, faites-en la somme, & divisez-la par le corps donné D, le quotient sera la distance cherchée OD.

DEMONSTRATION.

Puisque la somme des momens des corps A, B divisée par D donne la distance OD, donc le produit de D par OD est égal à la somme des momens des corps A, B; mais le produit $D \times OD$ est le moment du corps D par rapport à O, donc le moment de D est égal aux momens de A & B pris ensemble; & par conséquent il y a équilibre.

REMARQUE.

120. Nous avons dit (N. 111.) que toute ligne droite horisontale, autour de laquelle un levier est censé tourner en gardant toujours la même inclinaison, se nomme *axe ou diametre de mouvement*, si les corps attachés aux bras du levier ne sont pas en équilibre, & *axe ou diametre d'équilibre*, si les corps sont en équilibre. Or nous n'avons considéré jusqu'ici que les leviers perpendiculaires à cet axe, & c'est pourquoi nous avons dit dans

la note du nombre 107. qu'il falloit supposer que le levier pendant son mouvement décrivait un plan perpendiculaire à l'horizon, & que tous les points décrivirent des circonférences concentriques (*Fig. 33.*) qui étoient toutes dans le même plan, ce qui doit être effectivement ainsi, puisqu'en supposant, comme nous faisons, que le levier soit toujours perpendiculaire à l'axe, il s'ensuit nécessairement que les rayons des circonférences que tous les points décrivent sont aussi perpendiculaires à cet axe, c'est-à-dire, que ces rayons ne sont autre chose que les distances des points au centre de mouvement, ou que les parties du levier comprises entre le centre de mouvement & les points qui décrivent les circonférences.

Mais si le levier tourne autour d'un axe qui ne lui soit pas perpendiculaire, il y a du changement dans tout ce que nous venons de dire, & c'est ce que nous allons examiner.

Supposons donc qu'un levier AB (*Fig. 38.*) étant attaché fixement en un point O d'un axe EP horizontal, cet axe vienne à tourner sur lui-même sans changer de position, c'est-à-dire qu'il tourne comme un aîsieu, il est évident 1°. Que le levier AB tournera autour de cet axe en conservant toujours le même angle BOP. 2°. Que tous les points A, D, H, B, seront toujours à égale distance de l'aîsieu, & que par conséquent les perpendiculaires AE, DR, HS, BP, abaissées de ce point sur l'axe seront toujours les mêmes. 3°. Que les circonférences décrites par les points A, D, H, B, sont des circonférences de cercles perpendiculaires à l'horison, car les droites AO, AE étant toujours les mêmes, & l'angle AEO étant droit, la circonférence décrite par le point A est la même que la circonférence du cercle décrite par le rayon AE, mais ce cercle est perpendiculaire sur l'axe EF, lequel est dans le plan de l'horison, donc il est perpendiculaire à l'horison, &c. 4°. Enfin que les circonférences décrites par les points A, D, H, B, seront toutes parallèles entr'elles, mais dans des plans différens.

Or de-là il s'ensuit que la différence du levier perpendiculaire à son axe au levier oblique à son axe, consiste 1°. En ce que les circonférences décrites par les points du premier sont toutes dans un même plan, au lieu que les circonférences décrites par les points du second sont toutes dans des plans différens. 2°. Que les momens des corps attachés en différens endroits d'un levier perpendiculaire à son axe, sont les produits des corps par leurs

distances au centre de mouvement, au lieu que les momens des points attachés à un levier oblique, sont les produits des corps par les perpendiculaires abaissées sur l'axe, car les vitesses des corps A, D, H, B, étant entr'elles comme les circonférences qu'ils décrivent, & ces circonférences étant comme les rayons AE, DR, &c. les momens sont par conséquent les produits $A \times AE$, $D \times DR$, &c.

PROPOSITION XL.

121. Si deux ou plusieurs corps A, B, C (Fig. 39.) attachez à un levier AC, sont en équilibre autour d'un axe EF qui passe par le centre O, ils seront en équilibre autour de tout autre axe qui passera par le même point O.

DEMONSTRATION.

Supposons que l'axe horizontal EF soit perpendiculaire au levier AC, le moment $A \times AO$ du corps A sera donc égal à la somme $B \times BO + C \times CO$, des momens des corps B, C, puisqu'on suppose que les corps A, B, C sont en équilibre. Concevons maintenant que le levier AC soit attaché fixement en O à un autre axe horizontal HQ, lequel vienne à tourner autour de lui-même comme un aillieu, il est évident par la remarque précédente, que si des points A, B, C on abaisse les perpendiculaires AP, BQ, CR sur l'axe HR, les momens des corps A, B, C par rapport à cet axe seront $A \times AP$, $B \times BQ$, $C \times CR$; or à cause des triangles semblables AOP, BOQ, COR, les droites AP, BQ, CR sont entr'elles comme les droites AO, BO, CO, donc les corps A, B, C multipliés par les droites AP, BQ, CR, sont entr'eux comme les mêmes corps multipliés par les droites AO, BO, CO, & par conséquent $A \times AP$, $B \times BQ + C \times CR :: A \times AO$, $B \times BO + C \times CO$, mais nous avons $A \times AO = B \times BO + C \times CO$, donc $A \times AP = B \times BQ + C \times CR$, c'est-à-dire, le moment du corps A par rapport à l'axe HR, est égal à la somme des momens des corps B, C, par rapport au même axe, donc ces corps sont en équilibre autour de cet axe de même qu'ils l'étoient autour de l'axe EF.

PROPOSITION XLI.

122. Un axe EF (Fig. 40.) étant donné, autour duquel tourne un levier AB traversé d'autres leviers HI, CD auxquels sont attachés

des poids H, I, C, D , trouver 1°. Le moment de ces poids par rapport au levier AB considéré comme un axe. 2°. Le moment de ces mêmes poids par rapport à l'axe EF . 3°. Les points où il faudroit transporter les poids sur le levier AB , afin qu'ils eussent par rapport à l'axe EF les mêmes momens qu'ils avoient en leur place. 4°. Le point où il faudroit les transporter tous sur le levier AB , afin que le moment par rapport à EF fût égal à l'excès du moment dont l'un des bras est surchargé. 5°. Enfin le point où il faudroit attacher le levier AB à l'axe EF , afin que les corps fussent en équilibre autour de EF .

SOLUTION.

En premier lieu, si le levier AB est considéré comme un axe horizontal auquel les leviers HI, CD , aussi horizontaux sont attachés fixement, & qu'il ne puisse tourner que sur lui-même comme un aissieu; des points H, I, C, D , abaissez sur AB les perpendiculaires HS, IT, CQ, DR , & les momens des corps H, I, C, D , seront les produits de ces corps multipliés chacun par leur perpendiculaires. Car le levier CD conservant toujours la même obliquité à l'égard de AB , il est visible que si AB tourne autour de lui-même le corps C décrira une circonférence dont la droite CQ sera le rayon, & que par conséquent le moment de C par rapport à AB sera $C \times CQ$ (N. 120.) & on prouvera la même chose des autres corps.

En second lieu, si le levier AB est attaché fixement à l'axe horizontal EF , des points H, I, C, D , abaissez sur l'axe EF les perpendiculaires Hm, In, Cr, Du , & les momens des corps H, I, C, D , seront les produits de ces corps multipliés chacun par leur perpendiculaires; car quand EF viendra à tourner sur lui-même, le corps C étant toujours à égale distance de cet axe décrira autour de EF une circonférence dont le rayon sera la perpendiculaire Cr ; donc le moment de C par rapport à EF sera $C \times Cr$ (N. 120.) & on prouvera la même chose des autres corps.

En troisième lieu, des points H, I, C, D , (Fig. 41.) menez les droites Hf, Id, Ch, Dq , parallèles à l'axe EF , & les points f, d, h, q , où ces parallèles coupent le levier AB seront les points où il faudra transporter les corps si l'on veut que leurs momens par rapport à EF soient égaux à ceux qu'ils ont chacun en leur place; car des points C, h , menant les droites Cr, hz , perpendiculaires à l'axe, il est clair que ces deux droites sont égales puisqu'elles sont perpendiculaires entre les parallèles EF, hC ;

ainsi $C \times Cr = C \times h_3$, mais $C \times Cr$ est le moment du corps C mis en C , & $C \times h_3$ est le moment du corps C mis en h ; donc le corps mis en h a un moment par rapport à EF égal à celui qu'il a en C , & on prouvera la même chose des autres corps.

En quatrième lieu, si les corps H, I, C, D , étant transportés aux points f, d, h, q , sont en équilibre autour d'un axe qui passant par O seroit perpendiculaire au levier, ils seront aussi en équilibre autour de l'axe EF (N. 121.) & par conséquent il est visible qu'il n'y aura point de bras surchargé.

Mais si l'un des bras se trouve surchargé, par exemple le bras Oq , considérez le levier fq comme s'il tournoit autour d'un axe ZY qui lui fut perpendiculaire, & prenant les momens $C \times hO$, $D \times qO$, des corps C, D , mis en h & q , & la somme des momens $H \times fO$, $I \times dO$, des corps H, I , mis en f & en d , retranchez la petite somme de la grande, & divisant le reste par la somme des corps, le quotient vous donnera la distance OV , & par conséquent le point où il faudroit mettre tous les corps, afin que leur moment par rapport à l'axe ZY fut égal à l'excès du moment surchargeant (N. 116.); or je dis que le moment par rapport à l'axe EF des corps mis en V est encore égal à l'excès du moment des corps C, D , sur le moment des corps H, I .

Car des points f, d, h, q , menant sur EF les perpendiculaires fi, d_2, h_3, q_4 , les momens par rapport à EF des corps mis en f, d, h, q , seront $H \times fi, I \times d_2, C \times h_3, D \times q_4$, mais à cause des triangles semblables Ofi, Od_2, Oh_3, Oq_4 , les perpendiculaires fi, d_2, h_3, q_4 , sont entr'elles comme les droites fO, dO, hO, qO ; donc les corps multipliés par les droites fi, d_2, h_3, q_4 , c'est-à-dire, les momens par rapport à EF seront entr'eux comme les corps multipliés par fO, dO, hO, qO , ou comme les momens par rapport à ZY ; donc les momens $D \times q_4 + C \times h_3$ seront aux momens $H \times fi + I \times d_2$ comme les momens $D \times qO + C \times hO$ aux momens $H \times fO + I \times dO$; donc l'excès de $D \times q_4 + C \times h_3$ sur $H \times fi + I \times d_2$ sera à l'excès de $D \times q + OC \times hO$ sur $H \times fO + I \times dO$ comme les momens excédans par rapport à EF aux momens excédans par rapport à ZY ; or la somme des corps multipliée par V_5 est à la somme des corps multipliée par VO comme les corps multipliés par q_4, h_3, d_2, fi , sont aux corps multipliés par qO, hO, dO, fO , à cause que V_5 est à VO comme les droites q_4, h_3 , &c. sont aux droites qO, hO , &c. donc la somme des corps multipliée

par V_5 est à la somme des corps multipliée par VO comme l'excès de $D \times q_4 + C \times h_3$ sur $H \times f_1 + I \times d_2$ est à l'excès de $D \times qO + C \times hO$ sur $H \times fO + I \times dO$; mais l'excès de $D \times qO + C \times hO$ sur $H \times fO + I \times dO$ est égal à la somme des corps multipliée par OV (N. 116.) donc l'excès de $D \times q_4 + C \times h_3$ sur $H \times f_1 + I \times d_2$ est égal à la somme des corps multipliée par V_5 , & par conséquent le moment par rapport à EF des corps mis en V est égal à l'excès du moment des corps C, D , sur le moment des corps H, I .

En cinquième lieu, si l'on transporte l'axe perpendiculaire en V , les corps mis en f, d, h, q , seront en équilibre autour de cet axe (N. 116.) donc si l'on transporte l'axe EF en V , les corps mis en f, d, h, q , seront aussi en équilibre autour de EF (N. 121.) mais les corps mis en H, I, C, D , avoient les mêmes momens par rapport à EF lorsqu'il passoit par O , que ceux qu'ils ont en f, d, h, q ; donc puisqu'ils sont en équilibre étant en f, d, h, q , lorsqu'on transporte EF en O , ils seront aussi en équilibre en H, I, C, D .

PROPOSITION XLII.

123. Si un levier AB qui tourne autour d'un axe EF (Fig. 42.) traverse d'autres leviers CD, HI , chargés de poids, C, D, H, I , & que les points A, B , par où il les traverse soient les centres de gravité des poids sur leur leviers, je dis que les poids C, D , étant mis en leur centre de gravité A , sur le levier CD , & les poids H, I , en leur centre de gravité B sur le levier H, I , leurs momens par rapport à l'axe EF seront égaux aux momens qu'ils ont chacun en leur place.

DEMONSTRATION.

Des points C, D, H, I , je mene les droites CP, DQ, HR, IS , parallèles à l'axe EF , & par la Proposition précédente les corps C, D, H, I , étant transportés aux points Q, P, R, S , où ces parallèles coupent le levier AB , leurs momens par rapport à EF seront les mêmes que si ces corps étoient en leur places C, D, H, I ; des points R, B, S , je mene les droites RN, BM, SL perpendiculaires sur EF , & B_3 perpendiculaire sur SL , les momens des corps H, I , mis en R & en S sont donc $H \times RN, I \times SL$; or par la supposition les corps H, I , mis en H & en I sont en équilibre autour du point B ; donc $H \times HB = I \times IB$, mais à cause des triangles semblables RHB, SIB , on a $HB,$
IB

IB :: RB, BS, & à cause des triangles semblables R_2B , B_3S , on a $RB, BS :: 2B, 3S$; donc $HB, IB, 2B, 3S$, & par conséquent $H \times HB, I \times IB :: H \times 2B, I \times 3S$, & à cause de $H \times HB = I \times IB$, on a $H \times 2B = I \times 3S$, c'est-à-dire, que si on transporte en B, les corps H, I, mis en R, & S le moment $H \times 2B$ que le corps H gagnera par rapport à EF sera égal au moment $I \times 3S$ que le corps I perdra par rapport à EF, donc la somme de leurs momens en B par rapport à EF sera la même que la somme de leurs momens en R & en S, ou en H & I, & on prouvera la même chose par rapport aux corps C, D, donc, &c.

COROLLAIRE.

124. Les corps H, I, pesent donc autant sur le bras OB lorsqu'ils sont en B, que lorsqu'ils sont en leur place, & les corps C, D, pesent autant sur le bras AO, lorsqu'ils sont en A, que lorsqu'ils sont en C & D.

PROPOSITION XLIII.

125. *Plusieurs leviers AB, CD, EF (Fig. 43.) chargés de poids étant sur un même plan horizontal, trouver leur centre commun d'équilibre.*

SOLUTION.

Je cherche le centre d'équilibre H des poids A, B, sur leur levier AB, & le centre d'équilibre S des poids C, D, sur leur levier CD, & joignant ces centres par une droite HS, que je considère comme un levier qui seroit traversé par un axe entre les points H, S, comme par exemple en V, il est clair par la Proposition précédente que les poids B, A, étant transportés en H peseroient autant sur le bras HV que s'ils étoient en leur place, & que les poids C, D, transportés en S peseroient autant sur le bras VS que s'ils étoient en C & D. Je conçois donc que les poids A, B, soient transportés en H où ils ne font qu'un seul poids H, & que les poids C, D, soient transportés en S où ils ne font qu'un seul poids S. Je cherche le centre d'équilibre V des poids H, S, sur le levier VS, & le centre d'équilibre T des poids E, F, & joignant les centres V, T, par la droite VT que je considère comme un levier qui seroit traversé par un axe en quelque point X entre V & T, il est encore clair par la Proposition précédente que les poids H, S, étant mis en V peseroient

autant sur le bras XV que s'ils étoient en leur place, & que les poids E, F étant mis en T peseroient autant sur le bras XT que s'ils étoient en E, F.

Je conçois donc que les poids S, H, soient mis en V, où ils ne font qu'un seul poids V, & que les poids E, F, soient transportés en T pour n'y faire qu'un seul poids T, & cherchant le centre d'équilibre X des poids V, T, sur le levier VT, ce point X est le centre commun d'équilibre de tous les poids, ce qui est évident par ce qui a été dit ci-dessus.

PROPOSITION XLIV.

126. *Supposant les mêmes choses que dans la Proposition précédente, je dis que si le levier AB, CD, EF (Fig. 44.) tournent autour d'un axe MN posé d'un même côté par rapport à ces leviers, les momens par rapport à MN des poids chacun en sa place seront égaux au moment de la somme des poids mise au centre commun d'équilibre X.*

DEMONSTRATION.

Des points A, H, B, du levier AB, j'abbaisse sur MN les perpendiculaires AM, HP, BQ, & des points A, H, je mene les droites Aa, Hb, parallèles à MN; il est évident qu'en transportant le corps A au centre de gravité H, sa distance à l'axe MN augmente de la quantité Ha, & qu'au contraire en transportant le corps B en H sa distance à l'axe MN diminue de la quantité Bb; or à cause des triangles semblables AHa, HBb, on a AH, HB :: Ha, Bb, & à cause que le point H est le centre d'équilibre des corps A, B, sur le levier AB, on a $A \times AH = B \times BH$, donc $A \times Ha = B \times Bb$; c'est-à-dire, le moment que A transporté en H gagne par rapport à MN est égal au moment que le corps B transporté en H perd par rapport à MN, & par conséquent le moment des deux corps en H est égal à la somme des momens qu'ils avoient en A & B. On prouvera de même que les corps C, D, étant transportés en S qui est leur centre d'équilibre par rapport à leur levier CD, leur moment par rapport à MN est égal à la somme des momens qu'ils ont en C & D. Concevant donc que les poids A, B, soient transportés en S pour n'y faire qu'un seul poids S, & qu'ayant mené la droite SH on cherche sur cette droite le centre commun d'équilibre V des deux poids H, S, on prouvera de même que les deux poids H, S, étant transportés en V, leur moment par rapport à MN sera égal à la somme des momens

qu'ils ont en H & S, & que les poids E, F, étant transportés en T qui est leur centre d'équilibre sur leur levier EF, leur moment par rapport à MN sera égal à la somme des momens qu'ils ont en E & F; concevant donc que les poids H, S, soient transportés en V pour n'y faire qu'un seul poids V, & que les corps E, F, soient transportés en T pour n'y faire qu'un seul poids T, & qu'ayant mené la droite VT, on cherche sur cette droite le centre d'équilibre X des poids V, T, on prouvera encore que les poids V, T, étant transportés en X, leur moment par rapport à MN sera égal à la somme des momens qu'ils ont en V & en T, & par conséquent on aura prouvé que le moment par rapport à MN de tous les corps mis en X est égal à la somme des momens mis chacun en leur place.

R E M A R Q U E.

127. De tout ce que nous venons de dire, on tire la maniere de trouver les centres de gravité des surfaces planes & de leur circuits, & la maniere de mesurer les solides que ces surfaces produisent en tournant autour d'un axe, & les surfaces de ces solides.

Par exemple, pour trouver le centre de gravité de la figure ABCD (*Fig. 45.*), je conçois que cette figure tourne autour de l'un de ses côtés AD comme autour d'un axe, & qu'elle soit divisée en ses élémens paralleles à cet axe; ces élémens selon la Méthode des Indivisibles, seront des lignes, & selon la Méthode des nouveaux calculs, ce seront de petits trapezoides ou de petits rectangles lesquels ayant la hauteur infiniment petite, peuvent encore passer pour des lignes; or quoique des lignes géométriques n'ayent par elles-mêmes aucune pesanteur, cependant si on conçoit qu'elles soient divisées en parties égales & infiniment petites, & que de chacune de ces parties pendent des poids tous égaux entr'eux, il est visible que ces poids seront entr'eux comme les parties auxquelles ils seront attachés, & qu'ainsi on pourra regarder la pesanteur des poids comme appartenant à ces parties, & par conséquent les lignes composées par ces parties pourront être regardées comme ayant une pesanteur égale à la somme des pesanteurs de leur parties. Mais il est visible que dans cette supposition le centre de pesanteur de ces lignes sera sur le milieu de chacune d'elles, puisqu'il y aura de part & d'autre de ce centre un même nombre de parties égale-

ment pesantes ; ainsi les momens de ces lignes par rapport à l'axe AD seront les produits des lignes par les distances de leur centres de gravité ou de leur milieu à l'axe AD ; or par les principes établis dans ce Chapitre, la somme de ces lignes multipliée par la distance de leur centre de gravité commun à l'axe AD, est égale à la somme de leurs momens ; donc divisant la somme de leurs momens par la somme des lignes, le quotient sera la distance du centre de gravité commun à l'axe AD, & par conséquent on connoîtra de combien ce centre de gravité est éloigné de l'axe AD ; maintenant prenant pour axe le côté DC, & prenant les élémens de la figure ABDC parallèles à cet axe, on connoîtra en faisant les mêmes opérations que ci-dessus, la distance du centre de gravité commun à l'axe DC, & par conséquent la distance à l'axe AD étant connue, on n'aura qu'à la mettre sur DC de D en O, supposé que DC soit perpendiculaire à AD, & la distance à l'axe DC étant connue, on n'aura qu'à la mettre sur AD de D en R, après quoi tirant OX parallèle à AD, & RX parallèle à DC, l'intersection X de ces lignes sera le centre de gravité de la figure ABCD.

Donc en supposant que la somme des Elemens de la figure ABDC, c'est-à-dire, que la figure ABDC soit connue, ce que nous supposons toujours ; il est clair que pour trouver son centre de gravité, il ne s'agit plus que de connoître la somme des momens de ses élémens par rapport à l'axe AD & à l'axe DC ; or c'est ce que nous avons enseigné fort au long dans la *Mesure des Surfaces & des Solides*, & dans le *Calcul Differentiel & Integral*, &c. c'est pourquoi nous y renvoyons le Lecteur pour ne pas répéter ce que nous avons déjà dit.

De même si l'on veut trouver le solide décrit par la circonvolution de la figure ADBC autour de l'axe AD, il est visible que si je divise la figure ADBC en ses élémens parallèles à la base, tous les points de chacun de ces élémens décriront des circonférences qui seront entr'elles comme leur rayons, ou comme les distances des points à l'axe AD, ainsi de même que tous les points d'un élément multipliés par leur distances à l'axe AD sont égaux à la somme des points, ou à l'élément multiplié par la distance de leur centre commun de gravité ; de même tous les points multipliés par les circonférences que décrivent leur distances à l'axe AD, sont égaux à la somme des points ou à l'élément multiplié par la circonférence que décrit la distance de

leur centre commun de gravité, & de même que tous les élémens multipliés chacun par la distance de son centre de gravité à l'axe AD, sont égaux à la somme des élémens multipliée par la distance de leur centre de gravité commun à l'axe AD; de même aussi tous les élémens multipliés par la circonférence que décrit chacune de leur distance à l'axe AD, sont égaux à la somme des élémens multipliée par la circonférence que décrit la distance de leur centre commun de gravité; or tous les élémens multipliés par les circonférences que décrivent leur distances forment des surfaces qui composent le solide, donc tous les élémens, c'est-à-dire la base ABCD multipliée par la circonférence décrite par la distance de leur centre commun de gravité est égale au solide; ainsi le solide est égal au produit de la figure ABCD par la circonférence que son centre de gravité X décrit autour de AD.

Et comme pour trouver la circonférence décrite par X, il ne s'agit que de trouver son rayon ou la distance de X à l'axe AD, il s'ensuit qu'en suivant les mêmes regles que nous avons données dans les Ouvrages cités, on trouvera le solide.

De même, pour trouver le centre de gravité du Périmètre ABCD (*Fig. 46.*) je considere chacun de ses côtés comme autant de leviers chargés de poids égaux dans toutes leurs parties; ainsi il est visible que le centre de gravité de chaque levier sera sur le milieu de ce levier. Je joins les centres de gravité E, F de ces deux leviers par une droite EF, & considerant cette droite comme un levier, tous les poids de AB étant transportés en E, & tous ceux de BC étant transportés en F, peseront autant que s'ils étoient en leur place. Je cherche donc sur EF le centre de gravité V des poids E, F, & du point V par le centre de gravité X de la droite CD, je mene la droite VX que je considere comme un levier, ainsi les poids E, F peseront autant en V que s'ils étoient en leur place, & les poids qui chargent DC peseront autant en X que s'ils étoient en leur place. Je conçois donc que les poids E, F soient en V, & les poids de la droite DC en X, & je cherche le centre de gravité Z des poids V, X; du point Z je mene la droite YZ au centre de gravité de la droite AD, & considerant les poids V, X, transportés à leur centre de gravité Z, & les poids qui chargent AD transportés à leur centres de gravité Y, je cherche sur ZY le centre de gravité O des poids Z, Y, & ce point O est le centre de gravité du Perimetre ABCD.

Pour trouver la surface que décrit le périmètre ABCD de la Figure 45. en tournant autour de l'axe AD, j'examine que le côté AD de ce Perimetre ne décrit aucune partie de la surface; c'est pourquoi je cherche le centre de gravité commun des trois autres côtés AB, BC, CD, & supposant que ce centre soit le point X, & que sa distance à l'axe AD soit la droite XR, je multiplie les trois côtés AB, BC, CD par la circonférence du rayon XR, & le produit est la surface cherchée; car le moment de tous les poids égaux dont nous supposons que les droites AB, BC, CD sont chargées, est égal aux produits des poids multipliés chacun par sa distance à la droite AD, & si nous concevons que tous les poids soient transportés au centre X, leur produit par la distance XR sera encore égal à la somme des momens qu'ils ont chacun en leur place; or tous les points des droites AB, BC, CD en tournant autour de AD décrivent des circonférences dont les rayons sont les distances à la droite AD; donc puisque tous les points multipliés par leur distances sont égaux à la somme des points multipliés par la distance XR, tous les points multipliés par les circonférences que leur distances décrivent seront égaux à tous les points multipliés par la circonférence que XR décrit; mais tous les points multipliés par leur circonférences forment la surface décrite par les lignes AB, BC, CD, donc tous les points multipliés par la circonférence que XR décrit, c'est-à-dire les trois lignes AB, BC, CD, multipliées par la circonférence que XR décrit sont égales à la surface cherchée.

Si le Perimetre ABCD tournoit autour d'un axe MN (Fig. 46.) qui fut hors du Perimetre, il est évident que chacune des lignes AB, BC, CD, DA du Perimetre décrirait une partie de la surface décrite autour de MN; donc il faudroit alors chercher le centre de gravité commun à ces quatre lignes, & multiplier ensuite les quatre lignes par la circonférence que décrirait la distance de leur centre de gravité autour de MN, ce qui donneroit la surface formée par le Perimetre.

De tout ce que nous venons de dire, il s'en suit 1°. Que si une surface plane ABCD (Fig. 45.) tourne autour d'un axe AD, le solide décrit par la circonvolution entière est égal à la surface multipliée par la circonférence décrite par son centre de gravité X. 2°. Que si cette surface tourne autour d'un axe AD qui soit l'un de ses côtés la surface du solide produit est égale au produit des trois autres côtés par la circonférence que décrit leur centre de gra-

vité commun. 3°. Enfin que si cette surface tourne autour d'une ligne MN qui soit hors du perimetre, la surface décrite par les côtés du perimetre est égale au produit des côtés multipliés par la circonférence que décrit la distance de leur centre commun de gravité à l'axe MN.

Les Lecteurs auront la bonté de recourir aux ouvrages cités ci-dessus, ils y trouveront de quoi se satisfaire sur cette matiere.

CHAPITRE V.

Du Mouvement composé des Corps.

DEFINITIONS.

128. **L**E mouvement *simple* est un mouvement qui n'est produit que par une seule force, & le mouvement *composé* est celui qui est produit par deux forces, dont les directions ne sont pas opposées; car si les directions étoient opposées, & que les forces fussent égales, il est visible que le mouvement cesseroit, en supposant qu'il n'y eût point d'élasticité dans les corps, ainsi que nous avons supposé jusqu'à présent, & si l'une des deux forces étoit plus grande que l'autre, le mouvement continueroit selon la direction de la plus grande force.

129. On appelle *angle des directions* l'angle que les directions de deux forces font entr'elles; par exemple, si le corps A (Fig. 47. est poussé tout à la fois par une force dont la direction soit la droite AC, & par une autre dont la direction soit la droite AB, l'angle BAC fait par ces deux directions s'appellera *angle des directions*.

PROPOSITION XLV.

130. Si un corps A (Fig. 47.) est mû par deux puissances, dont l'une ait la direction AC, & l'autre ait la direction AB, & que dans le même tems que la force de la direction AC feroit parcourir l'espace AC, la force de la direction AB fit parcourir l'espace AB, je dis qu'en achevant le parallelogramme ABCD, le corps A mû par les deux puissances parcourroit dans le même tems la diagonale BD.

DEMONSTRATION.

Nommons x la puissance qui feroit parcourir l'espace AC, &

la puissance qui feroit parcourir dans le même tems l'espace AB, il est sûr que la masse du corps A étant la même par rapport à l'une & l'autre puissance, ces puissances sont entr'elles comme les vitesses AC, AB. Ainsi supposant que dans le premier instant la puissance x fasse parcourir au corps A l'espace AE, la puissance z feroit parcourir dans le même instant l'espace AF, qui seroit à AE comme AB est à AC, ou comme CD est à AC, à cause de $CD = AB$; du point E je mene EG parallèle & égale à AF, & du point F je mene FG parallèle & égale à AE, enfin je tire la diagonale AG; cela fait, puisque les deux puissances agissent ensemble sur le corps A, & que leurs directions ne sont point opposées, il est sûr qu'à la fin du premier instant le corps A, en tant qu'il est poussé par la puissance x , doit avoir parcouru un espace AE égal à FG, & qu'en tant qu'il est poussé par la puissance z , il doit avoir parcouru un espace AF égal à EG, donc il faut nécessairement qu'il se trouve en G, car G est l'unique point où les deux conditions sont remplies; or par la construction FA est égal à GE, & nous avons trouvé FA, AE :: DC, CA, donc GE, AE :: DC, CA, & par conséquent le triangle GEA est semblable au triangle DCA, & comme le point A étant le sommet commun de ces triangles, le côté AE du triangle GEA, tombe sur le côté homologue AC du triangle DCA, l'autre côté AG du triangle GEA tombe par conséquent sur le côté homologue AD du triangle DCA, & le point G est un point de la diagonale AD.

On prouvera de même que si à la fin du second instant la puissance x feroit parcourir l'espace AH, égal à IL, la force z feroit parcourir l'espace AI égal à HL, lequel seroit à l'espace AH comme CD est à CA, & qu'ainsi le corps A se trouveroit en L, qui est un point de la diagonale AD, à cause qu'on auroit LH, AH :: CD, CA. Puis donc qu'à la fin de tous les instans le corps A se trouveroit toujours sur un point de la diagonale AD, il s'ensuit qu'au dernier instant il se trouveroit en D, & que par conséquent le corps A mu par les deux puissances x & z auroit parcouru la diagonale AD.

COROLLAIRE I.

331. Si l'on conçoit que la ligne AB soit divisée en parties égales AF, FI, &c. & que la droite AC soit divisée en un même nombre de parties égales AE, EH, &c. lesquelles seront consécutives.

conséquent proportionnelles aux parties AF, FI, &c. de la droite AB, & que tandis que la droite AB avançant d'un mouvement uniforme & toujours parallèlement à elle-même de A vers C, le corps A avance aussi d'un mouvement uniforme de A vers B, en sorte qu'il parcoure AF tandis que la droite AB parcourt AE, il est visible que le corps se trouvera en G quand AB sera dans la position EP, qu'il sera en L quand AB sera dans la position HM, & ainsi de suite, de sorte que le corps A sera toujours dans quelque point de la diagonale AD; donc le mouvement du corps A selon l'hypothèse que nous venons de faire, représentera le mouvement composé de A poussé par les deux forces x , z .

COROLLAIRE II.

132. Le corps A parcourt la diagonale AD dans le même tems qu'il parcourroit le côté AC, s'il n'étoit poussé que par la force x , ou le côté AB, s'il n'étoit poussé que par la force z .

COROLLAIRE III.

133. Comme il n'y a point de ligne droite AD autour de laquelle on ne puisse décrire un parallélogramme ABCD, dont elle sera la diagonale, il n'y a point aussi de mouvement simple causé par une puissance qui pousseroit dans un certain tems le corps A de A vers D, qu'on ne puisse regarder comme un mouvement composé par deux puissances dont l'une pousseroit le corps A de A vers C, & l'autre de A vers B.

Et comme les rapports des côtés AC, AB du parallélogramme autour de la diagonale AD, peut varier selon que l'angle BAC est plus ou moins grand, & que ces côtés expriment le rapport des forces qui causent le mouvement composé, il s'ensuit qu'un même mouvement direct AD peut être regardé comme un mouvement composé de plusieurs façons, ou comme un mouvement causé par deux forces qui peuvent avoir entr'elles différens rapports.

PROPOSITION XLVI.

134. Dans le mouvement composé la vitesse produite par les deux forces, est à la vitesse qui produiroit une seule force, comme la diagonale AD est au côté qui représente la direction de cette force.

R

Par la supposition la force x feroit parcourir au corps A l'espace AC dans le même tems que la force z lui feroit parcourir l'espace AB, & par la Proposition précédente les deux forces ensemble font parcourir au même corps dans le même tems la diagonale AD; or la masse étant toujours la même, & les tems étant égaux, les vitesses produites par différentes forces dans un mouvement uniforme tel que nous le supposons ici, sont entr'elles comme les espaces parcourus dans le même tems, donc la vitesse produite par les deux forces x, z jointes ensemble, est à la vitesse produite par la force x comme AD est à AC, & à la vitesse produite par le corps z comme AD est à AB.

COROLLAIRE I.

135. On prouveroit la même chose si les mouvemens causés par chacune des forces suivoient une même loi d'accélération; car supposant qu'ils suivissent la loi de Galilée, la force x ayant fait parcourir à la fin du premier instant l'espace AE, à la fin du second il auroit fait parcourir l'espace AH quadruple de AE, & la fin du troisième l'espace AN neuf fois plus grand que AE, &c. ainsi de suite selon la raison des quarrés 1, 4, 9, 16, 25, &c. par la même raison la force z ayant fait parcourir à la fin du premier instant l'espace AF, auroit fait parcourir à la fin du second instant l'espace AI quadruple de AF, &c. ainsi on prouveroit de même que ci-dessus qu'à la fin de ces instans le corps A mù par les deux puissances se trouveroit sur les points G, L, &c. de la diagonale, & que par conséquent les espaces AG, AE, AF, que ces différentes forces feroient parcourir au même corps A, étant parcourus dans le même tems ou dans des tems égaux, les vitesses seroient comme les espaces, d'où il suit que la vitesse acquise à la fin de AG, seroit à la vitesse acquise à la fin de AE comme AG est à AE.

REMARQUE.

136. Ce que je dis ici n'est pas contraire à ce que j'ai dit leurs touchant les espaces parcourus dans des tems égaux; différens corps qui suivent une même loi d'accélération; vrai comme je l'ai démontré (N. 99.) que si plusieurs corps

sont en repos viennent à descendre librement vers le centre de la terre , ils parcourent tous dans le même tems des espaces égaux , par les raisons que j'en ai données ; ainsi si l'on supposoit que la force qui meut le corps A vers B fut sa pesanteur , & que la force qui le pousse vers C fût une force égale à sa pesanteur , & qui produisit les mêmes effets , l'espace AE seroit certainement égal à l'espace AF , & ainsi des autres , mais ici je suppose deux forces inégales & différentes de la pesanteur , de sorte que l'une faisant parcourir au corps A l'espace AE dans le premier instant , l'autre dans le même instant lui seroit parcourir l'espace AF ; or il est évident que si le mouvement produit par ces deux forces étoit accéléré par quelque cause que ce fût , & que l'accélération se fit selon la loi de Galilée , le corps A en tant que poussé selon la direction AC auroit parcouru à la fin du second instant l'espace AH quadruple de AE , &c. & que le même corps en tant que poussé selon la direction AB , auroit parcouru à la fin du second instant l'espace AI quadruple de AF , &c.

COROLLAIRE II.

137. Si l'on connoît l'angle des directions BAC des forces qui concourent au mouvement composé , & les vitesses exprimées par les droites AC , AB on connoitra aussi la direction & la vitesse AD du mouvement composé , puisqu'il n'y a qu'à achever le parallelogramme pour avoir la diagonale AD ; mais si l'on connoît seulement la direction & la vitesse AD du mouvement composé , on ne connoitra pas pour cela les directions & les vitesses des forces qui concourent , parce que l'angle des directions ABC pouvant être plus grand ou moindre , les forces concourantes peuvent avoir différentes directions , & de plus les côtés AC , AB du parallelogramme décrit autour de la diagonale , pouvant avoir entr'eux différens rapports , selon que l'angle BAC est plus grand ou moindre , les vitesses des forces concourantes peuvent aussi varier.

COROLLAIRE III.

138. C'est donc la même chose de considérer le mouvement AD comme un mouvement simple causé par une force qui feroit parcourir au corps A l'espace AD dans un certain tems , ou de le considérer comme un mouvement composé causé par deux

forces, dont l'une feroit parcourir dans le même tems l'espace AC, & l'autre feroit parcourir l'espace AB.

PROPOSITION XLVII.

139. *Dans tout mouvement composé par deux forces concourantes, la vitesse est d'autant plus grande que l'angle des directions est moindre, & d'autant moindre que l'angle des directions est plus grand.*

Soit un corps en A (Fig. 48.) poussé par deux forces dont l'une feroit parcourir au corps A l'espace AB, dans le même tems que l'autre feroit parcourir au même corps l'espace AC, j'achève le parallélogramme ABCD, & la diagonale AD de ce parallélogramme représente la vitesse du mouvement composé; maintenant si l'on conçoit que l'angle BAC diminue, c'est-à-dire que AC vienne dans la position Ac, & AB dans la position Ab; il est visible qu'en achevant le parallélogramme, la diagonale Ad représentera la vitesse du mouvement composé; il s'agit donc de faire voir que Ad est plus grand que AD.

DEMONSTRATION.

Les triangles ACD, Acd ont les côtés AC, CD égaux aux côtés Ac, cd, mais l'angle ACD compris sous les deux premiers étant le complement à deux droits de l'angle BAC, est moindre que l'angle Acd, qui est le complement à deux droits de l'angle bAc, lequel est moindre que BAC, donc la base AD du triangle ACD étant opposée à l'angle ACD, est moindre que la base Ad du triangle Acd, opposée à l'angle Acd; donc la vitesse Ad du mouvement composé par les deux forces, dont l'angle des directions est bAc, est plus grande que la vitesse AD du mouvement composé par les deux mêmes forces, mais dont l'angle des directions est BAC plus grand que bAc, donc, &c.

PROPOSITION XLVIII.

140. *Dans tout mouvement composé produit par deux forces concourantes, les deux forces sont entr'elles reciproquement comme les sinus des angles que leurs directions font avec la diagonale AD (Fig. 47.) & chacune de ces forces est à une troisième force qui produiroit le mouvement AD comme le sinus de l'angle fait par la direction de l'autre*

tre force avec la diagonale, est au sinus de l'angle BAC des directions.

DEMONSTRATION.

Je nomme x la force qui feroit parcourir l'espace AC au corps A, z la force qui lui feroit parcourir l'espace AB, & y celle qui feroit parcourir la diagonale AD; ces forces étant entr'elles comme les produits de la masse par la vitesse qu'elles produisent, & la masse étant toujours la même, il s'ensuit que les forces sont comme les vitesses ou comme les espaces AC, AB, AD parcourus dans des tems égaux; donc $x, z :: AC, AB$ ou CD , & par conséquent $x, z :: \frac{1}{2} AC, \frac{1}{2} CD$; mais dans tout triangle ACD les moitiés des côtés AC, CD sont les sinus des angles auxquels ils sont opposés, donc x est à z comme le sinus de l'angle ADC au sinus de l'angle DAC, mais l'angle ADC est égal à son alterne BAD, donc x est à z reciproquement comme le sinus de l'angle BAD fait par la direction BA de z avec la diagonale, est au sinus de l'angle DAC fait par la direction AC de x avec la même diagonale.

De même $x, y :: AC, AD :: \frac{1}{2} AC, \frac{1}{2} AD$, donc x est à y comme le sinus de l'angle ADC est au sinus de l'angle ACD, mais le sinus de l'angle ADC est égal au sinus de l'angle alterne BAD, & le sinus de l'angle ACD est égal au sinus de l'angle BAC, qui est le complement à deux droits de l'angle ACD, donc x est à y comme le sinus de l'angle BAD fait par la direction AB de la force z avec la diagonale, est au sinus de l'angle BAC des directions.

PROPOSITION XLIX.

141. Un corps A (Fig. 49.) étant poussé par plusieurs forces, dont les directions & les vitesses sont exprimées par les droites AB, AC, AD, AE, trouver la direction & la vitesse AQ qu'il doit avoir.

SOLUTION.

J'acheve le parallelogramme ABOC des deux directions AB, AC, & la diagonale AO représente la direction & la vitesse d'une force qui feroit parcourir au corps A la diagonale AO, dans le même tems que la force AB feroit parcourir l'espace AB, & la force AC feroit parcourir l'espace AC; ainsi la force AO est équivalente aux deux forces AB, AC agissant ensemble chacun selon sa

direction ; j'acheve le parallelogramme des directions AO, AD ; & la diagonale AP représente une force qui est équivalente aux forces AO, AD agissant ensemble, & par conséquent équivalente aux trois forces AB, AC, AD , qui agiroient ensemble chacune selon sa direction ; j'acheve le parallelogramme des directions AP, AE , & la diagonale AQ représente une force équivalente aux deux forces AP, AE , agissant ensemble selon leur directions, donc la force AQ est équivalente aux quatre forces AB, AC, AD, AE , qui agiroient ensemble selon leur directions, & par conséquent le corps A doit suivre la direction AQ & avoir une vitesse exprimée par AQ .

Je vais donner ici une autre solution de ce Problème qui est aussi ingénieuse qu'utile, mais qui demande pour être comprise qu'on fasse attention à sa démonstration.

AUTRE SOLUTION.

Cherchez le centre de gravité H des quatre points B, C, D, E (*Fig. 53.*) qui sont aux extrémités des quatre directions AB, AC, AD, AE ; du point A par le point H , tirez la droite indéfinie AL , & portez sur cette droite autant de fois la droite AH qu'il y a de directions, c'est-à-dire, dans le cas présent quatre fois de A en L , & la droite AL exprimera la direction & la vitesse que le corps A poussé par les quatre forces doit suivre.

DEMONSTRATION.

Concevons que les quatre forces au lieu d'être en A soient en B, C, D, E , & que selon les directions & les vitesses BA, CA, DA, EA , elles poussent chacune un corps égal à A , il est évident que ces quatre corps venant à choquer le corps A , feront le même effet sur lui que si les forces s'y appliquaient elles-mêmes, si ce n'est que la direction qu'il prendroit seroit de A vers Z , au lieu que si les forces agissoient toutes en A , la direction se feroit de A vers L , ce qui ne change rien.

Je mène par le point A une droite indéfinie XAR , & des points B, C, D, E, H menant les droites BX, CV, HT, DS, ER perpendiculaires sur XR , j'acheve les parallelogrammes $BNAX, CQAV, PHTA, DOAS, EMAR$; par cette construction il est évident que la force BA est équivalente aux deux BO, BX , ou OA, XA , que la force CA est équivalente aux

deux forces CQ, CV ou QA, VA, & ainsi des autres; ainsi au lieu de quatre forces j'en ai huit, & le corps A doit prendre une direction & une vitesse causée par ces huit forces.

Or de ces huit forces il y en a quatre dont les directions BX, CV, DS, ER ne sont point contraires, & par conséquent dans le même tems que chacune d'elles feroit parcourir au corps A la ligne qui marque sa vitesse, il faut que le corps A conçu comme poussé par ces quatre forces, parcoure un espace AI égal à la somme des quatre vitesses; or le point H étant le centre de gravité des quatre corps B, C, D, H, chacun desquels est égal à A, si on les conçoit tous transportés en H, leur moment par rapport à la droite XR sera égal au moment qu'ils ont chacun en leur place, ainsi on aura $4A \times HT = A \times BX + A \times CV + A \times DS + A \times ER$, & divisant tout par A, on aura $4HT = BX + CV + DS + ER$, c'est-à-dire que si l'on porte HT, sur la direction AP quatre fois de A en I, la droite AI sera égale aux quatre vitesses, & que par conséquent si le corps A n'étoit poussé que par ces quatre forces mises en A, sa direction & sa vitesse seroit exprimée par AI.

Maintenant les quatre autres forces concourantes ont des directions BN, CQ, DO, EM opposées les unes aux autres, & pour trouver quel est l'excédent des unes sur les autres, considérons que les corps B, C, D, E ayant leur centre de gravité commun en H, ils seroient en équilibre autour de HT, & par conséquent les momens $A \times XT + A \times VT$ seroient égaux aux momens $A \times RT + A \times ST$, c'est-à-dire que les produits des corps B, C égaux chacun à A, multipliés par leurs distances XT, VT à la droite HT, seroient égaux aux produits des corps D, E égaux chacun à A multipliés par leurs distances RT, ST, à la même droite HT; puis donc que nous avons $A \times XT + A \times VT = A \times RT + A \times ST$, si nous divisons par A nous aurons $XT + VT = RT + ST$, mais les forces BN, CQ ou XA, VA sont moindres que XT, VT, & au contraire les forces DO, EM, ou RA, SA sont plus grandes que RT, ST, donc les forces BN, CQ sont moindres que DO, EM, & comme ces forces sont contraires, il s'ensuit que les deux BN, CQ doivent être détruites, & que des deux DO, EM, il ne doit rester que l'excès qu'elles ont sur BN, CQ, lequel excès seul agira sur A lorsque les quatre forces seront appliquées en A.

Pour trouver donc cet excès, je considère que si les quatre

corps B, C, D, E, autour de HT tournoient autour de AI, le moment des corps D, E seroit preponderant, & que le point T seroit le point ou les quatre corps étant transportés, leur moment par rapport à AI seroit égal à l'excès du moment des corps D, E sur le moment des corps B, C, donc nous aurions $4A \times TA = A \times RA + A \times SA - A \times XA - A \times VA$, & divisant tout par A, nous aurions $4TA = RA + SA - XA - VA$, c'est-à-dire que l'excès des forces DO, EM, ou AS, AR sur les forces BN, CQ seroit $4TA$, donc les quatre forces agissant ensemble en A, le corps A devoit prendre une direction & une vitesse AY quadruple de AT, ou de PH, donc puisque nous avons trouvé que les quatre autres forces agissant en A, le corps A devoit prendre une direction AI quadruple de AP, il s'ensuit que les huit forces agissant ensemble, le corps A doit avoir la direction & la vitesse de la diagonale AL; & il est évident que cette diagonale passe par le point H, & que AL est quadruple de AH, car puisque $IL = AV = 4AT = 4PH$, de même que $AI = 4AP$, on a donc AI, AP :: IL, PH, par conséquent PH étant ordonnée au triangle IAL, le point H est sur la diagonale AL; & comme l'on a aussi AL, AH :: IL, PH, donc $AL = 4AH$.

PROPOSITION L.

142. Si une force pousse ou tire un corps avec une direction oblique à ce corps elle lui communique moins de mouvement que si elle le poussoit ou le tiroit avec une direction perpendiculaire.

DEMONSTRATION.

Soit une force exprimée par la droite AB (Fig. 50.) laquelle pousse ou tire le corps CD avec une direction oblique AB; du point A j'abbaisse AE perpendiculaire sur CD, & achevant le parallelogramme AEFB, il est visible que la force AB qui seroit parcourir à un corps l'espace AB dans un certain tems est équivalente à deux forces dont l'une seroit parcourir dans le même tems au même corps l'espace AE, & l'autre lui seroit parcourir l'espace AF, ainsi la force AB avec sa direction fait le même effet que feroient les deux forces AE, AF jointes ensemble avec leur directions, ou ce qui est la même chose, la force AB agit avec une direction composée de la direction AE & de la direction AF, mais par la direction AF elle ne fait rien sur le corps CB, à cause
que

page 136 X correction
dans le sens de cette
ordonnée, ne s'agit que
des cas particuliers qui
sont le même genre

que la direction AF étant parallèle au corps CD, la force avec cette seule direction ne feroit que glisser sur ce corps sans le mouvoir, donc elle n'agit que par sa direction AE, c'est-à-dire qu'elle ne pousse ou ne tire le corps qu'avec un effort égal à la force AE.

Maintenant concevons que le corps CD devienne perpendiculaire à la direction AB; & soit dans la position HT, la direction AB sera toujours composée des deux directions AE, AF, ou FB, EB, & comme ces deux directions peuvent agir sur le corps HT, il s'ensuit que la force AB agit sur le corps HT avec un effort égal aux efforts que peuvent faire les deux forces FB, EB avec leurs directions; or les deux directions FB, EB étant obliques, je tire ER, FT perpendiculaires à HT, & achevant les parallelogrammes ERBS, FVBT, je trouve que les forces FB, EB, n'agissent sur le corps HT que comme les forces ER, FT; donc AB agit sur HT comme les forces ER, FT prises ensemble, mais ER, FT prises ensemble sont égales à AB; car par la construction j'ai $ER = SB$, & à cause des triangles semblables & égaux ESB, FVA, j'ai $SB = AV$, donc $ER = AV$; d'autre part j'ai $FT = VB$, donc $ER + FT = AV + VB = AB$; puis donc que AB agit sur HT comme $ER + FB = AB$, il s'ensuit que la force AB perpendiculaire sur HT agit sur HT de tout son pouvoir, donc elle agit plus que lorsqu'elle étoit oblique à ce corps, puisqu'elle n'agissoit que comme AE moindre que AB, & par conséquent une force qui pousse ou tire un corps avec une direction perpendiculaire lui communique plus de mouvement que si elle le poussoit ou le tiroit avec une direction oblique.

COROLLAIRE I.

143. *Le mouvement qu'une force communique à un corps avec une direction perpendiculaire est au mouvement qu'elle lui communique avec une direction oblique, comme le sinus droit est au sinus de l'angle que fait la direction oblique avec le corps ou au sinus de l'angle d'incidence ABE.*

Quand AB est oblique sur le corps elle n'agit que comme la force AE, & quand elle est perpendiculaire, elle agit comme AB, mais les mouvemens que deux forces communiquent sur un corps dans un même tems sont comme les forces, donc le mouvement communiqué par AB perpendiculaire est au mouvement communiqué par AB oblique, comme AB, AE, ou comme $\frac{1}{2}AB$ à $\frac{1}{2}AE$; mais $\frac{1}{2}AB$ est le sinus de l'angle droit AEB ou le sinus total, &

$\frac{1}{2}AE$ est le sinus de l'angle d'incidence ABE, donc, &c.

COROLLAIRE II.

144. Si une force tire ou pousse avec une direction oblique AB (Fig. 51.) un corps attaché à un bras de levier BD qui tourne autour d'un point fixe D, le mouvement qu'elle communique à ce corps est à celui qu'elle communiqueroit si elle lui étoit perpendiculaire comme la droite DO, tirée du centre D perpendiculairement sur la direction AB, est au bras DB, ou à la distance du corps B au centre D; du point A je mene AR perpendiculaire à DB, & achevant le parallélogramme ARBS, je trouve que la force AB oblique n'agit que comme la force AR, au lieu que si elle étoit perpendiculaire elle agiroit comme AB; ainsi la force AB perpendiculaire est à la force AB oblique comme AB est à AR, mais les triangles rectangles ARB, DBO, étant semblables à cause de l'angle aigu RBO qui leur est commun, on a AB, AR :: DB, DO, donc la force perpendiculaire AB est à la force AR oblique comme DB est à DO; ainsi si le moment du corps poussé ou tiré par AB perpendiculaire est $B \times BD$, celui qui lui sera communiqué par AB oblique sera $B \times DO$.

CHAPITRE VI.

Du repos & de la chute des Corps.

DEFINITIONS.

145. **O**N dit qu'un corps tombe lorsqu'il passe du repos au mouvement par la seule force de sa pesanteur.

La ligne horizontale vraie est une ligne dont tous les points sont également éloignés du centre de la terre, & comme la terre peut être regardée comme sphérique, il s'ensuit que la ligne horizontale vraie est un arc de cercle dont le centre est le centre de la terre.

La ligne horizontale apparente est une ligne droite qui touche la ligne horizontale vraie en un point, & qui par conséquent est perpendiculaire à une droite tirée du point d'attouchement au centre de la terre. La circonférence de la ligne horizontale vraie étant extrêmement grande, si la ligne horizontale appa-

rente n'est pas d'une longueur qui surpasse 150 toises, on peut la confondre avec la ligne horizontale vraie, la distance des points de l'une aux points de l'autre de part & d'autre du point d'attachement étant très peu de chose à l'égard de la distance de ces mêmes points au centre de la terre.

PROPOSITION LI.

146. *La ligne de direction d'un corps grave qui se meut par la seule force de sa pesanteur est perpendiculaire aux lignes horizontales vraie & apparente.*

DEMONSTRATION.

Soit O le centre de la terre (Fig. 52.) la circonférence HCD représentera la ligne horizontale vraie. Soit B le point d'où le corps grave B tombe par la seule force de sa pesanteur, puisque les corps graves mus par la seule force de leur pesanteur tendent au centre de la terre, la direction du corps B sera donc la droite BO, & par conséquent elle tombera perpendiculairement en C sur la circonférence HCD qui représente la ligne horizontale vraie; & il est visible que si par le point C on mène la tangente LI qui représentera la ligne horizontale apparente, la ligne BO sera aussi perpendiculaire sur LI, donc, &c.

PROPOSITION LII.

147. *Trouver si un plan ABCD (Fig. 54.) est horizontal, ou s'il ne l'est pas.*

SOLUTION.

Ayez un Equerre EFG dont les jambes EF, FG faisant un angle quelconque soit parfaitement égales entr'elles, & que cet Equerre soit traversé par une base HI, en sorte que FH soit égal à FI. Divisez HI en deux également au point O que vous marquez exactement; prenez un plomb attaché à l'extrémité d'un fil & suspendez-le au sommet F de l'angle EFG, cet instrument étant ainsi préparé

Tirez dans le plan proposé ABCD une droite LM, & prenant votre Equerre posez-le à plomb sur la ligne LM, en sorte que ses jambes FE, FG portent sur deux points EG de cette ligne; vous connoîtrez que l'Equerre est perpendiculaire sur la

ligne LH en laissant pendre librement le plomb, car quand le fil FS touchera la base HI, & que toutes ses parties seront en ligne droite, il est visible que ce fil sera dans le plan de l'Equerre EFG, & comme la direction FS sera la direction d'un corps grave S, il est encore évident que FS sera perpendiculaire à l'horizon, & que par conséquent le plan EFS de l'équerre dans lequel cette ligne se trouve sera perpendiculaire à l'horizon; donc la ligne EG ou LM se trouvera aussi dans le plan perpendiculaire à l'horizon.

Maintenant pour sçavoir si EG ou LM est horizontale ou parallèle à l'horison, examinez si le fil FS passe précisément par le point O, & si cela est, la ligne EG ou LM sera horizontale; car le triangle HFI étant isoscele, & sa base HI étant divisée en deux également en O, il est visible que la droite FS est perpendiculaire sur cette base, mais à cause des triangles semblables HFI, ELG, il est encore visible que si la ligne FS étoit prolongée, elle seroit perpendiculaire sur EG ou LM; donc la direction du corps grave S tendant au centre de la terre seroit perpendiculaire sur LM, & par conséquent LM est horizontale (N. 146.); donc le plan ABCD n'incline pas plus vers le centre de la terre du côté de L que du côté de M; il reste donc à voir s'il n'incline pas plus du côté de AB que du côté de DC; & pour cela, tirez dans ce plan une autre ligne PQ qui coupe la précédente, & faisant sur cette ligne avec votre Equerre les mêmes opérations que vous faites sur LM, vous connoîtrez si cette ligne est horizontale, & si cela est, le plan ABCD n'inclinant pas plus vers le centre de la terre du côté de B que du côté de C, & du côté de L que du côté de M, il sera horizontal.

DEFINITION.

148. Nous appellerons ici *base* d'un corps tout plan horizontal sur lequel le corps s'appuye, soit que ce corps soit plus grand ou moindre que la face du corps qui touche cette base; & par la même raison si ce corps étoit soutenu sur plusieurs pieds, nous concevrons un plan horizontal qui porte sur ces pieds & sur lequel le corps sera appuyé.

PROPOSITION LIII.

149. Si du centre de gravité d'un corps on mene une perpendicu-

laire sur la base horizontale qui le soutient, & que cette perpendiculaire tombe dans l'aire de la base, c'est-à-dire dans l'aire sur laquelle est l'une des surfaces de ce corps, le corps restera ferme & ne tombera point, mais si cette perpendiculaire tombe hors de la base, le corps tombera.

DEMONSTRATION.

Soit le solide AD soutenu par le plan horizontal CD (Fig. 55.) ou par les quatre pieds CR, EF, HI, DQ, sur lesquels je conçois un plan horizontal CD qui sert de base au corps; du centre de gravité O du solide j'abaisse une perpendiculaire OX, & comme cette perpendiculaire tombe dans l'aire de la base CD, je dis que le solide AD restera ferme & ne tombera point; car toutes les parties de ce solide étant en équilibre autour du centre O, l'effort qu'elles font vers le centre de la terre peut être regardé comme étant réuni au centre O, ainsi la pesanteur commune de toutes ces parties, c'est-à-dire la pesanteur du corps tend vers le centre de la terre selon la direction OX, mais le point X étant un point de la base s'oppose à la descente du centre O, donc ce centre doit demeurer en repos, & par conséquent toutes les parties du corps étant en équilibre autour de lui, il ne doit point y avoir de mouvement, & le corps AD doit rester ferme sur sa base sans tomber.

Concevons maintenant un autre solide appuyé sur la base horizontale CD (Fig. 56.) ou sur quatre pieds sur lesquels je conçois une base horizontale CD qui soutienne le corps; du centre de gravité O, je mene OX perpendiculaire à l'horizon, & comme cette perpendiculaire ne rencontreroit cette base que dans son prolongement je dis que le corps AD doit tomber; car la pesanteur commune de toutes les parties du corps AD tendant vers le centre de la terre selon la direction OX, & rien ne se trouvant dans cette direction qui empêche le centre O de descendre, ce centre descendra & toutes les parties du solide avec lui, & par conséquent le corps tombera.

COROLLAIRE I.

150. La base d'un solide étant donnée, & la position de son centre de gravité, on peut trouver si ce solide sera en repos, ou s'il tombera.

DE MECHANIQUE

COROLLAIRE II.

Un Corps peut être des solides inclinés AD (Fig. 56.) sans que le centre de gravité tombe dans le plan de la base. Il ne faut pas s'étonner s'il se trouve des édifices qui ne tombent pas.

COROLLAIRE III.

Cette Proposition sert à rendre raison de plusieurs choses qui nous empêchent de tomber. Par exemple, nous demandons pourquoi un homme adossé contre une muraille ne peut se bailler pour prendre quelque chose sans aller à terre. On verra d'abord que c'est que cet homme ne pouvant se faire avancer la tête & les bras hors de l'aire de sa base, & la muraille empêchant les autres parties du corps de s'avancer vers le côté opposé pour conserver le centre d'équilibre dans sa même position, ce centre change nécessairement de place, & la perpendiculaire tirée de ce centre sur la base venant à passer hors du plan de la base, c'est-à-dire hors du plan que les pieds occupent, l'homme doit aussi nécessairement se renverser. Pour éviter cet accident, il faut donc que cet homme s'écarte de la muraille, afin de pouvoir faire en liberté tous les mouvemens qui doivent le conserver dans son équilibre, & l'on peut raisonner de la même manière sur tous les mouvemens que la Nature bien mieux que la Science nous apprend à faire pour nous empêcher de tomber à tous momens.

PROPOSITION LIV.

Un Corps A (Fig. 57.) étant suspendu à un point C d'un levier BD, soutenir deux forces qui étant appliquées en B & D, soutiennent le Corps A, de façon que le levier reste dans une situation équilibrée.

SOLUTION.

De la façon dont le Problème est proposé, l'on voit que c'est la même chose que si l'on mettoit en C une puissance égale au poids A qui soutient le levier sans l'empêcher de tourner, & qu'on ôtoit A de sa place on le partageroit en deux parties qui fussent toutes deux restées en équilibre autour du point C, car alors on voit bien que la force C soutiendrait les parties B, D, &

que ces parties entretiendroient le levier dans une situation horizontale.

Pour cela donc je considere que puisque le point C doit être le centre d'équilibre des parties B, D, si je prens le point B pour le centre de mouvement, le point C sera le point où les parties B, D étant transportées leur moment par rapport à B sera égal aux momens qu'ils ont en leur place, c'est-à-dire au moment de D, car il n'y a que cette partie qui ait un moment par rapport au centre B; donc les parties B, D, c'est-à-dire A multiplié par la distance BC sera égal à D multiplié par BD; ainsi divisant $A \times BC$ par la distance BD, le quotient $\frac{A \times BC}{BD}$ sera égal à la partie D que je cherche, & par conséquent la partie B sera $A - \frac{A \times BC}{BD}$.

Prenant donc deux poids égaux aux deux parties de A que je viens de trouver, & les mettant en B & D, ils seront en équilibre, &c.

Et remettant le corps A en C en ôtant la puissance qui soutenoit le levier, & mettant au lieu des poids B, C deux puissances qui soient en même raison, le corps sera soutenu par ces deux puissances, & le levier sera horizontal.

Supposant $A = 30$ livres, $BC = 2$ pieds, $CD = 3$ pieds, on aura $D = \frac{A \times BC}{BD} = \frac{30 \times 2}{2 + 3} = 12$, donc $B = 30 - 12 = 18$; ainsi la puissance D doit être à la puissance B, comme 12 à 18, ou comme 2 à 3.

COROLLAIRE I.

154. Au lieu des puissances B, D, on pourroit mettre deux poids X, Z égaux aux deux puissances B, D, c'est-à-dire, en même raison que B, D, & égaux ensemble au corps A, lesquels poids seroient attachés à des cordes qui passeroient sur deux poulies E, F, en sorte que les directions BE, DF fussent perpendiculaires au levier de même que la direction du corps A; car autrement les choses changeroient ainsi que nous dirons bientôt.

COROLLAIRE II.

155. Au lieu du corps A on pourroit supposer un corps de même poids de la longueur du levier inégal dans ses parties, & dont le centre de gravité seroit le point C; car alors concevant

MCN de changer de situation ; car cela étant, il est visible que l'effort qu'elles font sur le levier BD étant le même, ces forces considérées comme attachées au levier BD, le tiendront dans la situation horizontale ; mais afin que les deux forces attachées en M, N, soient en équilibre autour de C, il faut que leur momens par rapport à C soient égaux, & par conséquent il faut que leurs distances MC, NC leur soient réciproques ; donc $MC, NC :: D, B$, & par conséquent $MC + NC, NC :: D + B, B$; mais $D + B$ doit être égal à A, puisque les deux forces doivent soutenir le corps ; donc $MC + NC, NC :: A, B = \frac{A \times NC}{MC + NC}$; donc $D = A - \frac{A \times NC}{MC + NC}$.

Prenant donc deux forces qui soient entr'elles comme les valeurs de B & D que nous venons de trouver, & qui aient les directions BE, DF, ces forces appliquées en B & D selon les directions obliques données, soutiendront le corps A, & tiendront le levier BD en équilibre.

Soit $A = 30$ livres $MC = \frac{1}{2}$ pieds, & $NC = \frac{1}{4}$ pieds ; donc $B = \frac{A \times NC}{MC + NC} = \frac{30 \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{150}{\frac{3}{4}} = 18 \frac{1}{3}$, & $D = 30 - 18 \frac{1}{3} = 11 \frac{1}{3}$.

Ce seroit la même chose si au lieu des puissances B, D, on prenoit deux poids X, Z égaux ensemble à A, & qui fussent entr'eux comme B, D, & qu'étant attachés à des cordes, ils passassent sur deux poulies E, F, en sorte qu'ils tirassent le levier selon les directions BE, DF des forces B, D.

Ce seroit encore la même chose, si au lieu du corps A on mettoit une puissance égale à A en C pour soutenir le levier, & qu'au lieu des forces B, D, on mit deux poids égaux ensemble à A, & qui fussent entr'eux comme B, D, & qu'étant attachés à des cordes ils passassent sur deux poulies, en sorte qu'ils tirassent le levier selon les directions BG, DH, qui sont les mêmes que celles des puissances B, D, si ce n'est qu'elles sont dans un sens opposé.

J'ai dit qu'afin que les puissances mises en M & en N soient en équilibre, il faut que leurs momens soient égaux, & par ces momens j'ai entendu les produits de ces puissances par leur bras de levier MC, NC ; car il est visible que si le levier recourbé MCN venoit à tourner autour du point C, les points M, N, décriroient dans le même tems des circonférences qui seroient entr'elles comme leur rayons ; or ces circonférences exprime

roient les vitesses des forces M , N , ainsi ces vitesses seroient entr'elles comme les circonférences, ou comme les rayons MC , NC , donc les momens des forces seroient les produits $M \times MC$, $N \times NC$, & par conséquent la même chose arrive par rapport à un levier recourbé MCN que par rapport à un levier droit BD .

PROPOSITION LV.

159. *Un levier ou bâton AB dont le centre de gravité est O étant donné (Fig. 59.) poser ce bâton sur un plan horizontal $EFGH$, de façon qu'un poids P étant suspendu à l'un de ses bouts A hors du plan horizontal, le bâton reste dans sa situation horizontale.*

SOLUTION.

Le point O étant le centre de gravité du bâton, je conçois que toute sa pesanteur soit ramassée en O comme un poids qui seroit suspendu en ce point, après quoi je cherche le centre de gravité commun R du poids O & du poids P , & plaçant ce bâton sur le plan EG de façon que le point R porte sur le plan, j'attache le poids P en A , & le bâton reste dans sa situation horizontale; car le centre commun de gravité R du bâton & du corps P ne pouvant descendre à cause que le plan EG le soutient, il est visible que le bâton & le corps P resteront en repos, & que rien ne tombera.

PROPOSITION LVI.

160. *Si un Corps AB (Fig. 61.) est soutenu par deux cordes obliques AR , RB , lesquelles se rencontrent en un point R , la direction RO du centre de gravité O passe par le point R où les corps s'entre-coupent.*

DEMONSTRATION.

Le centre de gravité est le point où l'on peut concevoir que toute la pesanteur du corps est réunie; ainsi ce centre descend toujours autant qu'il peut descendre, à moins qu'il ne soit empêché; c'est pourquoi il s'agit de faire voir que si le centre de gravité n'étoit pas en O sur la droite RO qui passe par R & qui est perpendiculaire à l'horizon, ce centre ne seroit pas aussi bas qu'il pourroit être quoique rien ne l'en empêchât.

Supposons donc que le centre de gravité soit en X ; du centre R par le point X je décris l'arc de cercle XP , le point P sera

plus bas que X ; car menant du point X la droite XQ perpendiculaire à RP, cette droite sera le sinus de l'arc XP ; donc Q sera plus proche de R que P. & par conséquent P sera plus bas que Q & plus bas aussi que X, à cause que XP étant perpendiculaire à la droite RP, est par conséquent horizontale ; ainsi les points X, Q étant également éloignés du centre de la terre, P est plus proche du même centre que X puisqu'il en est plus proche que Q ; donc si le centre de gravité du corps AB étoit en X, il ne descendroit pas autant qu'il pourroit descendre, quoique rien ne l'en empêchât ; car la corde AR peut décrire l'arc AM, & se trouver dans la position RM, & la corde BR peut décrire l'arc BN & se trouver dans la position RN, en sorte que le point X se trouve en P qui est le point le plus bas de l'arc XPS, donc, &c.

Et on prouvera la même chose si on prétendoit que le centre de gravité fut de l'autre côté en Z.

CHAPITRE VII.

Du mouvement des Corps sur un plan incliné à l'horison.

CE que nous venons de dire dans le Chapitre précédent touchant le mouvement composé, nous fait entendre pourquoi un corps A (Fig. 61.) descend lorsqu'il est mis sur un plan incliné BC ; car la direction AR de sa pesanteur étant oblique au plan, cette pesanteur équivaut à deux forces, dont l'une pousseroit selon la direction AS perpendiculaire, & l'autre selon la direction AX parallèle à ce plan ; mais le plan incliné ne s'oppose qu'à la force AS, donc il reste encore à la pesanteur la force AX, & c'est selon celle-ci qu'elle entraîne le corps en le faisant descendre obliquement vers le centre de la terre.

PROPOSITION LVII.

161. Si un corps A descend le long d'un plan incliné BC (Fig. 61.) il descend moins vite que s'il descendoit librement vers le centre de la terre.

DÉMONSTRATION

La direction de la pesanteur du corps A étant la droite AR perpendiculaire à l'horison, laquelle rencontre le plan incliné en R,

Tij

je tire du centre de gravité A la droite AS perpendiculaire sur le plan incliné, & la droite AX parallèle à ce plan, & achevant le parallélogramme ASRX autour de la diagonale AR, il est visible que si la pesanteur du corps A fait parcourir à ce corps l'espace AR dans un tems déterminé, elle équivaut à deux forces dont l'une dans le même tems feroit parcourir au même corps l'espace AS, & l'autre l'espace AX. Maintenant supposons que la pesanteur rencontre un obstacle CB qui détruise la force AS, il est sûr qu'il ne lui restera plus que la force AX, & par conséquent elle ne fera plus parcourir au corps A que l'espace AX dans le même tems qu'elle lui auroit fait parcourir l'espace AR si elle n'avoit point rencontré d'obstacles; mais lorsque les espaces sont parcourus dans un même tems les vitesses sont comme les espaces, donc la vitesse du corps A poussé par sa pesanteur qui ne rencontre point d'obstacle, est à la vitesse du même corps poussé par sa pesanteur qui rencontre l'obstacle CB comme AR est à AX, mais AR étant l'hypoténuse du triangle rectangle ARX est plus grande que le côté AX; donc la vitesse du corps A descendant librement vers le centre de la terre, est plus grande que la vitesse du même corps A descendant le long du plan incliné BC.

DEFINITION.

162. Nous appellerons *pesanteur absolue* d'un corps A, la force qui le fait descendre librement vers le centre de la terre, & *pesanteur relative* la force qui le fait descendre en rencontrant un obstacle comme il vient d'être dit.

COROLLAIRE I.

163. La pesanteur absolue d'un corps est à la pesanteur relative, comme la longueur BC du plan incliné sur lequel le corps descend est à la hauteur CD de ce plan; la pesanteur absolue est à la relative, comme AR est à AX, mais les triangles rectangles ARX, RBP étant semblables, on a $AR, AX :: RB, RP$, & à cause des triangles semblables BRP, BCD, on a $RB, RP :: CB, CD$, donc $AR, AX :: CB, CD$.

COROLLAIRE II.

164. Plus l'angle CBD du plan incliné devient grand, plus aussi l'angle ARX qui lui est égal devient grand, & par consé-

quent le côté AX qui exprime la pesanteur relative, devient plus grande par rapport à AR qui exprime la pesanteur absolue, de façon que quand l'angle devient droit, la pesanteur relative n'est autre chose que la pesanteur absolue, au contraire plus l'angle CBD diminue, plus aussi le côté AX diminue par rapport à la diagonale AR; ainsi la pesanteur relative diminue, de sorte que quand l'angle devient infiniment petit ou nul, la pesanteur relative est aussi nulle, & la pesanteur absolue ne pouvant surmonter l'obstacle du plan horizontal BD, le corps reste en repos.

COROLLAIRE III.

165. La pesanteur absolue est à la relative, comme le sinus droit est au sinus de l'angle d'inclinaison; car la pesanteur absolue est à la relative, comme la longueur BC à la hauteur DC, ou comme $\frac{1}{2}BC$ est à $\frac{1}{2}DC$; mais dans le triangle BCD, le sinus de l'angle droit est $\frac{1}{2}BC$ ou la moitié du côté opposé, & le sinus de l'angle d'inclinaison est $\frac{1}{2}CD$ ou la moitié du côté opposé, donc, &c.

COROLLAIRE IV.

166. Si un même corps A descend successivement sur divers plans inégalement inclinés CB, cb, les pesanteurs respectives sont entr'elles comme les sinus des angles d'inclinaison; car la pesanteur absolue est à la pesanteur respectueuse sur CB, comme le sinus total à l'angle d'inclinaison CBD, & la pesanteur absolue est à la pesanteur respectueuse sur cb comme le sinus total à l'angle d'inclinaison cbd; or la pesanteur absolue étant toujours la même, & le sinus total aussi, puisqu'on peut faire $bc = BC$ en prolongeant ou en raccourcissant la droite bc sans changer l'angle d'inclinaison cbd; il s'en suit que les pesanteurs respectives sont entr'elles comme les sinus des angles CBD, cbd.

PROPOSITION LVIII.

167. Si deux corps spheriques A, M, (Fig. 62.) attachés aux extrémités d'une corde se meuvent l'un sur un plan incliné BC, & l'autre le long de la hauteur CD, en sorte que les directions NM, NA, soient parallèles aux côtés BC, CD, & que ces deux corps se tiennent en équilibre, je dis que le corps M est au corps A, comme la hauteur DC du plan incliné est à sa longueur BC.

DEMONSTRATION.

Du centre de gravité A du corps A, par lequel je conçois que la direction AN passe, j'abaisse AR perpendiculaire sur le plan incliné, & cette perpendiculaire passe évidemment par le point d'attouchement du corps A & du plan; du même point A, je mene AH perpendiculaire sur le plan horizontal BD; enfin du point R je mene RS perpendiculaire sur la direction de la pesanteur du corps A.

Comme le corps A ne s'appuye sur le plan incliné que par le point R, il est visible que si l'on retranche la partie BR de ce plan, les corps A, M seront encore en équilibre, & le point R du levier AR sera le point A d'appui, autour duquel le corps M & le corps A se contrebalancent; or M tirant la droite AR avec une direction perpendiculaire, fait le même effet sur cette droite que s'il étoit en A, & la pesanteur du corps A tirant par la direction AH oblique à AR, n'agit sur AR que comme elle agiroit sur le point S de la droite RS tirée du centre de mouvement R perpendiculairement sur sa direction (N. 144); ainsi cette pesanteur étant mise en S fera le même effet sur le levier SR qu'elle fait sur AR; or l'effet que M fait sur AR contrebalance celui que la pesanteur de A fait sur AR, donc considérant ARS comme un levier recourbé, l'effet de M sur AR doit contrebalancer celui de la pesanteur de A sur SR, & il est visible que cette pesanteur est la pesanteur absolue du corps A, attendu que si M ne soutenoit plus ce corps, rien n'empêcheroit sa pesanteur de le pousser selon sa direction perpendiculaire à l'horison; puis donc que M mis en A & la pesanteur absolue de A mise en S, sont en équilibre autour du point d'appui ou de mouvement R, il s'ensuit que M est à la pesanteur absolue ou au corps A reciproquement comme SR est à AR; mais les triangles BCD, ASR sont semblables, car le triangle rectangle BTH semblable au triangle rectangle BCD, est aussi semblable au triangle RTS, à cause de l'angle aigu BTH égal à l'angle aigu RTS, & le triangle RTS étant semblable au triangle rectangle ATR, à cause de l'angle aigu commun ATR, est aussi semblable au triangle ASR parce que celui-ci est semblable à ATR, à cause de l'angle aigu TAR commun à tous les deux, donc le triangle SAR est semblable au triangle BDC, & SR, AR :: CD, BC, mais le poids M est au poids A comme SR est à AR, ainsi qu'on vient de voir, donc

le poids M est au poids A , comme la hauteur CD du plan incliné est à la longueur BC de ce même plan.

COROLLAIRE I.

168. Donc le corps M est au corps A comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus total (*N.* 165.) ou comme la pesanteur relative du corps A est à sa pesanteur absolue.

COROLLAIRE II.

169. Si le corps A étant en X montoit de X en A , la longueur XN de sa corde seroit raccourcie de la grandeur XA , & la longueur NM de la corde NM se seroit augmentée de la même grandeur XA , donc M auroit descendu vers le centre de la terre de la quantité $XA = BR$, au contraire A ne se seroit éloigné de ce centre que de la quantité $AV = RZ$, donc la quantité dont le corps M descendroit est à la quantité dont le corps A monteroit comme BR à RZ , ou comme BC à CD , ou comme la longueur du plan incliné à sa hauteur, c'est-à-dire, comme la pesanteur absolue du corps A à sa pesanteur relative, ou comme le sinus total à l'angle d'inclinaison, ou enfin comme le poids A est au poids M .

COROLLAIRE III.

170. Puis donc que le corps M parcourroit en descendant un espace égal à BR dans le même tems que le corps A s'éloigneroit du centre de la terre d'un espace égal à RZ , il s'ensuit que les vitesses de ces corps, selon la direction perpendiculaire à l'horison, sont entr'elles comme BR à RZ , ou comme BC à CD ; ainsi leurs momens seroient comme $M \times BC$, $A \times CD$, c'est-à-dire en raison composée de la raison M , A des masses, & de la raison BC , CD des hauteurs par lesquelles l'une descend & l'autre monte; or quand les corps M , A sont en équilibre, les momens $M \times BC$, $A \times CD$ sont égaux, donc on a M , $A :: CD$, BC , & c'est ce que nous venons de trouver ci-dessus (*N.* 167).

COROLLAIRE IV.

171. Si au lieu du corps M on mettoit une force ab qui pousât le corps A de b en N , c'est-à-dire dans une direction contraire à la direction NX du corps A , & que la puissance ab & le corps fussent en équilibre, il est visible que la force ab seroit éga-

le à la force du corps M , & qu'ainsi la force ab feroit au corps A comme CD à BC .

Et par la même raison, si une force mise en N tiroit le corps de A en N , enforte qu'il y eût équilibre, la force mise en N feroit au corps A comme CD à CB .

COROLLAIRE V.

172. Un plan incliné BC & sa hauteur CD étant donnés, on trouvera le poids qu'il faudroit mettre en M pour tenir en équilibre le corps donné A sur le plan incliné, en faisant cette analogie ; $BC, CD :: A, \frac{A \times CD}{BC}$.

Soit $BC=5$, $CD=3$, & $A=20$ lb, faisant $5, 3 :: 20 ; \frac{3 \times 20}{5} = \frac{60}{5} = 12$, le quatrième terme 12 lb fera le poids qu'il faut mettre en M .

COROLLAIRE VI.

173. Et si les poids A, M étoient donnés, & qu'on voulût trouver l'angle d'inclinaison CBD qu'il faudroit donner au plan incliné CB , afin que le corps A mis sur ce plan fût en équilibre avec le corps M , on prendroit une longueur déterminée BC pour la longueur du plan incliné, & prenant cette longueur pour le double du sinus total, on diroit A, M , comme le sinus total est au sinus de l'angle d'inclinaison, ou comme le double du sinus total au double du sinus de l'angle d'inclinaison ; c'est pourquoi prenant une quatrième proportionnelle aux deux corps A, M , & à la longueur BC , & décrivant un demi-cercle autour de BC , on porteroit de l'extrémité C sur la circonférence la quatrième proportionnelle trouvée de C en D , & tirant la droite BD , l'angle CBD fera l'angle d'inclinaison cherché, car dans le triangle CBD la moitié de BC est à la moitié de CD , comme le sinus de l'angle droit BDC opposé à BC au sinus de l'angle CBD d'inclinaison opposé à CD , on auroit donc A, M comme le sinus droit est au sinus de l'angle d'inclinaison, & par conséquent les deux corps seroient en équilibre.

COROLLAIRE VII.

174. Soient deux plans BC, GE (*Fig. 63.*) également ou inégalement inclinés à l'horison, que nous supposons perpendiculaires

culaires entr'eux, & de plus égaux en longueur simplement pour mieux faire entendre ce que nous devons dire; car dans le fonds la différence des longueurs n'y fait rien; & soit un corps A soutenu par l'un & par l'autre; concevons que le plan incliné EG soit retiré, & qu'un corps M qui tire le corps A avec une direction AR parallèle au plan incliné BC, soit en équilibre avec ce corps; nous aurons $A, M :: BC, CD$, & par conséquent $A, BC :: M, CD$.

Concevons de même que le plan GE soit remis, & le plan BC ôté, & qu'un corps N qui tire A avec une direction AX parallèle au plan BC soit en équilibre avec A; nous aurons $A, N :: GE, EF$, donc $A, GE :: N, EF$, mais nous avons $GE = BC$ par la construction, donc $A, BC :: N, EF$; or nous venons de trouver $A, BC :: M, CD$, donc $M, CD :: N, EF$, & par conséquent $M, N :: CD, EF$, c'est-à-dire les poids M, N sont entr'eux comme les droites CD, EF en supposant les plans inclinés égaux en longueur, & comme en prenant chacun de ces plans ou chacune de leurs moitiés pour le sinus total ou pour le sinus de l'angle droit EFG ou CDB, la droite CD ou sa moitié seroit le sinus de l'angle d'inclinaison CBD, & la droite EF ou sa moitié le sinus de l'angle d'inclinaison EGF, il s'ensuit que les corps M, N sont entr'eux comme les sinus des angles d'inclinaison CBD, EGF.

Si l'un des plans inclinés étoit moindre que l'autre, par exemple EG moindre que BC, on couperoit BC en *a*, en sorte qu'on eût $Ba = EG$, & tirant *ab* parallèle à CD, il est visible qu'on auroit $Ba, BC :: ab, CD$, ou $Ba, ab :: BC, CD$, & comme nous avons $A, M :: BC, CD$, nous aurions aussi $A, M :: Ba, ab$, ou $A, Ba :: M, ab$; de même ayant $A, N :: GE, EF$, nous aurions à cause de $GE = Ba$ par la construction $A, N :: Ba, EF$, ou $A, Ba :: N, EF$, & par conséquent à cause de $A, Ba :: M, ab$, nous aurions $M, ab :: N, EF$, c'est-à-dire, les poids M, N sont entr'eux comme les sinus des angles d'inclinaison de même que ci-dessus.

Donc soit que les plans inclinés soient égaux en longueur ou non, il n'y a qu'à prendre à volonté un rayon ou sinus total, & chercher ensuite les sinus des angles d'inclinaison par rapport à ce sinus total, & ces sinus marqueront les rapports des poids M, N.

COROLLAIRE VIII.

175. Les mêmes choses étant posées, si l'on suppose que les deux plans soient ôtés, il est visible que les deux poids M , N soutiendront le poids A dans la même situation; or je dis que si l'on conçoit que N soit transporté en Q , & M en R , en sorte que ces deux poids soient sur une ligne horizontale QR , ce qui ne changera rien à la force de ces corps, à cause qu'ils tireront toujours le corps A avec les mêmes directions, ces deux corps feront entr'eux reciproquement comme les cordes RA , QA ; car QR étant parallèle à HD , & RA ou RH parallèle à CB , l'angle ARQ est égal à l'angle CBD , & l'on prouvera de même que l'angle AQR est égal à l'angle EGH , mais M est à N comme le sinus de l'angle CBD au sinus de l'angle EGH , donc M est à N comme le sinus de l'angle ARQ au sinus de l'angle AQR , ou comme $\frac{1}{2}AQ$ à $\frac{1}{2}AR$, & par conséquent comme AQ est à AR .

Ainsi si deux forces M , N soutiennent un poids A par le moyen d'une corde, on trouvera toujours le rapport de ces deux forces par le moyen de la droite horizontale RQ .

COROLLAIRE IX.

176. Pour trouver la grandeur de ces deux poids, supposons $A=20$, & que les deux plans inclinés BC , GE étant égaux entr'eux, on ait $BC=GE=5$, $DC=3$, & $EF=4$; or puisque BC , $CD :: A$, M , donc $5, 3 :: 20$, $\frac{3 \times 20}{5} = 12$, & puisque EG , $EF :: A$, N , donc $5, 4 :: 20$, $\frac{4 \times 20}{5} = 16$, ainsi les deux corps M , N valent 12 & 16, c'est-à-dire que ces deux corps pris ensemble pèsent plus que le corps A , ce qui paroît surprenant, mais en voici la raison.

La direction AR du corps M est composée de deux directions l'une horizontale RZ & l'autre perpendiculaire RV ou ZA , ainsi la force du corps M équivaut à ces deux forces, & agit de même qu'elles agiroient; mais la force RZ ne fait rien sur le corps A , car sa direction étant horizontale, elle ne sçauroit empêcher que la pesanteur du corps A ne le fasse descendre, ainsi il n'y a que la force ZA ou RV qui agisse, à cause que sa direction de A en Z est directement opposée à la direction de la pesanteur du corps A ; donc la force du corps M n'agit que comme la force

RV ou ZA, & pour faire voir la justesse du raisonnement que nous venons de faire, il n'y a qu'à considérer que le triangle ZAR est semblable au triangle QAR, & par conséquent ZA, ZR :: QA, AR, mais QA, AR :: CD, EF :: 3, 4, donc l'hypotenuse AR est comme 5, car dans tout triangle rectangle dont les côtés sont comme 3 & 4 l'hypotenuse est 5, à cause que les quarrés 9 & 16 des côtés font ensemble 25, ou le quarré de l'hypotenuse, laquelle par conséquent doit être comme 5; mais la force du corps M est représentée par l'hypotenuse ou diagonale, parce qu'elle équivaut aux deux ZR, RV, donc puisqu'elle n'agit que comme RV, elle est à elle même agissant de tout son pouvoir comme 3 à 5, mais nous avons trouvé que M est 12; faisant donc comme 5, 3 :: 12, $\frac{3 \times 12}{5} = \frac{36}{5}$, le quatrième terme $\frac{36}{5}$ marquera la quantité de M qui agit sur le corps A.

De la même façon on trouvera que la force du corps N étant exprimée par QA, qui équivaut aux deux forces QZ, QT ou ZA n'agit cependant sur le corps A que comme ZA; or le triangle QZA étant semblable au triangle QAR, ses côtés QZ, ZA seront entr'eux comme 3 à 4, & par conséquent QA sera comme 5, mais QA n'agissant que comme ZA ou 4, sera à elle-même comme 4 à 5; & comme nous avons trouvé N=16, faisant 5, 4 :: 16, $\frac{4 \times 16}{5} = \frac{64}{5}$, le quotient $\frac{64}{5}$, montrera la quantité de N qui agit sur le corps A; ajoutant donc cette quantité $\frac{64}{5}$ à la quantité $\frac{36}{5}$ de M la somme fera $\frac{100}{5} = 20$, ainsi ce que les deux forces M, N fournissent pour arrêter le corps A est égal à ce corps.

On se tromperoit donc si l'on croyoit que pour empêcher un corps A de descendre il suffisoit de faire tirer les cordes obliques XA, RA par des poids dont la somme fût égale au poids A.

COROLLAIRE X.

177. Si les plans inclinés sont obliques entr'eux (Fig. 64.) on prouvera de même que les poids M, N sont entr'eux comme les sinus des angles d'inclinaison, & en tirant QR horifontale les poids M, N seront entr'eux reciproquement comme les cordes QA, RA, & leur valeur se trouvera comme ci-dessus.

PROPOSITION LIX.

178. Si un corps sphérique A (Fig. 65.) qui est sur un plan incliné *voir page xx*
V ij

BC, est tiré par des puissances H, G, &c. dont les directions ne soient point parallèles au plan incliné, & fassent par conséquent un angle avec ce plan, & que chacune de ces forces soit en équilibre avec le corps, la force sera au corps A comme l'angle d'inclinaison du plan sur la base est au complément à un droit de l'angle fait par la direction de la force avec le plan incliné.

Nous appellerons *angle de traction* l'angle GLC fait par la direction GL de la force G avec le plan incliné BC; de même l'angle AIB fait par la direction de la force H, avec le plan incliné BC, sera l'angle de traction, & ainsi des autres.

DEMONSTRATION.

Du centre A je tire la droite YX au point d'attouchement laquelle coupe le grand cercle du corps sphérique A en deux également; du même point A je mene la droite FT parallèle au plan incliné, & cette droite coupe chaque demi-cercle en deux parties égales. Or il est visible que si de tous les points du quart de circonférence OV on tire des diamètres au cercle, ces diamètres prolongés couperont le plan incliné de X vers B, ainsi toutes les puissances telles que G, qui seront dans la direction de ces diamètres, auront leurs angles de traction GLC entre X & B; par la même raison les puissances telles que H qui auront leur directions sur les prolongemens des diamètres tirés de tous les points du quart de circonférence OX auront leur angles de traction AIQ entre X & C, & quant aux autres deux quarts de cercle, on voit bien que les forces qui seroient sur les prolongemens des diamètres tirés de tous les points du quart du cercle VT, devroient pousser le corps A au lieu de le tirer, & que par conséquent leurs angles de traction seroient les mêmes que ceux des puissances qui seroient du côté de H, & que les puissances qui seroient sur les directions des diamètres menés de tous les points du quart de cercle TX, auroient les mêmes angles que ceux des puissances qui sont du côté de G; ainsi ce que nous dirons des puissances du côté de G & de H s'appliquera facilement aux puissances qui sont aux côtés opposés. Commençons par les puissances du côté de G, ou dont les directions passent par le quart de circonférence OV.

Soit donc la puissance G dont la direction GL fait avec le plan incliné l'angle de traction GLC; du point d'attouchement X je tire XR perpendiculaire sur la direction de cette puissance,

& XS perpendiculaire sur la direction AV de la pesanteur du corps A ; le triangle rectangle AXS est semblable au triangle AXQ, lequel est semblable au triangle rectangle SXQ, & celui-ci est semblable au triangle rectangle π QB, lequel est aussi semblable au triangle rectangle DBC ; donc AXS est semblable au triangle DBC, & l'angle XAS est égal à l'angle d'inclinaison CBD ; donc prenant AX pour sinus total, la droite XS sera le sinus de l'angle XAS ou de l'angle d'inclinaison CBD ; de même le triangle rectangle AXL étant semblable au triangle rectangle AXR, l'angle AXR est égal à l'angle de traction XLA, donc l'angle XAR est le complément à l'angle droit de l'angle AXR, ou de l'angle de traction ; ainsi prenant pour sinus total la droite AX, la droite AR sera le sinus de l'angle AXR ou de l'angle de traction XLA, & la droite XR sera le sinus de son complément XAR.

Or la puissance & le corps A s'entretenant en équilibre autour du point d'appui X, la puissance n'agit sur le levier AX que comme elle agiroit sur le levier XR perpendiculaire à sa direction, & par la même raison la pesanteur du corps A n'agit sur AX que comme elle agiroit sur le levier XS qui est perpendiculaire à sa direction. Supposant donc cette pesanteur en S, & la puissance G en R, & considérant les droites XR, XS comme faisant un levier recourbé, la puissance G & la pesanteur du corps A seront encore en équilibre autour de X ; donc $G, A :: XS, XR$, c'est-à-dire la puissance est au poids comme le sinus de l'angle d'inclinaison est au sinus du complément à l'angle droit de l'angle de traction ; & on prouvera la même chose à l'égard des autres puissances dont les directions passent par le quart de circonférence OV.

Le plan incliné BC étant perpendiculaire à XA, il est visible que les diamètres du cercle qui passeront par tous les points du quart de cercle OX feront sur CX des angles égaux à ceux que font sur XB tous les diamètres tirés du quart de cercle OV, à cause que ceux-ci passent par le quart de cercle XT ; ainsi les puissances qui auroient ces diamètres pour direction auront les mêmes angles de traction que les puissances du côté de G, donc on conclura la même chose, & quant à celles qui pousseroient le corps, & dont les directions seroient les diamètres qui passent par les points du quart de cercle VT, il est encore visible que leurs angles de traction seroient précisément les mêmes que ceux

des puissances qui tirent du côté de H, de même que celles qui pousseroient du côté du quart de cercle XT auroient les mêmes angles de traction que les puissances qui tirent du côté de G, donc, &c.

COROLLAIRE I.

179. Supposons que les puissances qui tirent successivement le corps A selon les différentes directions soient toutes égales, & comparons les efforts qu'elles font avec celui que fait la puissance dont la direction est parallèle au plan incliné, la puissance F ayant sa direction parallèle, on a $F, A :: XS, XA$; donc $F = \frac{A \times XS}{XA}$ & la puissance G ayant sa direction qui passe par le quart de circonférence OV, on a $G, A :: XS, XR$; donc $G = \frac{A \times XS}{XR}$, & par conséquent $F, G :: \frac{A \times XS}{XA}, \frac{A \times XS}{XR} :: \frac{XS}{XA}, \frac{XS}{XR} :: XS \times XR, XS \times XA :: XR, XA$, c'est-à-dire, la puissance F est à la puissance G comme XR est à XA; mais XR est toujours moindre que XA qui est l'hypoténuse du triangle rectangle AXR; donc F est moindre que G, c'est-à-dire qu'en supposant les puissances F & G égales, F fait moins d'effort que G; donc il faut moins de force pour tirer avec une direction parallèle qu'avec une direction oblique.

En second lieu, quand la direction de la puissance passe par le quart de circonférence OV, on a $G, A :: XS, XR$, ou comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus du complément à l'angle droit de l'angle de traction; mais plus la direction GL s'écarte du point O & s'approche du point V, plus l'angle de traction devient grand; donc le sinus XR de son complément devient aussi moindre; donc XS devient plus grand par rapport à XR, & par conséquent G devient plus grand par rapport à A, c'est-à-dire, que plus l'angle de traction est grand, plus une même puissance doit employer de force.

Quand la direction Zu est la même que celle de la pesanteur du corps, on a $Z, A :: XS, XS$, car la puissance Z agit sur le levier AX, comme elle agiroit sur le levier XS perpendiculaire à sa direction, & la pesanteur agit aussi sur AX comme elle agiroit sur le levier XS aussi perpendiculaire à sa direction, donc la puissance & la pesanteur agissant comme si elles étoient toutes les deux en S, & se contrebalançant elles se trouvent égales; & on trouvera la même chose en observant que l'angle de traction

SQX étant égal à l'angle AXS, l'angle XAS sera son complément, & par conséquent le sinus XS de son complément est égal au sinus XS d'inclinaison.

Quand la direction YX est perpendiculaire au plan incliné, l'angle de traction est droit, & son complément à l'angle droit est zero; donc on a Y, A :: XS, O, c'est-à-dire que Y est infiniment grand par rapport à A, de même que XS par rapport à zero; donc il faudroit une force infinie pour soutenir le corps A avec cette direction.

Quand la direction PA est parallèle à l'horizon ou à DB, l'angle de traction APB est égal à l'angle PBD d'inclinaison qui lui est alterne; donc l'angle de son complément est égal à l'angle DCB qui est le complément de l'angle d'inclinaison; & par conséquent on aura P est à A comme le sinus de l'angle CBD au sinus de l'angle BCD, c'est-à-dire comme la hauteur CD du plan incliné est à sa base; car en prenant pour sinus total la droite CB, le sinus de l'angle DBC est CD, & le sinus de l'angle BCD est DB.

On n'a qu'à appliquer aux puissances dont les directions passent par le quart de circonférence OX ce que nous avons dit des puissances dont les directions passent par le quart de cercle OV, puisque les angles de traction des unes sont égaux aux angles de traction des autres, & ensuite appliquer aux puissances qui poussent du côté des deux autres quarts, ce qui convient aux puissances qui tirent du côté de G & de H; d'où l'on conclura en général que les puissances étant supposées égales, celle qui pousse avec une direction parallèle au plan incliné, fait moins d'effort que les autres, & que celles qui poussent ou qui tirent avec des directions qui s'éloignent davantage de la direction parallèle au plan incliné, font plus d'effort que celles qui tirent ou qui poussent avec des directions qui s'éloignent moins de la direction parallèle au plan incliné.

COROLLAIRE II.

180. Si au lieu des puissances qui tirent le corps A on met des poids p, f, g , &c. on trouvera que si chacun de ces poids est en équilibre avec le corps A, le poids f qui tire avec une direction parallèle au plan incliné, sera moindre que chacun des autres, que le poids g qui tire avec une direction oblique,

sera moindre qu'un autre poids dont la direction oblique s'éloigneroit davantage de la direction parallèle, &c.

PROPOSITION LX.

181. Si deux corps A, M (Fig. 66.) attachés aux extrémités d'une corde AHM sont mis sur deux plans inégalement ou également inclinés BC, CE qui ont la hauteur commune CD, & que ces deux corps se tiennent en équilibre, je dis que le corps A est au corps M comme le plan incliné BC au plan incliné CE.

DEMONSTRATION.

Les corps A, M étant en équilibre par la supposition, leur forces sont par conséquent égales, mais la force du corps A, est la même qu'une force mise en H qui tireroit le corps M selon la direction MH & qui le tiendrait en équilibre, & par la même raison la force du corps M est la même qu'une force mise en H qui tireroit le corps A selon la direction AH, & le tiendrait en équilibre, donc ces deux forces en H seroient égales; appelant donc l'une & l'autre V, nous aurons $V, A :: CD, BC$, (N. 171.) & par conséquent $V, CD :: A, BC$; par la même raison nous aurons V, M, CD, CE , & par conséquent $V, CD :: M, CE$; puis donc que la raison V, CD est égale à la raison A, BC , & quelle est aussi égale à la raison M, CE , il s'ensuit que $A, BC :: M, CE$, & $A, M :: BC, CE$.

AUTRE DEMONSTRATION.

Supposons que le corps A étant en T, & le corps M en M, on vienne à tirer celui-ci en V, la corde HM sera plus grande de la quantité $MV = IE$, & le corps T se trouvant alors en A, la corde HT sera moindre de la quantité $AT = BL = MV$; des points T, V je mene les droites TP, VQ parallèles à l'horizon BE jusqu'à la rencontre des droites AP, MQ perpendiculaires à l'horizon, lesquelles sont les directions des pesanteurs des corps A, M; il est clair que la quantité dont le corps M aura descendu vers le centre de la terre sera MQ, & que la quantité dont le corps A se sera élevé au-dessus de ce centre sera AP, & comme ces deux quantités sont parcourues dans le même tems, elles exprimeront les vitesses des corps M, A, donc les momens de ces corps seront $M \times MQ, A \times AP$; or ces momens sont égaux, puisque

puisque nous supposons que ces corps sont en équilibre, donc $M \times MQ = A \times AP$, & par conséquent $M, A :: AP, MQ$.

Des points d'attouchement L, I , j'abaisse les perpendiculaires Lp, Iq sur les bases, les triangles semblables ATP, LBp sont égaux à cause de $TA = BL$, donc $AP = Lp$; de même les triangles semblables MQV, IqE sont égaux, à cause de $MV = IE$, donc $MQ = Iq$, donc $AP, MQ :: Lp, Iq$, & par conséquent $M, A :: Lp, Iq$.

Les triangles semblables LBp, CBD donnent $LB, CB :: Lp, CD$; donc $LB \times CD = CB \times Lp$, les triangles semblables IqE, CDE donnent $IE, CE :: Iq, CD$, mais $IE = MV = AT = BL$, donc $BL, CE :: Iq, CD$, & par conséquent $BL \times CD = CE \times Iq$; mais nous venons de trouver $BL \times CD = CB \times Lp$, donc $CE \times Iq = CB \times Lp$, d'où l'on tire $Lp, Iq :: CE, CB$, mais nous avons $M, A :: Lp, Iq$, donc $M, A :: CE, CB$, c'est-à-dire les corps M, A sont entr'eux comme les plans inclinés.

J'ai donné cette seconde Demonstration pour faire voir l'accord des principes que nous avons donné ci-dessus.

R E M A R Q U E.

182. On peut remarquer en passant un Theorème qui merite attention, quoiqu'il ne regarde point la matiere dont nous parlons, & ce Theorème est tel : *Si deux triangles BCD, DCE, (Fig. 67.) ont le sommet commun C, & un côté CD commun, & qu'on prenne sur les côtés BC, CE qui vont aboutir au sommet, des parties BC, EI égales, desquelles on tire les droites Lp, Iq, parallèles au côté commun CD, ces droites Lp, Iq seront entr'elles réciproquement comme les côtés CE, CB, c'est-à-dire $Lp, Iq :: CE, CB$; ce qu'on démontrera de même que nous l'avons fait pour les triangles CBD, CED (Fig. 62.)*

C O R O L L A I R E.

183. Si les plans inclinés CB, EN (Fig. 68.) ne sont pas de même hauteur, il sera toujours vrai de dire que les forces des corps A, M qui sont en équilibre seront égales, & par conséquent la force en H qui soutiendrait M seroit égale à la force en H qui soutiendrait A ; je nomme V l'une ou l'autre de ces forces, S le sinus de l'angle d'inclinaison CBD du plan incliné CB , & le sinus de l'angle END du plan incliné NE , & R le sinus total.

X

La force qui soutiendrait A est à ce corps comme le sinus S est au rayon R (N. 168.), donc $V, A :: S, R$ & $V = \frac{AS}{R}$; par la même raison, j'ai $V, M :: s, R$, & $V = \frac{Ms}{R}$, donc $\frac{AS}{R} = \frac{Ms}{R}$, ou $AS = Ms$, d'où je tire $A, M :: s, S$, c'est-à-dire les corps A, M sont en raison réciproque des sinus des angles d'inclinaison de leur plans inclinés, ce qui est également vrai lorsque les plans inclinés ont une même hauteur.

PROPOSITION LXI.

184. Si deux corps A, M (Fig. 69.) attachés aux extrémités d'une corde sont sur deux plans inclinés, & qu'ils se tiennent en équilibre avec des directions qui ne sont point parallèles aux plans inclinés, ces deux plans sont entr'eux en raison composée de la raison réciproque des sinus des angles d'inclinaison & de la directe des sinus de complément des angles de traction.

DEMONSTRATION.

Les forces des corps A, M, étant égales & conquës comme si elles agissoient en H, je nomme V chacune de ces forces, S le sinus de l'angle d'inclinaison du plan BC, s le sinus de l'angle d'inclinaison du plan CE, T le sinus de complément à l'angle droit de l'angle de traction sur le plan BC, & t le sinus de complément à l'angle droit de traction sur le plan CE.

Par la Proposition 59. (N. 178.) j'ai $V, A :: S, T$; donc $V = \frac{AS}{T}$, & par la même raison j'ai $V, M :: s, t$, donc $V = \frac{Ms}{t}$, & par conséquent $\frac{AS}{T} = \frac{Ms}{t}$ donc $A, M :: \frac{s}{t}, \frac{S}{T} :: sT, tS$, donc, &c.

COROLLAIRE.

185. Si l'une des directions AH est oblique au plan incliné BC (Fig. 70.) & l'autre HM parallèle au plan incliné CE, nommant V l'une ou l'autre des puissances mises en H, S le sinus de l'angle d'inclinaison du plan incliné BC, s le sinus de l'angle d'inclinaison du plan CE, T le sinus de complément de l'angle de traction HOC, & R le sinus total, j'ai $V, A :: S, T$; donc $V = \frac{AS}{T}$, de même $V, M :: s, R$, donc V

$= \frac{M}{R}$, & par conséquent $\frac{AS}{T} = \frac{M}{R}$, d'où je tire $A, M :: \frac{1}{R}, \frac{S}{T}$:: T, RS , c'est-à-dire le poids A est au poids M en raison composée de la raison réciproque des sinus d'inclinaison, & de la raison du sinus de complement de l'angle de traction au sinus total.

PROPOSITION LXII.

186. *Le mouvement d'un corps qui descend librement le long d'un plan incliné est un mouvement uniformément accéléré.*

DEMONSTRATION.

La pesanteur absolue du corps A (Fig. 71.) est à sa pesanteur relative comme BC à CD (N. 163.) c'est-à-dire, que si la pesanteur absolue avoit fait descendre au corps A l'espace CD dans un tems déterminé, la pesanteur relative lui auroit fait parcourir dans le même tems un espace CA qui seroit à l'espace CD comme CD est à CB ; or cette loi est toujours la même de quelque grandeur que soit l'espace que la pesanteur absolue fait parcourir. Supposant donc que la pesanteur absolue eût fait parcourir au corps A l'espace CR à la fin de la première minute, il est évident selon la loi de Galilée, qu'à la fin de la seconde minute le corps auroit parcouru un espace CD quadruple de CR ; or l'espace que la pesanteur relative aura fait parcourir à la fin de la première minute, & que je suppose être CP sera à l'espace CR que la pesanteur absolue aura fait parcourir à la fin de cette minute, comme CD à BC (N. 163.) & l'espace que la pesanteur relative aura fait parcourir à la fin de la seconde minute, & que je suppose être CA , sera aussi à l'espace CD que la pesanteur absolue aura fait parcourir à la fin de la seconde minute comme CD à BC , donc nous aurons $CP, CR :: CD, CB$, & $CA, CD :: CD, CB$, donc $CP, CR :: CA, CD$, & par conséquent $CP, CA :: CR, CD$; mais CD est quadruple de CR , donc CA est quadruple de CP ; donc les espaces CP, CA que la pesanteur relative aura fait parcourir au corps A l'un à la fin d'une minute & l'autre à la fin de deux minutes, seront comme 1 à 4, ou comme les quarrés des tems 1 minute, 2 minutes, & par conséquent le mouvement du corps A le long de CB est uniformément accéléré, de même que le mouvement du même corps A lorsqu'il descend librement vers le centre de la terre.

COROLLAIRE I.

187. Supposant donc que deux corps égaux chacun à A, vinssent à passer dans le même tems du repos au mouvement, & que le premier fût poussé par une force égale à la pesanteur absolue du corps A, & l'autre par une force égale à la pesanteur relative du même corps A sur le plan incliné BC, en sorte que le mouvement de l'un & de l'autre corps fût uniformément accéléré; il est clair que ces deux corps ne parcourroient jamais dans le même tems des espaces égaux, ce qui semble opposé à ce que nous avons dit dans la Proposition 29 (N. 29.), mais il faut prendre garde comme nous l'avons déjà fait observer ailleurs (N. 136.) que dans cette Proposition nous ne parlons que des corps qui descendent par la force de leur pesanteur sans trouver nul obstacle, auquel cas nous avons fait voir que les pesanteurs étant toujours proportionnelles aux masses, les espaces parcourus par deux corps dans des tems égaux doivent être égaux; mais ici ce n'est plus la même chose, car les forces qui poussent les corps n'étant plus proportionnelles aux masses, puisque les masses étant supposées égales les forces ne le sont pas; il s'ensuit que les espaces parcourus dans les mêmes tems par les deux corps ne doivent plus être égaux, mais qu'ils doivent être proportionnels, à cause qu'ils suivent la même loi d'accélération..

COROLLAIRE II.

188. Puisque les corps qui descendent librement le long d'un plan incliné se meuvent d'un mouvement uniformément accéléré, on doit appliquer à ces corps tout ce que nous avons dit des corps qui descendent librement vers le centre de la terre sans trouver nul obstacle, & qui suivent la loi de Galilée; ainsi si le corps A commence à descendre au point C, 1°. Les espaces parcourus à la fin des tems 1, 2, 3, 4, &c. seront comme les quarrés 1, 4, 9, 16, &c. de ces tems (N. 55). 2°. Les espaces parcourus dans des tems égaux, c'est-à-dire les espaces parcourus dans la première minute, dans la seconde, dans la troisième, &c. seront comme 1, 3, 5, 7, &c. (N. 59). 3°. Les vitesses acquises à la fin des tems 1, 2, 3, 4, &c. étant entr'elles comme ces tems, les espaces parcourus seront comme les quarrés de ces vitesses (N. 57). 4°. Enfin l'espace parcouru par le corps A dans un tems déterminé est à l'espace qu'il parcourroit d'un

mouvement uniforme avec la vitesse acquise à la fin de ce tems comme 1 est à 2 (N. 63).

COROLLAIRE III.

189. *La vitesse qu'un corps A qui descend le long d'un plan incliné BC, a acquise à la fin d'un tems déterminé est à la vitesse qu'il auroit acquise à la fin de ce tems s'il descendoit sans obstacle vers le centre de la terre comme CD est à CB.*

Supposons que le corps A poussé par sa pesanteur absolue eût parcouru à la fin de deux minutes un espace perpendiculaire à l'horison & égal à CD, l'espace AC que ce même corps poussé par sa pesanteur relative, auroit parcouru à la fin du même tems, seroit donc à CD comme CD à BC; or l'espace que le corps A parcourroit dans deux minutes avec un mouvement uniforme & une vitesse égale à la vitesse acquise à la fin de l'espace DC, seroit double de l'espace DC, & par conséquent il seroit 2DC (N. 63), & par la même raison l'espace que le corps A parcourroit dans deux minutes avec une vitesse uniforme égale à la vitesse acquise à la fin de l'espace CA seroit 2CA, donc ces deux espaces 2DC, 2CA, seroient encore entr'eux comme DC à CA; mais dans le mouvement uniforme les vitesses sont comme les espaces parcourus dans des tems égaux, donc les vitesses des deux mouvemens uniformes sont entr'elles comme 2DC, 2CA, ou comme DC, CA; mais les vitesses de ces mouvemens uniformes sont les mêmes que les vitesses acquises d'un mouvement accéléré à la fin des espaces DC, CA, donc les vitesses acquises à la fin de ces espaces sont entr'elles comme DC, CA; ainsi la vitesse acquise à la fin d'un certain tems par le corps A qui descend le long du plan incliné, est à la vitesse qu'il auroit acquise à la fin du même tems s'il descendoit librement vers le centre de la terre, comme la hauteur CD du plan incliné est à la longueur BC de ce plan.

COROLLAIRE IV.

190. *La vitesse que la pesanteur relative du corps A lui fait acquérir à la fin d'un tems déterminé, est à celle que sa pesanteur absolue lui feroit acquérir dans le même tems, comme le sinus de l'angle CBD d'inclinaison est au sinus total; ces deux vitesses sont comme CD, BC, ou comme $\frac{1}{2} CD$, $\frac{1}{2} BC$, mais dans le triangle CBD le si-*

nus de l'angle CBD est $\frac{1}{2}$ CD, & le sinus de l'angle droit CBD est $\frac{1}{2}$ BC, donc, &c.

COROLLAIRE V.

191. Connoissant l'espace qu'un corps A, qui descend le long d'un plan incliné, parcourroit dans un certain tems s'il descendoit sans obstacle le long du centre de la terre, on pourra toujours connoître l'espace qu'il doit parcourir dans un même tems le long de BC, en cette sorte.

Supposons que le corps étant en C commence à descendre librement vers le centre de la terre, & qu'à la fin d'une minute il ait parcouru l'espace CD, donc l'espace que la pesanteur relative doit lui faire parcourir dans le même tems, doit être à CD comme CD est à CB, c'est pourquoi du point D j'abaisse DA perpendiculaire sur CB, & l'espace CA est l'espace cherché, car les triangles rectangles ACD, BCD étant semblables, j'ai AC, CD :: CD, CB.

COROLLAIRE VI.

192. Donc l'espace AC parcouru par le corps A sur le plan incliné, est à l'espace AD, que le même corps parcourroit dans le même tems en descendant librement vers le centre de la terre, comme la hauteur du plan incliné à sa longueur, ou comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus total

COROLLAIRE VII.

193. Connoissant l'espace AC (Fig. 72.) qu'un corps A parcourroit dans un tems déterminé en descendant librement vers le centre de la terre, on connoitra les espaces qu'il parcourroit dans le même tems sur chacun des plans diversement inclinés, AH, AR, AS, AI, &c. en menant du point C des perpendiculaires CD, CE, CO, CB, &c. sur les plans inclinés, & les droites AD, AE, AO, AB, &c. feront les espaces parcourus sur ces plans dans des tems égaux; car par rapport au plan HA les triangles semblables DAC, ACH donneront DA, AC :: AC, AH, de même par rapport au plan RA les triangles semblables EAC, ACR donneront EA, AC :: AC, AR, & ainsi des autres; puis donc que chacun des espaces AD, AE, AO, &c. que la pesanteur relative fait parcourir, est à l'espace que l'absolue fait

parcourir , comme la hauteur de chaque plan est à sa longueur , il s'en suit que ces espaces sont parcourus dans des tems égaux.

COROLLAIRE VIII.

194. Les vitesses acquises à la fin des espaces AD, AE, AO, &c. sont entr'elles comme ces espaces, car chacune de ces vitesses est à la vitesse acquise à la fin de l'espace AC, comme la hauteur AC est à la longueur du plan incliné (N. 189); or les espaces sont à l'espace AC dans le même rapport (N. 192), donc, &c.

COROLLAIRE IX.

195. Les espaces AD, AE, AO, &c. sont entr'eux comme les sinus des angles d'inclinaison de leur plan; car appellant le sinus total R, S le sinus de l'angle d'inclinaison AHC, & s le sinus de l'angle d'inclinaison ARC, nous aurons AD, AC :: S, R (N. 192.) & AE, AC :: s, R, donc puisque dans ces deux proportions les deux conséquens sont les mêmes, il s'en suit que AD, S :: AE, s, & l'on prouvera la même chose des autres espaces.

Les vitesses acquises à la fin de ces espaces étant comme ces espaces, elles sont par conséquent comme les sinus d'inclinaison.

COROLLAIRE X.

196. Si sur l'espace AC pris pour diametre on décrit un cercle, sa circonférence passera par les extrémités D, E, O, B, &c. des espaces AD, AE, AO, &c. car les triangles ADC, AEC, AOC, ABC étant rectangles, & le diametre AC étant leur hypotenuse commune, les sommets de leurs angles droits seront tous à la circonférence; or de-là on tire ce théoreme.

Si le diametre AC d'un cercle est perpendiculaire à l'horison, & que du sommet A on tire tant des cordes AD, AE, AO, AB, &c. qu'on voudra, un corps A qui descendroit successivement sur chacune de ces cordes, parcourroit chacune d'elles dans un tems égal au tems qu'il employeroit à parcourir le diametre AC. C'est ce que nous venons de voir.

Et si du point C on tire tant de cordes CD, CE, CO, CB, &c. qu'on voudra, le même corps qui descendroit successivement des points D, E, O, B le long de ces cordes parcourroit chacune d'elles dans un

tems égal à celui qu'il employeroit à parcourir le diamètre AC.

Pour prouver cette dernière partie, je mène du sommet A la tangente AT, & du point C la tangente CH, je prolonge CD jusqu'en T, & du point T je mène Th parallèle à AC; ainsi CT est un plan incliné dont la hauteur est Th ou AC. Supposant donc que le corps A soit mis en D, & que de-là il descende l'espace DC, si je veux trouver l'espace qu'il auroit parcouru dans le même tems, s'il étoit tombé librement vers le centre de la terre; j'éleve une perpendiculaire sur le point D, laquelle par conséquent va aboutir en A, & je dis que l'espace AC est égal à l'espace que le corps auroit parcouru librement vers le centre de la terre, dans le même tems qu'il a parcouru DC, car l'espace DC doit être à l'espace que le corps auroit parcouru en tombant librement comme Th à CT, ou comme $AC = Th$ est à TC; or les triangles rectangles DCA, CAT étant semblables, AC ou Th, CT :: CD, AC, donc AC est l'espace que le corps A tombant librement doit parcourir dans le même tems qu'il parcourt l'espace AD.

Il faut observer que le point D doit être le commencement du mouvement de D en C, c'est-à-dire que le corps A commence en D à passer du repos en mouvement, & de même que le point A du mouvement AC soit le point où le corps commence à passer du repos au mouvement, ce que l'on doit toujours entendre de même dans les comparaisons que l'on fait de ces sortes de mouvemens.

Il n'est pas nécessaire que le corps qui parcourt successivement les espaces AD, AE, AO, AB, &c. ou les espaces DC, EC, OC, BC &c. soit toujours le même corps, & quand on mettroit différens corps de différentes masses, la même chose arriveroit, par exemple supposé que le corps qui parcourt AD soit de deux lb, & le corps qui parcourt AC d'une livre, il sera toujours vrai que le corps qui parcourt AC n'employera pas plus de tems à parcourir cet espace que n'en employe celui qui parcourt AD, car si le corps qui parcourt AC étoit de deux livres, ils parcourroient tous les deux dans le même tems leur espace AC, AD; mais un corps d'une livre qui parcourt AC n'employe ni plus ni moins de tems qu'un corps de deux livres (N. 22), donc le corps d'une livre parcourt l'espace AC dans le même tems qu'un corps de deux livres parcourt l'espace AD, & ainsi des autres.

PROPOSITION

PROPOSITION LXIII.

197. Si un corps descend le long d'un plan incliné AH (Fig. 72), la vitesse qu'il a acquise lorsqu'il est arrivé à la ligne horizontale HC, est égale à la vitesse que ce même corps auroit acquise à la fin de la hauteur AC en descendant librement vers le centre de la terre.

DEMONSTRATION.

Pour abréger le discours & rendre en même tems plus clair ce que nous allons dire, nous nommerons u_{CA} la vitesse acquise à la fin de l'espace AC, u_{AD} la vitesse acquise à la fin de l'espace AD, & ainsi des autres vitesses acquises; cela posé.

Du point C je mene la perpendiculaire CD sur le plan incliné AH, & j'ai u_{DA} , $u_{AC} :: AC, AH$, & selon la loi de Galilée, j'ai u_{DA} , $u_{AH} :: \sqrt{AD}, \sqrt{AH}$; mais à cause des triangles semblables DAC, CHA, j'ai DA, AC, AH , donc $DA, AH :: \overline{DA}, \overline{AC}$, & tirant la racine quarrée de tous les termes, j'ai $\sqrt{DA}, \sqrt{AH} :: DA, AC$; puis donc que $u_{DA}, u_{AH} :: \sqrt{DA}, \sqrt{AH}$, il s'ensuit que $u_{DA}, u_{AH} :: DA, DC$, ou $u_{DA}, u_{AH} :: AC, AH$; mais nous avons $u_{DA}, u_{AC} :: AC, AH$, donc $u_{DA}, u_{AH} :: u_{DA} :: u_{AC}$, & par conséquent $u_{AH} = u_{AC}$.

COROLLAIRE I.

198. Il faudroit dire la même chose de deux corps de différentes masses, dont l'un parcourroit le plan AH dans le même tems que l'autre parcourroit la hauteur AC, car tous les corps qui descendent vers le centre de la terre, parcourant tous les mêmes espaces dans des tems égaux, il est indifférent de mettre lequel on voudra, & par conséquent il est aussi indifférent de mettre le long du plan incliné un corps de telle masse qu'on jugera à propos, ce que je ne-repeterai plus.

COROLLAIRE II.

199. Ce que nous venons de démontrer par rapport au plan incliné AH, étant également vrai par rapport aux plans inclinés AR, AS, AI, &c. il s'ensuit que si un corps descend, tantôt par un plan incliné AH, tantôt par un plan incliné AR, &c. les vitesses qu'il aura acquises à la fin de chacun de ces plans seront toujours égales, puisqu'elles seront toujours égales chacune à la

vitesse acquise à la fin de la hauteur commune AC de ces plans.

COROLLAIRE III.

200. Si un corps A (Fig. 73.) descend le long de plusieurs plans inclinés AM, MQ, QR, la vitesse acquise en R est égale à la vitesse qu'il aurait acquise en tombant le long de la hauteur totale AV des plans AM, MQ, QR.

Du point A je mene AS parallèle à l'horizon, & je prolonge le plan QM en N, la vitesse acquise en M le long du plan MA est égale à la vitesse acquise en M le long du plan MN, car ces deux plans ayant la hauteur commune AO, les vitesses acquises en M le long de ces plans sont égales chacune à la vitesse acquise en O par la chute AO (N. 197). Supposant donc que le corps arrivé en M continue à se mouvoir jusques en Q, la vitesse acquise en Q le long des plans AM, MQ, sera égale à la vitesse acquise en Q le long du plan QN, ou à la vitesse acquise en P le long de la hauteur AP du plan NQ. Je prolonge le plan RQ en S, & la vitesse acquise en Q le long du plan NQ, est égale à la vitesse acquise en Q le long du plan SQ, à cause que les deux plans NQ, SQ ont la hauteur commune AP; mais la vitesse acquise le long des plans AM, MQ est égale à la vitesse acquise le long des plans NQ, SQ, donc la vitesse acquise le long des plans AM, MQ est égale à la vitesse acquise le long du plan SQ. Supposant donc que le corps continue à se mouvoir de Q en R, il est visible que la vitesse acquise en R le long des plans AM, MQ, QR, sera égale à la vitesse acquise en R le long du plan SR, ou à la vitesse acquise en V le long de la hauteur AV, donc, &c.

COROLLAIRE IV.

201. Les courbes pouvant être considérées comme des polygones d'une infinité de côtés, lesquels sont autant de plans inclinés qui changent à tout moment de direction, il s'ensuit que si un corps S (Fig. 74.) descend le long d'une courbe SX, la vitesse acquise en X est égale à la vitesse qu'il auroit acquise en descendant le long de la hauteur SV.

PROPOSITION LXIV.

202. Le tems qu'un corps A (Fig. 72.) employe à parcourir un plan incliné AH, est au tems qu'il employeroit à parcourir la hauteur AC comme la longueur AH est à la hauteur AC.

DEMONSTRATION.

La vitesse acquise en H est égale à la vitesse acquise en C par la Proposition précédente ; or si le corps A avoit eu une vitesse uniforme égale à la vitesse en H , il auroit parcouru un espace double de AH dans le même tems qu'il a parcouru AH (N.63.) , donc avec une vitesse uniforme qui n'eût été que la moitié de la vitesse acquise , il auroit parcouru dans le même tems un espace égal à AH ; par la même raison si le corps A avoit eu une vitesse uniforme qui n'eût été que la moitié de la vitesse acquise en C , il auroit parcouru un espace égal à AC dans le même tems qu'il a parcouru AC d'un mouvement accéléré ; mais ces demi-vitesses uniformes sont égales , & dans le mouvement uniforme les vitesses étant égales , les tems sont comme les espaces AH , AC , donc les tems employés à parcourir uniformement les espaces AH , AC , sont entr'eux comme AH , AC ; mais les tems employés à parcourir uniformement ces espaces , sont les mêmes que les tems employés à les parcourir d'un mouvement accéléré , dont les tems employés à parcourir les espaces AH , AC d'un mouvement accéléré sont entr'eux comme AH , AC.

COROLLAIRE.

203. Donc les tems employés à parcourir les plans diversement inclinés AH , AR , AS , AI , &c. qui ont la hauteur commune AC , sont entr'eux comme ces plans , puisque chacun d'eux est au tems employé à parcourir la hauteur AC comme son plan incliné est à la hauteur AC.

PROPOSITION LXV.

204. Une cycloïde CDF (Fig. 75.) étant élevée perpendiculairement à l'horizon dans une situation renversée , en sorte que sa base CF qui est en haut soit horizontale , si l'on prend tant de points que l'on voudra E , M , G , &c. sur sa circonférence , un corps qui descendra de l'un de ces points quelconque G vers D , n'employera pas moins de tems à parcourir l'arc GD , que s'il parcourroit la demi-cycloïde FD. en descendant de F vers D.

DEMONSTRATION.

Des points E, G, M, &c. je mene les ordonnées ET, GH, MN, je décris sur AD le cercle générateur, & du point D je mene les cordes DB, DL, DO, &c. aux points B, L, O, &c. ou les ordonnées ET, GH, MN, &c. coupent la demi-circonférence ABLD. Par la propriété du cercle j'ai TD, DB :: DB, DA, donc $TD \times DA = \overline{DB}^2$, de même HD, DL :: DL, DA, & partant $HD \times DA = \overline{DL}^2$, d'où il suit que $\overline{DB}^2, \overline{DL}^2 :: TD, HD$, c'est-à-dire; dans le cercle les carrés des cordes DB, DL, &c. sont entr'eux comme les rectangles du diamètre DA par les hauteurs TD, HD, &c. des cordes; & comme ces rectangles $TD \times DA, HD \times DA$, ayant une dimension commune DA, sont par conséquent entr'eux dans la raison de leurs dimensions inégales TD, HD, &c. il s'ensuit que l'on a $\overline{DB}^2, \overline{DL}^2 :: TD, HD$, c'est-à-dire, les carrés des cordes DB, DL, &c. sont entr'eux comme leurs hauteurs TD, HD, &c. & partant les cordes DB, DL, &c. sont comme les racines carrées de leurs hauteurs TD, HD, &c. cela posé.

Si un corps mis en E descend le long de l'arc ED, la vitesse qu'il aura acquise en D sera \sqrt{TD} ; de même si ce corps mis en G descend le long de l'arc GD, la vitesse acquise en D sera \sqrt{HD} ; ainsi les vitesses acquises le long des arcs ED, GD, &c. en supposant toujours que le corps passe du repos au mouvement lorsqu'il est mis aux points E, G, &c. sont entr'elles comme les racines des hauteurs correspondantes TD, HD; mais les racines de ces hauteurs sont comme les cordes du cercle correspondantes DB, DL, &c. donc les vitesses acquises à la fin des arcs de cycloïde ED, GD, &c. sont comme les cordes BD, LD, &c. mais par la propriété de la cycloïde les arcs ED, GD, &c. de cycloïde sont doubles des cordes de cercle correspondantes DB, DL, &c. & les doubles sont entr'eux les simples, donc les vitesses acquises à la fin des arcs de cycloïde ED, GD, &c. sont comme ces arcs, c'est-à-dire les vitesses acquises à la fin des espaces sont comme les espaces, & il faut dire la même chose des vitesses acquises à la fin des arcs quelconques MD, &c.

Je conçois que l'arc ED soit divisé en une infinité de parties

égales dont l'une soit Ee , & que l'arc MD soit divisé en un même nombre de parties égales, dont l'une soit Mm , il est évident que les arcs Ee , Mm seront entr'eux comme les arcs ED , MD , ou comme les arcs eD , mD ; ainsi les vitesses acquises à la fin des arcs ED , MD étant entr'elles comme les arcs ED , MD , & les vitesses acquises à la fin des arcs eD , mD étant comme les arcs eD , mD , il s'ensuit que les vitesses acquises à la fin des arcs Ee , Mm seront comme les arcs Ee , Mm ; or ces arcs étant infiniment petits, les vitesses avec lesquelles ils sont parcourus peuvent passer pour uniformes, & dans le mouvement uniforme les tems sont égaux lorsque les vitesses sont comme les espaces, dont les arcs Ee , Mm seront parcourus dans des tems égaux; & comme la même chose arrivera à l'égard de tous les Ee qui composent l'arc ED , & de tous les Mm qui composent l'arc MD , il s'ensuit que le tems pendant lequel l'arc ED sera parcouru, doit être égal au tems pendant lequel le corps parcourra l'arc MD .

Et on prouvera la même chose de tout autre arc GD , FD , &c.

Nota. 1°. Que les espaces parcourus ED , MD étant entr'eux comme les vitesses acquises, il s'ensuit nécessairement que les forces acquises sont entr'elles comme les masses multipliées par les vitesses acquises, quand même on voudroit estimer les forces acquises par les produits des masses par les espaces; ainsi ce qui arrive dans la cycloïde est absolument contraire à l'hypothèse des forces vives, & M. Bernoulli n'y a pas bien réfléchi lorsqu'il s'est servi de cet exemple pour autoriser son sentiment. Voyez ce que nous en avons dit ci-dessus (N. 106).

Nota. 2°. Que dans le demi-cercle les cordes DB , DL , DO , &c. seroient parcourues dans un même tems, comme il a été démontré (N. 196.) & que les vitesses avec lesquelles ces cordes seroient parcourues étant entr'elles comme les racines des hauteurs TD , HD , &c. seroient par conséquent comme les cordes ou les espaces parcourus DB , DL , &c. donc les forces acquises à la fin de ces espaces seroient nécessairement comme les masses multipliées par les vitesses, quand même on voudroit estimer ces forces par les produits des masses par les espaces; mais ces forces acquises seroient des forces agissantes & non *mortes*, donc les forces agissantes dans le mouvement d'un corps le long des cordes d'un demi-cercle, ou le long des arcs de cycloïde, sont comme les produits des masses par les vitesses, & non pas

comme les produits des masses par les quarrés des vitesses ; l'hypothèse des forces vives se trouve donc démentie dans ces deux cas , de même que dans tous les autres qu'on nous allègue en leur faveur , & par conséquent cette hypothèse est fautive & ne sauroit se soutenir.

PROPOSITION LXVI.

205. Si deux corps A, a , (Fig. 76.) descendent l'un le long de deux plans inégalement inclinés AB, BC , & l'autre le long de deux plans ab, bc , semblables aux deux premiers & semblablement inclinés, le tems que le corps A emploiera à parcourir les plans AB, BC sera au tems que le corps a emploiera à parcourir les plans ab, bc , comme la racine quarrée de la longueur ABC à la racine quarrée de la longueur abc .

DEMONSTRATION.

Supposons que le rapport de AB à ab soit comme m est à 1 , les rapports de BC à bc , de la hauteur AD à la hauteur ad , & de BE à be seront aussi comme m est à 1 , puisque les plans AB, BC sont semblables aux plans ab, bc , & semblablement posés.

La vitesse acquise par le corps A à la fin de l'espace AB est égale à la vitesse que le même corps auroit acquis à la fin de la hauteur AD (N. 197.) & par la même raison la vitesse acquise par le corps b à la fin de l'espace ab est égale à la vitesse que le même corps auroit acquis à la fin de la hauteur ad ; or les espaces AD, ad sont entr'eux comme m à 1 , donc selon la loi de Galilée, les vitesses acquises à la fin de ces espaces sont comme \sqrt{m} à $\sqrt{1}$, & par conséquent les vitesses acquises à la fin des espaces AB, ab , sont comme $\sqrt{m}, \sqrt{1}$; or si A & b s'étoient mis avec des vitesses uniformes & égales aux moitiés de leur vitesses $\sqrt{m}, \sqrt{1}$, ils auroient parcouru dans les mêmes tems les espaces avec leur vitesses accélérées (N. 63.); & dans le mouvement uniforme les tems sont entr'eux en raison composée de la raison directe des espaces & de la raison réciproque des vitesses (N. 24.), donc les tems que les corps A, a auroient employés à parcourir les espaces AB, ab avec une vitesse uniforme, sont entr'eux en raison composée de m à 1 , & de $\sqrt{1}, \sqrt{m}$; donc ils sont comme $m\sqrt{1}, \sqrt{m}$, mais ces tems sont les mêmes que ceux avec lesquelles les corps A, a , ont parcouru les mêmes espaces AB, ab , avec leur vitesses accélérées, donc les tems

employés à parcourir les espaces AB, ab , avec les vitesses accélérées sont aussi comme $m\sqrt{1}$ est à \sqrt{m} , ou comme m est à \sqrt{m} . Et il faut dire la même chose des tems employés à parcourir les espaces BC, bc , si le mouvement commençoit en B, b .

Mais comme nous supposons qu'il n'y a point de repos aux points B, b , il y a donc des vitesses acquises en $B \& b$, lesquelles doivent être ajoutées aux vitesses que les corps auroient acquises en C, c , si leur mouvement avoit commencé en B, b , & il est visible que ces vitesses acquises en B, b , restent toujours les mêmes jusqu'en C, c , & qu'elles ne font que recevoir les augmentations de vitesses causées par le mouvement des corps de B en b , & de C en c ; or les vitesses acquises en B, b , sont $\sqrt{m}, \sqrt{1}$, & comme elles sont uniformes jusqu'à la fin des espaces BC, bc les tems employés par les corps A, a à parcourir BC, bc avec ces vitesses uniformes sont donc encore comme m à \sqrt{m} , c'est-à-dire en raison composée de la raison directe des espaces $m, 1$, & de la réciproque des vitesses $\sqrt{1}, \sqrt{m}$.

Puis donc que les différens tems employés à parcourir les espaces ABC, abc , sont toujours comme m est à \sqrt{m} , il s'ensuit que le tems total employé à parcourir l'espace ABC est au tems total employé à parcourir l'espace abc comme m est à \sqrt{m} ; mais \sqrt{m} est moyen proportionnel entre m & 1 , ainsi l'on a :: $m, \sqrt{m}, 1$, & par conséquent $m, \sqrt{m} :: \sqrt{m}, 1$; puis donc que les tems sont comme m, \sqrt{m} , ils sont aussi comme $\sqrt{m}, \sqrt{1}$, c'est-à-dire comme les racines quarrées des droites AB, ab , ou des longueurs ABC, abc , qui sont en même raison que AB, ab , donc, &c.

COROLLAIRE I.

206. Les hauteurs AR, ar , sont proportionnelles aux longueurs ABC, abc , donc les tems sont aussi entr'eux comme les racines quarrées de ces hauteurs.

COROLLAIRE II.

207. Deux courbes semblables étant composées d'une infinité de petits côtés semblables entr'eux, & qui sont comme autant de petits plans diversement inclinés mais semblablement posés, les tems que deux corps employent à les parcourir, sont donc aussi entr'eux comme les racines quarrées de ces courbes.

PROPOSITION. LXVII.

208. Si un corps après être descendu par la force de sa pesanteur

remonte avec la vitesse acquise à la fin de la chute le long d'un plan incliné, son mouvement est uniformément retardé.

DEMONSTRATION.

Lorsque le corps remonte le long du plan incliné, sa pesanteur relative lui résiste autant qu'elle le pousseroit en le faisant descendre ; or si cette pesanteur le faisoit descendre, elle lui communiqueroit à chaque instant des degrés égaux de vitesse, donc en s'opposant au mouvement du corps contraire à sa direction, elle lui ôte à chaque instant un degré de vitesse, & par conséquent le mouvement du corps est uniformément retardé.

COROLLAIRE I.

209. Et comme lorsque la pesanteur relative fait descendre le corps, les espaces parcourus dans des tems égaux sont comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. il s'ensuit que lorsque la pesanteur relative s'oppose au mouvement contraire à sa direction, le corps parcourt dans des tems égaux des espaces qui sont les mêmes nombres impairs pris en rétrogradant, c'est-à-dire comme 7, 5, 3, 1.

COROLLAIRE II.

210. De même comme le corps en descendant ne parcourt que la moitié de l'espace qu'il parcourroit d'un mouvement uniforme avec la vitesse acquise à la fin du dernier instant, de même aussi le corps en remontant ne parcourt que la moitié de l'espace qu'il parcourroit d'un mouvement uniforme avec la même vitesse acquise.

COROLLAIRE III.

211. Donc un corps qui remonte avec sa vitesse acquise à la fin de sa descente, remonte autant qu'il étoit descendu ; ce qui est également vrai d'un corps qui remonte verticalement après être descendu verticalement.

CHAPITRE VIII.

Du mouvement des Corps qui montent ou qui descendent le long des lignes courbes.

ON peut imaginer une infinité de différentes courbes, le long desquelles un corps grave descende selon telle loi que l'on voudra. J'en rapporterai quelques-unes dans ce Chapitre, & ce que j'en dirai fera voir de quelle manière on doit résoudre les questions qu'on peut faire sur ce sujet.

PROPOSITION LXVIII.

212. Trouver une courbe GMB (Fig. 77.) de telle nature qu'un corps qui viendra à la parcourir s'approche de l'horizon d'un mouvement uniforme, c'est-à-dire que si l'on suppose que dans le premier instant le corps ait parcouru l'arc GO, & dans le second l'arc OM, les parties GQ, QP prises sur la ligne AC perpendiculaire à l'horizon CB soient égales entr'elles.

SOLUTION.

Je mène les ordonnées PM, pm infiniment proches, & supposant que la hauteur dont le corps doit tomber soit la droite AC, je nomme $AP = x$, $PM = y$; donc $Pp = dx$, $mR = dy$, & Mm pouvant être regardé comme une ligne droite qui est l'hypoténuse du triangle rectangle MRm est par conséquent $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Par la condition du Problème le tems de la descente le long de GM est au tems de la descente le long de Mm comme AP est à Pp, ainsi supposant que le tems de la descente le long de GM soit exprimé par AP, le tems de la descente le long de Mm sera $Pp = dx$; le corps tombant de A en G & de G en M d'un mouvement uniformément accéléré a acquis une vitesse égale à la vitesse qu'il auroit acquise en P en descendant de A en P d'un mouvement uniformément accéléré (N. 200.), d'où il suit que cette vitesse est \sqrt{x} ; or le petit arc Mm étant infiniment petit, la vitesse pendant le mouvement de M en m peut être

Z

regardée comme uniforme ; mais dans le mouvement uniforme les espaces sont entr'eux comme les produits des tems par les vitesses (N. 17.) donc l'espace $Mm = dx\sqrt{x}$, mais nous avons déjà $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, donc $dx\sqrt{x} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & élevant tout au quarré, puis retranchant dx^2 de part & d'autre, puis tirant la racine quarrée, j'ai comme on voit par le calcul ci-joint $dx\sqrt{x-1} = dy$.

Pour tirer l'intégrale de cette Equation, je suppose l'indéterminée u égale à $x-1$, ainsi j'ai $u = x-1$, donc $du = dx$, & mettant la valeur de $x-1$, & de dx l'équation différentielle de $dx\sqrt{x-1} = dy$, j'ai une autre équation dont l'intégrale étant élevée au quarré, donne $u^3 = \frac{2}{3}y^2$ qui est une Parabole dont le quarré de l'ordonnée y multiplié par $\frac{2}{3}$ est égal au cube de l'abscisse u .

$$dx\sqrt{x} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$x dx^2 = dx^2 + dy^2$$

$$x dx^2 - dx^2 = dy^2$$

$$dx\sqrt{x-1} = dy$$

$$u = x-1$$

$$du = dx$$

$$du\sqrt{u} = dy, \text{ \& } u^{\frac{1}{2}} du = dy$$

$$\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = y$$

$$\frac{4}{3} u^3 = y^2, \text{ ou } u^3 = \frac{2}{3} y^2$$

Or la hauteur $AP = x$, & $u = x-1$; donc le sommet de la Parabole est plus bas que le point A ; ainsi si l'on veut que le corps descende le long de la courbe de la façon qu'il est proposé, il faut qu'il commence à tomber du point A.

Mais puisque l'abscisse $GP = u = x-1$, & que $AP = x$, donc $AP - GP = x - x + 1 = 1 = AG$, & par conséquent le Parametre doit être $\frac{2}{3}AG$; nommant donc le Parametre $= p$, nous aurons $p = \frac{2}{3}AG$, ou $\frac{3}{2}p = AG$, c'est-à-dire que si avec un Parametre quelconque p , on décrit la parabole $u^3 = py^2$, la distance AG du point A d'où le corps doit descendre au sommet G de cette parabole doit être $\frac{3}{2}p$.

La courbe dont nous venons de parler est appelée *Isochrone* par quelques Auteurs.

R E M A R Q U E.

213. Dans la solution de ce Problème nous avons supposé que les corps graves descendent vers le centre de la terre selon loi de Galilée, & qu'en quelque point de la courbe que le corps vint à descendre librement, sa direction seroit toujours paralele à la droite AC qui est perpendiculaire à l'horizon ; or la p

miere de ces suppositions n'est vraie qu'à l'égard des corps qui ne sont pas extrêmement éloignés de la surface de la terre, comme il a été dit en parlant de cette loi, & la seconde prise dans la rigueur est absolument fautive; car puisque les corps tendent tous vers le centre de la terre, leur directions se rencontrent donc dans ce centre, & par conséquent elle ne sont point paralleles. Cependant comme les corps qu'on considere dans la Méchanique ne tombent point sur la surface de la terre d'une hauteur extrêmement grande, & que les distances qu'ils ont entr'eux sont ordinairement très mediocres, au lieu que la distance de la surface de la terre à son centre est très grande, il est sûr que les directions de ces corps peuvent passer pour paralleles à cause de l'angle extrêmement petit qu'elles font au centre de la terre. Puis donc que nos deux suppositions conviennent à l'objet de la Méchanique, nous les suivrons dans le reste de ce Chapitre, mais sur la fin nous résoudrons ce même Problème en prenant d'autres loix d'acceleration & des directions non paralleles, & ce que nous en dirons suffira pour faire voir comment on doit résoudre ces sortes de questions.

PROPOSITION LXIX.

214. *Trouver une courbe de telle nature que si un corps vient à la parcourir, les tems qu'il employe à parcourir ses différens arcs GO, GM (Fig. 78.) soient entr'eux comme telles puissances ou telles racines que l'on voudra des hauteurs correspondantes AQ, AP.*

SOLUTION.

Soit AG la hauteur déterminée d'où le corps doit tomber, je mene les ordonnées PM, pm, infiniment proches, & nommant $AP = x$, $PM = y$, j'ai $Pp = dx$, $mR = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & supposant que l'exposant de la puissance des hauteurs AQ, AP, &c. Soit $= 2$ je cherche la solution en cette sorte.

Par la supposition le tems de la descente le long de GO est au tems de la descente le long de GM comme \overline{AQ} est à $\overline{AP} = x^2$, ainsi supposant que le tems de la descente le long de GO soit exprimé par \overline{AQ} , le tems de la descente le long de GM sera $= x^2$, or le tems de la descente le long de Mm étant la différence du tems employé le long de Gm & du tems employé le long de GM, cette différence est égale à la différence du quarré de AP au quarré

Z ij

de Ap ; mais le quarré de AP est $=x^2$, & Ap étant $x+dx$ son quarré est $x^2+2xdx+dx^2$, & par conséquent la différence des quarrés est $2xdx+dx^2$, ou simplement $2xdx$, à cause que dx^2 est infiniment petit par rapport à $2xdx$, & peut n'être compté pour rien, ainsi le tems employé le long de Mm est $=2xdx$; or la vitesse acquise en M est égale à la vitesse que le corps auroit acquise en P en descendant le long de AP d'un mouvement accéléré (*N. 200.*) & selon la loi de Galilée, cette vitesse est $\sqrt{AP}=\sqrt{x}$, donc la vitesse en M est $=\sqrt{x}$; mais l'arc Mm étant infiniment petit, la vitesse du corps le long de cet arc peut passer pour uniforme, & dans le mouvement uniforme, l'espace Mm est égal au produit du tems par la vitesse, donc $Mm=2xdx\sqrt{x}$; mais nous avons $Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}$, donc $2xdx\sqrt{x}=\sqrt{dx^2+dy^2}$, & élevant tout au quarré, puis retranchant dx^2 de part & d'autre, ensuite tirant la racine quarrée, & enfin tirant dx^2 hors du signe radical, j'ai comme on voit ici $dx\sqrt{4x^3-1}=dy$; donc $\int dx\sqrt{4x^3-1}=y$.

On peut tirer l'intégrale du premier membre, en le réduisant en une serie infinie selon les regles que nous avons données dans le *Calcul Differentiel & Intégral*, ou bien en supposant que ce premier membre multiplié par une grandeur connue represente l'aire d'une courbe connue, parce qu'on peut toujours en approcher de bien près selon les regles de la Geometrie ordinaire.

Je multiplie d'abord ce premier membre par une grandeur arbitraire a , & l'on en va voir la raison ; ainsi j'ai $\int adx\sqrt{4x^3-1}$ pour l'aire de la courbe ; c'est pourquoi cette aire étant supposée connue, je n'aurai qu'à la diviser par a , & j'aurai la valeur de y . L'aire de la courbe étant donc $\int adx\sqrt{4x^3-1}$, son élément est par conséquent $adx\sqrt{4x^3-1}$, & supposant que les x representent les abscisses de cette courbe, & qu'ils soient les mêmes que ceux de la courbe du Problème, si je divise cet élément par dx , le quotient $a\sqrt{4x^3-1}$ sera l'ordonnée correspondante ; nommant donc cette ordonnée z , j'ai $z=a\sqrt{4x^3-1}$.

$$2xdx\sqrt{x}=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$4x^3dx^2=dx^2+dy^2$$

$$4x^3dx-dx^2=dy^2$$

$$\sqrt{4x^3dx^2-dx^2}=dy$$

$$dx\sqrt{4x^3-1}=dy$$

$$\int dx\sqrt{4x^3-1}=y$$

Pour construire cette courbe je prens une ligne droite AF (Fig. 79.) égale à AC, que je divise en plusieurs parties égales entr'elles, & à la droite a , que je regarde comme l'unité, ensuite je suppose d'abord $z=0$, ce qui donne $a\sqrt{4x^5-1}=0$, & divisant par a puis élevant au quarré, j'ai $4x^5-1=0$; donc $4x^5=1$, $x^5=\frac{1}{4}$, & $x=\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$, c'est-à-dire que quand l'ordonnée $z=0$ le sommet de la courbe se trouve éloigné de A d'une quantité $AV=\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$.

Je suppose $z=\infty$, c'est-à-dire z infiniment grande, ce qui donne $a\sqrt{4x^5-1}=\infty$; donc divisant par a , qui est une grandeur finie, j'ai encore $\sqrt{4x^5-1}=\infty$, & élevant au quarré puis donnant 1 qui est une grandeur finie, j'ai $4x^5=\infty$; enfin divisant par 4, & tirant la racine cinquième, j'ai encore $x=\infty$, car une grandeur étant infinie toutes ses racines le sont aussi, autrement la grandeur n'étant autre chose que le produit de sa racine multipliée par elle-même autant qu'il le faut pour être élevée à la puissance, il s'ensuivroit que le fini produiroit l'infini; puis donc que x est infini quand z est infini, la courbe n'a point d'asymptote.

Pour trouver les autres points de la courbe, je suppose $x=1$, ce qui donne $z=1\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$; ainsi quand l'abscisse $AB=1$, l'ordonnée $BX=\sqrt{2}$.

Je suppose $x=2$, ce qui donne $z=1\sqrt{4\times 32-1}=\sqrt{128-1}=\sqrt{127}$, ainsi quand l'abscisse $AC=2$ l'ordonnée $CL=\sqrt{127}$.

Je cherche de la même façon les ordonnées de la courbe correspondante aux abscisses AD, &c. & partageant ensuite chacune des parties égales AB, BC, CD, en deux parties égales, je cherche les ordonnées correspondantes aux points de division en supposant $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$, $x=\frac{5}{2}$, &c. & je continue de la même façon en coupant ensuite chacune de ces nouvelles parties en deux parties égales, &c.

Pour voir si la courbe passe de l'autre côté de l'axe, & vers quel endroit elle tourne, je suppose $z=-1$, ce qui donne $-1=a\sqrt{4x^5-1}$, & divisant par $a=1$, puis élevant tout au quarré j'ai $1=4x^5-1$, donc $\frac{1}{2}=x^5$, & $x=\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$; ainsi quand $z=-1$, c'est-à-dire, quand l'ordonnée de l'autre côté de l'axe est égale à 1, l'abscisse est $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$.

Je suppose $z=-2$, ce qui donne $-2=a\sqrt{4x^5-1}$, divisant donc par $a=1$, puis élevant tout au quarré, j'ai $4=4x^5$.

— 1 ; donc $5 = 4x^4$, $\frac{5}{4} = x^4$, & $\sqrt[4]{\frac{5}{4}} = x$, ce qui fait voir que quand l'ordonnée est — 2 l'abscisse est $\sqrt[4]{\frac{5}{4}}$.

Et continuant de la même façon, je trouve autant de points de la courbe que je veux, & je vois que cette courbe prend sa route vers K.

Maintenant pour décrire la courbe du Problème par le moyen de la courbe trouvée, je prens la hauteur donnée AC (Fig. 78.), que j'ai faite égale à AF (Fig. 79.) & la divisant de la même façon, & supposant la quadrature de l'espace FVM, & de ses parties VBX, VCL, &c. connue; je fais sur la droite AB = a un rectangle ABZY égal à l'espace correspondant VBX, & j'ai $ABZV = \int dx \sqrt{4x^4 - 1}$, & divisant par AB = a, j'ai $BZ = \frac{\int dx \sqrt{4x^4 - 1}}{a} = y$, & par conséquent BZ est une ordonnée de la courbe.

Je fais de même sur BC = a, un rectangle Bb égal à l'espace CAL, ce qui donne $BCba = \int dx \sqrt{4x^4 - 1}$, & divisant par a j'ai $Cb = \frac{\int dx \sqrt{4x^4 - 1}}{a} = y$, donc Cb est une ordonnée de la courbe, & continuant de la même façon sur toutes les divisions de la ligne AF, je décris la courbe VZbt demandée, & si je voulois la décrire de l'autre côté de l'axe, j'agirois de la même façon en prenant les divisions que les ordonnées de ce côté font sur l'axe.

PROPOSITION LXX.

215. *Trouver une courbe ABC (Fig. 80.) de telle nature que si un corps grave vient à la parcourir, il se trouve toujours que les distances de ce corps à un point fixe D, soient proportionnelles aux tems qu'il emploie à parcourir les arcs à l'extrémité desquels il se trouve; c'est-à-dire, que quand il aura parcouru les arcs AB, AM, ses distances BD, MD, soient entr'elles comme les tems employés à parcourir ces arcs.*

SOLUTION.

Soit A le point d'où le corps doit commencer à descendre, & D le point fixe donné sur la droite AH; du point D pris pour centre & de l'intervalle DA je décris un demi-cercle AF, je mene les ordonnées PM, pm infiniment proches, je tire du centre D les droites DM, Dm, & des points N, n les droites NQ, nq paralleles aux ordonnées PM, pm; du centre D je décris le petit arc MR, du point n je mene nO perpendiculaire à NQ, enfin au point N je mene la tangente NT.

Je nomme $DN = DA = DF = a$, $DQ = z$, $DM = t$; donc

$$mR = dt, Qq = nO = dz, \& QN = \sqrt{DP^2 - DQ^2} = \sqrt{a^2 - z^2}.$$

La droite TN étant tangente, le triangle TND est rectangle & semblable aux triangles QND & QNT, lesquels sont aussi semblables au triangle nON, comparant donc ensemble les triangles QND, nON, j'ai NQ, DN :: nO, Nn ; donc $\sqrt{a^2 - z^2}$,

$$a :: dz, \sqrt{\frac{adz}{a^2 - z^2}} = Nn.$$

Or les secteurs semblables DNn, DMR donnent DN, Nn :: DM, MR, donc $a, \sqrt{\frac{adz}{a^2 - z^2}} :: t, \sqrt{\frac{tdz}{a^2 - z^2}} = MR$; donc

$$\overline{MR}^2 = \frac{t^2 dz^2}{a^2 - z^2}, \text{ mais } \overline{mR}^2 = dt^2, \text{ donc dans le triangle rectangle } MmR, \text{ j'ai } \overline{Mm}^2 = \frac{t^2 dz^2}{a^2 - z^2} + dt^2 = \frac{t^2 dz^2 + a^2 dt^2 - z^2 dt^2}{a^2 - z^2}.$$

Pour trouver une autre valeur de \overline{Mm}^2 , j'observe que l'arc Mm étant infiniment petit, le mouvement du corps sur cet arc peut passer pour uniforme ; or dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus sont comme les produits des tems par la vitesse (N. 17.) Prenant donc la vitesse acquise en M qui est \sqrt{AP} (N. 200.) & le tems employé à parcourir Mm qui est dt , j'ai l'espace $Mm = dt\sqrt{AP}$; or les triangles semblables QND, PMD donnent DN, DQ :: DM, DP, donc $a, z :: t, \frac{zt}{a} = DP$, & par conséquent $AP = AD + DP = a + \frac{zt}{a} = \frac{a^2 + zt}{a}$, $Mm = dt\sqrt{\frac{a^2 + zt}{a}}$ & $\overline{Mm}^2 = \frac{a^2 dt^2 + zt dt^2}{a}$, ou bien en prenant a pour l'unité, j'ai $\overline{Mm}^2 = \frac{a^2 dt^2 + zt dt^2}{a^2}$; or j'ai trouvé $\overline{Mm}^2 = \frac{t^2 dz^2 + a^2 dt^2 - z^2 dt^2}{a^2 - z^2}$, donc j'ai

$$\frac{a^2 dt^2 + zt dt^2}{a^2} = \frac{t^2 dz^2 + a^2 dt^2 - z^2 dt^2}{a^2 - z^2}$$

$$a^4 dt^2 - a^2 z^2 dt^2 + a^2 zt dt^2 - z^3 t dt^2 = a^2 t^2 dz^2 + a^4 dt^2 - a^2 z^2 dt^2$$

$$a^2 zt dt^2 - z^3 t dt^2 = a^2 t^2 dz^2$$

$$dt \times \sqrt{a^2 zt - z^3 t} = at dz$$

$$dt \times \sqrt{a^2 z - z^3} = adz \sqrt{t}$$

$$dt \times \sqrt{a^3 z - az^3} = adz \sqrt{at}$$

$$a^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{adz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$$

$$2a^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} = \int \frac{adz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$$

$$2a^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} = \int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$$

Et réduisant tout au même dénominateur, puis corrigeant l'expression & tirant la racine quarrée; ensuite tirant hors du signe dt^2 , puis divisant par \sqrt{t} , & multipliant par \sqrt{a} , ensuite divisant tout par \sqrt{at} , & par $\sqrt{a^3 z - az^3}$, enfin tirant l'intégrale, & multipliant tout par a , j'ai comme on voit ici $2a^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} = \int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$.

Il ne s'agit donc que de pouvoir tirer l'intégrale du second membre de cette équation pour avoir la courbe demandée, car de tous les points de la demi-circonférence ANB menant par le centre D des indéterminées DB, DM, Dm, &c. je pourrai déterminer leur extrémités B, M, m, &c. si je trouve cette intégrale, puisque cette intégrale me donnera une équation dans laquelle je pourrai toujours trouver la valeur de t correspondante aux arcs Ab, AN, An, &c. de la demi-circonférence.

Pour cela, je n'ai qu'à réduire $\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$ en une serie infinie selon les regles que j'ai données dans le *Calcul Différentiel & Integral*, &c. ou bien je n'ai qu'à supposer la quadrature d'une courbe qu'il s'agit d'abord de déterminer en cette sorte.

Je multiplie $\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$ par a , ce qui donne $\int \frac{a^3 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$ que je regarde comme l'aire de la courbe dont j'ai besoin pour trouver la courbe du Problème, ainsi cette aire & ses parties étant connues ou supposées connues, je n'aurai qu'à diviser par a , & j'aurai la valeur de $2a^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}$, d'où je tirerai facilement la valeur de t .

Puis donc que $\int \frac{a^3 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$ est l'aire d'une courbe, il s'ensuit que $\frac{a^3 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$ est son élément, ainsi prenant les z pour les abscisses de cette courbe, & divisant l'élément par dz , le quotient $\frac{a^3}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$ sera l'expression des ordonnées. Nommant donc chaque ordonnée u , nous aurons $u = \frac{a^3}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$.

Pour

Pour décrire cette courbe, je prens une droite AH (Fig. 81.) égale à la droite donnée AH, sur laquelle je prens AD égale à la distance AD du point donné D au point A, je fais DF = DA = a, & je divise DF d'abord en deux parties, puis en 4, &c. & je fais la même chose sur DA, & comme les abscisses de la courbe que je cherche sont les z, c'est-à-dire les abscisses prises de D vers F, les abscisses prises de D vers A seront les - z ; je commence par les + z.

Je suppose donc d'abord $u = \infty$, ce qui donne $\frac{a^3}{\sqrt{a^3z - az^3}} = \infty$, mais quand une fraction est d'une valeur infinie, son dénominateur est égal à zero, donc $\sqrt{a^3z - az^3} = 0$, & élevant tout au quarré, puis donnant az^3 de part & d'autre, j'ai $a^3z = az^3$, & divisant par a puis par z, j'ai $aa = zz$, & par conséquent $z = a$, ce qui me fait voir que quand l'abscisse AF = a, l'ordonnée u ou Ff. est infinie, & par conséquent cette ordonnée est l'asymptote de la courbe cherchée.

Je suppose $z = 0$, ce qui donne $u = \frac{a^3}{0} = \infty$, donc quand l'abscisse est nulle, l'ordonnée Dd est infinie, & par conséquent elle est encore asymptote de la courbe que je cherche ; ainsi cette courbe est renfermée entre les deux lignes Ff, Dd.

Je suppose $z = \frac{1}{2}a$, ou $z = \frac{1}{2}$, en faisant $a = 1$, & j'ai $u = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$, donc quand $z = \frac{1}{2}DF$, l'ordonnée est $= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$.

Je suppose de même $z = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{4}$, $z = \frac{1}{5}$, &c. & $z = \frac{1}{6}$, $z = \frac{1}{7}$, &c. & je trouve autant de points de la courbe, & aussi près que je veux ; faisant donc passer par tous ces points une courbe, j'ai MNP qui est la courbe cherchée.

Pour trouver l'ordonnée la moins longue de cette courbe, je prens la différence de l'équation $u = \frac{a^3}{\sqrt{a^3z - az^3}}$, laquelle est

$du = -\frac{1}{2}a^3 \times \frac{a^3dz - 3az^2dz}{a^3z - az^3} \times \frac{1}{\sqrt{a^3z - az^3}}$, & selon les règles des plus grandes & des moindres quantités que j'ai données dans le *Calcul Différentiel & Intégral*, &c. je fais $du = 0$, ce qui donne $-\frac{1}{2}a^3 \times \frac{a^3dz - 3az^2dz}{a^3z - az^3} \times \frac{1}{\sqrt{a^3z - az^3}} = 0$; divisant donc par $-\frac{1}{2}a^3 \times \frac{a^3dz - 3az^2dz}{a^3z - az^3} \times \frac{1}{\sqrt{a^3z - az^3}}$, & donnant de part & d'autre $3az^2dz$, puis divisant par dz , j'ai $a^3 = 3az^2$, & divisant par $3a$, puis tirant la racine quarrée j'ai $z = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$, c'est-à-dire que

A a

quand l'abscisse est $\sqrt{\frac{1}{2}aa}$, l'ordonnée correspondante est la moindre ordonnée de la courbe cherchée.

Pour voir s'il n'y auroit pas une autre courbe dans l'angle ADd dans lequel les abscisses sont $-z$, je suppose $-z = a = 1$, ou $z = -1$, ce qui donne $u = \frac{1}{\sqrt{-1-1}} = \frac{1}{\sqrt{-2}}$, & comme $\sqrt{-2}$ est une grandeur imaginaire, je trouve que l'abscisse ne sçauroit être -1 .

Je suppose de même $-z = \frac{1}{2}$, ou $z = -\frac{1}{2}$, ce qui donne $u = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$, & comme cette valeur est encore imaginaire, & que je trouve toujours des semblables valeurs en supposant $z = -\frac{1}{4}$, $z = -\frac{1}{9}$, &c. je vois par-là qu'il n'y a point de courbe dans l'angle ADd , & il ne sçauroit y en avoir non plus dans l'angle ADz , à cause que les abscisses seroient les $-z$.

Pour voir s'il n'y a pas une autre courbe dans l'angle zDH où les ordonnées sont les $-u$, je fais d'abord $-u = \infty$, ce qui donne $-\frac{a^3}{\sqrt{a^3z-az^3}} = \infty$; or quand une fraction est d'une valeur infinie, son dénominateur est égal à zero, donc $\sqrt{a^3z-az^3} = 0$, & élevant tout au quarré, puis donnant de part & d'autre az^3 , j'ai $a^3z = az^3$, & divisant par a , ensuite par z , j'ai $a^2 = z^2$, & $z = a$, ce qui me fait voir que la droite Ff étant continue de l'autre côté de l'axe est l'asymptote de la courbe qui est de ce côté là.

Je suppose $z = 0$, ce qui donne $-\frac{a^3}{\sqrt{a^3z-az^3}} = -\frac{a^3}{0} = -u$; ainsi quand l'abscisse est nulle, l'ordonnée Dz est aussi infinie, & par conséquent elle est l'asymptote de la courbe de ce côté là.

Je suppose $z = \frac{1}{2}$, ce qui donne $-u = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$, ainsi quand z est $= \frac{1}{2}$, l'ordonnée dans l'angle zDH est $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$, de même que l'ordonnée dans l'angle dDH .

Et comme en faisant $z = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{4}$, &c. je trouve que les ordonnées dans l'angle zDH sont toujours les mêmes que les ordonnées dans l'angle dDH , je vois que les deux courbes sont égales & posées de la même façon dans chacun de ces angles, ainsi la première étant décrite la seconde se décrit facilement.

Maintenant pour trouver la courbe que le Problème demande par le moyen de cette courbe, dont je suppose que la quadrature est connue de même que celle de ses parties; je fais sur la ligne

$AD=a$ un rectangle Aa_4D égal à la partie $DQNMd$ de l'aire de la courbe, ainsi j'ai $Aa_4D = \int \frac{a^3 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$, & divisant ce rec-

tangle par AD , j'ai $D_4 = \int \frac{a^3 dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}} = 2a^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}$, ainsi qu'on a vû

ci-dessus; je fais le quarré de D_4 , ce qui donne $\overline{D_4} = 4az$, c'est-à-dire, le quarré de D_4 est égal à un rectangle dont l'un des côtés seroit $= 4a = 4AD$, & l'autre seroit $= z$; je fais donc sur le côté $4AD$ un rectangle égal à $\overline{D_4}$, & l'autre côté de ce rectangle est par conséquent $= z$. Du point D par le point n ou le demi-cercle AnF coupe QN , je mene l'indéfinie DZ & prenant sur DZ la partie DX égale à la valeur de z que je viens de trouver, le point X est un point de la courbe que le Problème demande.

Je fais la même chose à l'égard des autres parties de l'aire $DdMNP/F$ coupées du côté de Dd par les ordonnées menées des points de division de la droite DF , & je trouve autant de points que je veux de la courbe demandée; & comme en D il n'y a plus d'aire, il s'ensuit que la courbe DXV qu'on demande passe par le point donné D , & non pas par le point A (*Fig. 80*), & que le corps qui doit la parcourir pour faire l'effet qu'on demande, doit auparavant descendre de la hauteur AD .

On voit bien que la courbe DXV passant dans l'angle $3DH$, est posée dans cet angle, de même qu'elle seroit posée dans l'angle dDH .

La courbe que nous venons de décrire est appelée par quelques Auteurs *Courbe Isocrone Paracentrique*.

Au reste pour sçavoir si l'espace $dDFPNM$ peut se quarrer, il n'y a qu'à faire attention à son équation $u = \frac{a^3}{\sqrt{a^3 z - az^3}} = \frac{a^3}{\sqrt{a^3 - z^3} \times \sqrt{az}}$, car nous verrons que le second membre est formé par deux analogies dont l'une est \sqrt{az} , $a :: a, \frac{a^2}{\sqrt{az}}$, & la seconde est $\sqrt{a^3 - z^3}$, $\frac{a^2}{\sqrt{az}} :: a, \frac{a^3}{\sqrt{a^3 - z^3} \times \sqrt{az}}$; or \sqrt{az} est l'ordonnée d'une parabole quarrée dont l'abscisse seroit z , & le parametre $= a$, car nommant l'ordonnée $= m$, on auroit $m^2 = az$, & $m = \sqrt{az}$; de même $\frac{a^2}{\sqrt{az}}$ étant une troisième proportionnelle à \sqrt{az} & à a , est par conséquent l'élément d'un espace asymptoti-

que d'une hyperbole du second genre, ainsi que nous l'avons démontré dans *la Mesure des Surfaces & des Solides*, où j'ai fait voir que si l'on prend des troisièmes proportionnelles aux élémens d'une parabole & à ceux d'un rectangle, lesquels sont tous égaux entr'eux, ces troisièmes proportionnelles forment un espace hyperbolique entre les asymptotes. Enfin $\sqrt{a^2 - z^2}$ est l'ordonnée d'un quart de cercle dont le rayon $= a$, & dont l'abscisse est prise du centre; ainsi puisque nous avons $\sqrt{a^2 - z^2}, \frac{a^2}{\sqrt{az}} :: a$,

$\frac{a^3}{\sqrt{a^2 - z^2} \times \sqrt{az}}$, il s'ensuit que les élémens de l'espace $dDFfPNM$ sont aux élémens d'un quarré dont le côté seroit $= a$, comme les élémens d'un espace hyperbolique du second genre qui auroit pour hauteur la droite $= a$, sont aux élémens d'un quart de cercle, dont le rayon est $= a$; or le rapport des élémens de l'espace hyperbolique aux élémens du quart de cercle est inconnu, donc le rapport des élémens de l'espace $dDFfPNM$ aux élémens du quarré de a est aussi inconnu, & par conséquent il n'est guere possible de trouver la quadrature de cet espace.

Mais à quoi sert donc cet appareil de construction que j'ai fait pour la solution du Problème? Si on le demande, voici la réponse? Cet appareil ne sert à rien pour la question présente, & l'on auroit même mieux fait de la refondre en reduisant l'équation

$\frac{\int a^2 dz}{\sqrt{a^2 z - z^3}} = y$, est une serie infinie, mais comme il arrive souvent que ces sortes de constructions sont très-utiles en bien d'occasions, & que d'ailleurs elles conservent cet esprit geometrique que les series ne donnent pas, attendu qu'elles appartiennent purement au calcul; j'ai été bien aise de rapporter cette construction pour faire voir jusqu'où on pouvoit pousser la Geometrie dans ces sortes de Problèmes.

PROPOSITION LXXI.

216. *Trouver le tems qu'un corps employe à parcourir la concavité d'une courbe.*

SOLUTION.

Soit AP (Fig. 82.) la hauteur de la descente le long de l'arc AM, je mene pm infiniment proche de PM, & nommant AP $= x$, PM $= y$, j'ai Pp $= dx$, mR $= dy$ & Mm $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

je nomme t le tems de la descente le long de l'arc AM, ainsi dt sera le tems de la descente le long de l'arc infiniment petit Mm.

Maintenant la vitesse acquise en M étant la même que la vitesse acquise en P est \sqrt{x} ; or l'arc Mm étant infiniment petit, la vitesse acquise en M peut passer pour uniforme le long de l'arc Mm, & dans le mouvement uniforme, l'espace parcouru est comme le tems multiplié par la vitesse (N. 17.) donc $Mm = dt\sqrt{x}$, mais nous avons $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, donc $d\sqrt{x} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & $dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}$.

Pour trouver l'integrale de dt , il faut chercher une valeur de dy en dx par le moyen de l'équation de la courbe dont il s'agit, en cette sorte.

Soit la courbe AM une parabole dont le parametre $= a = 1$, son équation sera par conséquent $xx = ay$, donc $2xdx = ady$ & $dy = \frac{2xdx}{a}$; $dy^2 = \frac{4x^2 dx^2}{a^2}$, mettant donc cette valeur de dy^2 dans

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}, \text{ j'ai } dt = \frac{\sqrt{dx^2}}{\sqrt{x}} + \frac{4x^2 dx^2}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 dx^2 + 4x^2 dx^2}}{\sqrt{a^2 x}} \\ = \frac{dx\sqrt{a^2 + 4x^2}}{\sqrt{a^2 x}}, \text{ donc } t = \int \frac{dx\sqrt{a^2 + 4x^2}}{\sqrt{a^2 x}}.$$

Il ne s'agit donc que de tirer l'integrale du second membre de cette équation, ce qu'on peut faire, ou en le reduisant en une serie infinie, ou en employant la méthode dont je me suis servi dans la Proposition précédente; mais comme l'un & l'autre de ces moyens sont très-longs, voyons si l'équation ne nous fournira pas quelque voye plus courtte & plus facile.

J'observe donc qu'en prenant a pour l'unité, l'équation se reduit à $t = \int \frac{dx\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{x}}$; or en multipliant $\int \frac{dx\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{x}}$ par 1, & regardant ensuite le produit comme l'aire d'une courbe dont la quadrature étant divisée par 1, nous fera trouver ce que nous cherchons, ainsi que j'ai dit dans la Proposition précédente, il est sûr que l'élément de cette courbe est $\frac{dx\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{x}}$, & son ordonnée $\frac{\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{x}}$; & cette expression est le quatrième terme de cette proportion $\sqrt{x}, 1 :: \sqrt{1+4x^2}, \frac{\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{x}}$.

Maintenant le premier terme \sqrt{x} de cette proportion est l'or-

A a ij

donnée TS (*Fig. 83.*) d'une parabole OST dont le parametre $= a$ $= 1$, car par la nature de cette parabole on a $\overline{TS} = ax = x$, & par conséquent $TS = \sqrt{ax} = \sqrt{x}$; de même le troisième terme $\sqrt{1+4x^2}$ est l'ordonnée PX au second axe d'une hyperbole équilatère OX, dont l'axe est $= 2a = 2$, en supposant que l'abscisse HP prise du centre H soit toujours $2x$, c'est-à-dire double de l'abscisse OT $= x$ de la parabole OS, car par la propriété de cette hyperbole on a $\overline{PX} = \overline{HP}^2 + \overline{HO}^2 = 4x^2 + 1$, & par conséquent $PX = \sqrt{1+4x^2}$; puis donc que l'ordonnée $\frac{\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{x}}$ de la courbe que je cherche est quatrième proportionnelle à \sqrt{x} , 1, $\sqrt{1+4x^2}$, si je prens une quatrième proportionnelle TN à TS, OH, XP, le point N sera un point de la courbe cherchée & je trouverai tous les autres points de cette courbe de la même façon.

Il est visible que cette courbe a pour asymptote la tangente Oo au sommet de la parabole, car en ce point l'ordonnée de la parabole est zero, & l'ordonnée à l'hyperbole est HO, donc la proportion devient alors 0, HO, HO, $\frac{HO}{0} = \infty$, & par conséquent l'ordonnée Oo est infinie.

Pour trouver donc par le moyen de cette courbe le tems t de la descente du corps grave le long de la concavité de la parabole AM (*Fig. 82.*) je coupe sur l'axe de la courbe la partie OT (*Fig. 83.*) égale à la hauteur AP (*Fig. 82.*) je fais sur HO (*Fig. 83.*) un rectangle HOoh égal à l'aire OTNuo, ce qui donne HOoh

$$= \int \frac{dx \sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{x}} = \int \frac{adx \sqrt{a^2+4x^2}}{\sqrt{a^3x}}, \text{ \& divisant par } HO = 1 = a,$$

$$\text{ j'ai } Oo = \int \frac{dx \sqrt{a^2+4x^2}}{\sqrt{a^3x}} = t, \text{ c'est-à-dire } Oo \text{ exprime le rapport du}$$

tems de la descente le long de AM, & je trouverois de même les tems de la descente le long des arcs AX, AV (*Fig. 82.*) en menant les ordonnées xX, uV , puis transportant les hauteurs Ax, Au , sur OT (*Fig. 83.*) de O en x , & de O en y , puis menant les ordonnées xE, yF , & faisant ensuite sur HO des rectangles égaux aux aires $OxEuo, OyFuo$, je diviserois chacun de ces rectangles par HO, & les quotiens O_4, O_3 , &c. marqueroient les rapports des tems pendant la descente le long des arcs AX, AV, &c. (*Fig. 82.*) de sorte que l'un de ces tems étant connu par l'expérience ou autrement, tous les autres seront aussi connus puisqu'on connoît leurs rapports.

Soit la courbe AN (Fig. 84.) un quart de circonférence dont le rayon NO égal à la hauteur $An = a$; soit $AP = OL = x$, donc $Pp = Ll = RM = dx$, $mR = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; or par la propriété du cercle, j'ai $\overline{ML} = \overline{ON} - \overline{OL} = \overline{An} - \overline{AP} = a^2 - x^2$, donc $ML = \sqrt{a^2 - x^2}$; je tire le rayon $MO = An = a$, & la tangente MS ; l'angle OMS est droit de même que l'angle MLO du triangle rectangle MLO, ainsi l'angle OMS est égal aux deux angles LMO, LOM pris ensemble, ôtant donc de part & d'autre l'angle LMO, il reste l'angle LMS ou RmM , son alterne égal à l'angle LOM, donc les deux triangles rectangles LMO, mRM ayant un angle aigu égal à un angle aigu sont semblables, & par conséquent $LM, MO :: MR, mM$, ou $\sqrt{a^2 - x^2}, a, dx, \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = Mm$; mais le tems de la des-

cente le long de Mm , c'est-à-dire, dt est égal à $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}$, mettant donc au lieu de $\sqrt{dx^2 + dy^2} = Mm$, sa valeur $\frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, j'ai $dt = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2} \times \sqrt{x}}$, & en supposant $a = 1$, j'ai $dt = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2} \times \sqrt{ax}} = \frac{adx}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$, & par conséquent $t = \int \frac{adx}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$.

Ainsi il ne s'agit que de trouver l'intégrale de $\frac{adx}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$ pour avoir la valeur de t ; or cette intégrale est la même que nous avons cherchée dans la Proposition 70. (N. 215.), ainsi on la trouvera de la même façon.

Ou bien comme après avoir multiplié par a ce qui donne $\int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$ ou $\int \frac{a^3 dx}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$ à cause de $a = 1$, nous avons fait observer que l'élément $\frac{a^3}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$ étoit le quatrième terme d'une proportion $\sqrt{a^2 - x^2}, \frac{a^2}{\sqrt{ax}} :: a \frac{a^3}{\sqrt{a^3 x - ax^3}}$, & que le premier terme est l'élément d'un quart de cercle, dont le rayon $= a$, & le second l'élément d'un espace hyperbolique du second genre dont la hauteur seroit $= a$, il s'ensuit qu'en prenant des quatrièmes proportionnelles aux élémens du quart de cercle, à ceux de l'espace hyperbolique, & à ceux d'un carré aa , ces quatrièmes propor-

tionnelles formeront l'aire $\int \frac{a^2 dx}{\sqrt{ax-x^2}}$, ainsi on aura la courbe dont la quadrature donnera ce qu'on cherche, & on achevera le reste comme ci-dessus.

Soit l'arc AM (Fig. 85.) un arc de demi-cycloïde AMD, dont le demi-cercle générateur est aQD; je nomme DN = HP = x, & aD = AH = a, donc aN = AP = a - x; or par la propriété du cercle j'ai $\overline{QN}^2 = aN \times ND$, donc $\overline{QN}^2 = ax - xx$, de même, j'ai DN, QD :: QD, Da ou DN x Da = \overline{QD}^2 , donc $ax = \overline{QD}^2$, & QD = \sqrt{ax} ; or par la propriété de la cycloïde la tangente MT' au point M est parallèle à QD, donc les triangles rectangles QND, mRM sont semblables, & donnent ND, QD :: MR, Mm; or MR = Nn = dx, donc x, \sqrt{ax} :: dx, $\frac{dx\sqrt{ax}}{x}$ = $\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$ = Mm.

Or la vitesse acquise à la fin de AM étant la même que la vitesse acquise à la fin de AP = a - x (N. 200.) elle est par conséquent $\sqrt{a-x}$, & comme on peut la regarder comme uniforme pendant la descente le long de l'arc infiniment petit Mm, l'espace Mm est comme le produit de la vitesse $\sqrt{a-x}$ multipliée par le tems employé à le parcourir, c'est-à-dire par dt (N. 17.), donc Mm = dt x $\sqrt{a-x}$, mais nous avons Mm = $\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, donc $\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = dt \times \sqrt{a-x}$, d'où je tire $dt = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{ax-x^2}}$, & multipliant le numérateur & le dénominateur par a, j'ai $dt = \frac{a dx \sqrt{a}}{a \sqrt{ax-x^2}} = \frac{\sqrt{a} \times a dx}{a \times \sqrt{ax-x^2}}$, & par conséquent $t = \frac{\sqrt{a}}{a} \times \int \frac{a dx}{\sqrt{ax-x^2}}$.

Mais $\int \frac{a dx}{\sqrt{ax-x^2}}$ est double de l'arc aQ; car menant la droite QV au centre V, & la tangente QS l'angle droit SQV vaut les deux angles aigus NQV, NVQ du triangle rectangle NVQ; ôtant donc de part & d'autre l'angle NQV, il reste l'angle aigu SQN, ou Qqr son alterne égal à l'angle aigu NVQ; ainsi les deux triangles rectangles QNV, Qrq étant semblables, donnent QN, QV :: Qr, Qq, ou $\sqrt{ax-x^2}$, $\frac{1}{2}a$:: dx, $\frac{adx}{2\sqrt{ax-x^2}} = Qq$, donc aQ = $\int \frac{adx}{2\sqrt{ax-x^2}}$, & par conséquent $2aQ = \int \frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}}$.
De

De même $\sqrt{a} = \sqrt{aD}$, & $a = aD$; donc $t = \frac{\sqrt{a}}{a} \times \int \frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{\sqrt{aD}}{aD} \times 2aQ = \frac{2\sqrt{aD}}{aD} aQ$; or $2\sqrt{aD} = \frac{2\sqrt{aD} \times \sqrt{aD}}{\sqrt{aD}} = \frac{2aD}{\sqrt{aD}} = \frac{aD}{\frac{1}{2}\sqrt{aD}}$, & $\frac{1}{2}\sqrt{aD}$ est la moitié de la vitesse acquise à la fin de aD ; c'est-à-dire acquise en D , & si le mouvement étoit uniforme, le corps parcoureroit avec la vitesse acquise $\frac{1}{2}\sqrt{aD}$ le diamètre aD dans un tems égal à celui qu'il employeroit à le parcourir avec son mouvement accéléré; nommant donc ce tems T , nous aurions l'espace $aD = T \times \frac{1}{2}\sqrt{aD}$ (N. 17.), & par conséquent $T = \frac{aD}{\frac{1}{2}\sqrt{aD}} = 2\sqrt{aD}$; puis donc que nous avons $t = \frac{2\sqrt{aD}}{aD} \times aQ$, ce qui donne t , $2\sqrt{aD} :: aQ, aD$, il s'ensuit que le tems employé à parcourir l'arc AM est au tems que le corps employeroit à parcourir le diamètre du cercle générateur comme l'arc aQ est au même diamètre.

Quand aQ devient égal à la demi-circonférence aQD , on a $t = \frac{2\sqrt{aD}}{aD} \times aQD$, c'est-à-dire le tems employé à parcourir la demi-cycloïde est au tems employé à parcourir le diamètre comme la demi-circonférence du cercle générateur au diamètre.

PROPOSITION LXXII.

217. Trouver le tems qu'un corps employe à parcourir la convexité d'une courbe.

SOLUTION.

Soit AP (Fig. 86.) la hauteur de la descente le long de l'arc AM ; je nomme $AP = x$, $PM = y$, & menant l'ordonnée infiniment proche pm , j'ai $Pp = dx$, $mR = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. La vitesse acquise en M ou en P est donc \sqrt{x} , & cette vitesse pouvant être regardée comme uniforme pendant la descente de l'arc infiniment petit Mm , cet arc est par conséquent le produit de la vitesse \sqrt{x} par le tems employé à le parcourir; ainsi nommant t le tems employé à parcourir AM , nous aurons dt pour le tems employé à parcourir Mm , & par conséquent $Mm = dt\sqrt{x}$, mais $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, donc $dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}$, & $t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}$.

Pour trouver cet intégrale, il faut d'abord prendre dans l'é-

quation de la courbe dont il s'agit, la valeur de dy en dx en cette forte.

Soit AM une parabole dont le parametre $= a$, son équation sera $y^2 = ax$, donc $2ydy = adx$, $dy = \frac{adx}{2y}$, & $dy^2 = \frac{a^2 dx^2}{4y^2}$; Or $yy = ax$, & $4yy = 4ax$, donc $dy^2 = \frac{a^2 dx^2}{4ax}$; ainsi mettant cette valeur de dy^2 dans celle de r , j'ai $r = \int \frac{\sqrt{4axdx^2 + a^2 dx^2}}{\sqrt{4ax} \times \sqrt{x}} = \int \frac{dx\sqrt{4ax + a^2}}{\sqrt{4ax} \times \sqrt{x}} = \int \frac{dx\sqrt{4ax + a^2}}{2x\sqrt{a}} = \int \frac{dx\sqrt{ax + \frac{1}{4}a^2}}{x\sqrt{a}}$.

Pour trouver l'intégrale du second membre je le multiplie par a , ce qui donne $\int \frac{adx\sqrt{ax + \frac{1}{4}a^2}}{x\sqrt{a}}$, & je regarde ce produit comme l'aire d'une courbe, laquelle étant décrite, & son espace étant divisé par a , le quotient sera la valeur de r .

Or puisque a est pris pour l'unité l'aire de la courbe que je cherche se réduit à $\int \frac{dx\sqrt{x + \frac{1}{4}}}{x}$; ainsi son élément est $\frac{dx\sqrt{x + \frac{1}{4}}}{x}$, & son ordonnée $\frac{\sqrt{x + \frac{1}{4}}}{x} = u$.

Je suppose d'abord $u = 0$, ce qui donne $\frac{\sqrt{x + \frac{1}{4}}}{x} = 0$; Or quand une fraction est égale à zero, son dénominateur est infiniment grand, donc $x = \infty$; ainsi prenant le sommet A de la parabole donnée pour l'origine des abscisses de la courbe que je cherche, je vois que le diamètre AP étant plongé à l'infini vers E sera l'asymptote de la courbe.

Je suppose $u = \infty$, ce qui donne $\frac{\sqrt{x + \frac{1}{4}}}{x} = \infty$; or quand une fraction est infinie, son dénominateur est infiniment petit; donc $x = 0$; d'où il suit que la tangente AH au sommet A de la parabole, sera aussi asymptote de la courbe, puisqu'en a nous avons $x = 0$, & $u = \infty$.

Je porte le parametre a de la parabole sur AE plusieurs fois de A en B, de B en C, &c. & supposant $x = B = a = 1$, j'ai $u = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}}{1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$; ainsi menant l'ordonnée Bb que je fais $= \frac{1}{2}\sqrt{5}$, le point b est un point de la courbe.

Je suppose $x = AC = 2$, ce qui donne $u = \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{4}}}{2}$, ou $u =$

$\frac{2+\frac{1}{2}}{4} = \frac{2}{12}$, donc $u = \frac{1}{4}$; faisant donc $Cc = \frac{1}{4}$, le point c est un point de la courbe.

Je suppose $x=3$, ce qui donne $u = \frac{\sqrt{3+\frac{1}{4}}}{3}$, ou $u^2 = \frac{3+\frac{1}{4}}{9} = \frac{13}{36}$, donc $u = \sqrt{\frac{13}{36}}$; faisant donc $Ec = \sqrt{\frac{13}{36}}$, le point e est un point de la courbe.

Je coupe les droites AB, BC, CE, &c. chacune en deux parties égales, & faisant successivement $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, &c. je trouve autant d'autres points de la courbe, & continuant de même, j'en trouverois autant que je voudrois & aussi près que je jugerois à propos.

J'aurois pû trouver la même courbe d'une autre façon; car l'équation étant $u = \frac{\sqrt{x+\frac{1}{4}}}{x}$, j'observe que le second membre est le quatrième terme d'une proportion $x, \sqrt{x+\frac{1}{4}} :: 1, \frac{\sqrt{x+\frac{1}{4}}}{x}$, or le premier terme x est l'abscisse de la parabole donnée, le troisième 1 est son parametre, & le second $\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ est l'ordonnée XP d'une parabole VX dont le Parametre est aussi = 1, mais dont le sommet V est éloigné du sommet A d'une quantité AV = $\frac{1}{4}a = \frac{1}{4}$; car il est visible que VP = AP + AV = $x + \frac{1}{4}$; or par la propriété de la parabole nous avons $PX^2 = AP + AV \times a = ax + \frac{1}{4}a = x + \frac{1}{4}$, donc $PX = \sqrt{x+\frac{1}{4}}$; ainsi prenant une quatrième proportionnelle à AP au parametre & à l'ordonnée PX, cette quatrième proportionnelle PQ étant portée sur PM, le point Q sera un point de la courbe, & continuant à prendre des quatrièmes proportionnelles aux abscisses de la Parabole AM, au parametre & aux ordonnées de la parabole VX correspondantes aux abscisses de la parabole AM, & portant ces quatrièmes proportionnelles sur les ordonnées correspondantes de la parabole AM, on trouvera tous les points de la courbe cherchée.

Il est visible que cette courbe sera la même que la courbe *ecQbu* que nous venons de décrire, car l'abscisse de la parabole AM étant nulle en A, & l'ordonnée correspondante Aa de la parabole VX n'étant pas nulle, on aura $o, a :: Aa, \frac{a \times Aa}{o} = AH$, & par conséquent AH sera infinie, de même les ordonnées de la parabole AM qui sont au-dessous de AB = a , deviennent tou-

B b ij

jours moindres de plus en plus par rapport à leurs abscisses ; car c'est là une propriété de la parabole qui est aisée à découvrir , comme on verra bientôt ; or les ordonnées correspondantes de la parabole VX , quoique plus grandes que celles de la parabole AM , deviendront enfin moindres que les abscisses correspondantes de AM , à cause que les abscisses de AM ne sont jamais moindres que les abscisses de VX que d'une quantité constante qui est $\frac{1}{4}a$; ainsi les abscisses de AM deviendront de plus en plus grandes par rapport aux ordonnées de VX , de sorte qu'à l'infini , l'ordonnée quoi qu'infiniment grande en elle-même , sera cependant infiniment petite par rapport à l'abscisse ; ainsi la proportion $x, a :: \sqrt{x + \frac{1}{4}a}, \frac{a\sqrt{x + \frac{1}{4}a}}{x}$ ou $x, \sqrt{x + \frac{1}{4}a} :: 1, \frac{\sqrt{x + \frac{1}{4}a}}{x}$ se changera $x, 0 :: 1, \frac{0 \times 1}{x}$, & par conséquent $\frac{0 \times 1}{x}$, c'est-à-dire ; l'ordonnée de la courbe sera infiniment petite , & comme cela n'arrivera qu'à l'infini , il s'ensuit que l'axe AE est l'asymptote de la courbe , de même que nous l'avons trouvé par l'autre méthode.

Maintenant pour trouver le tems de la descente d'un corps grave le long de l'arc AM , en supposant la quadrature de la courbe que nous venons de trouver , je fais sur le parametre AB de la parabole un rectangle ABIL égal à l'aire PQWHA , ce qui donne $ABIS = \int \frac{adx\sqrt{x + \frac{1}{4}a}}{x} = \int \frac{adx\sqrt{ax + \frac{1}{4}a^2}}{x\sqrt{a}}$, & divisant par a j'ai AI $= \int \frac{dx\sqrt{ax + \frac{1}{4}a^2}}{x\sqrt{a}} = t$, & par conséquent AI exprime le tems de la descente le long de l'arc AM , & je trouverois de la même façon le rapport des tems le long des autres arcs.

Soit la courbe AM (Fig. 87.) un arc de cycloïde dont le demi-cercle générateur est ANB ; je nomme $AB = a$, $AP = x$, donc $BP = a - x$, & $Pp = Nr = MR = dx$; or par la propriété du cercle , j'ai $NP = \sqrt{AP \times PB}$, donc $NP = \sqrt{ax - x^2}$, & parce que $AP, AN :: AN, AB$, j'ai $\overline{AN} = AP \times AB = ax$, donc $AN = \sqrt{ax}$; je mène du point M la tangente ST à la cycloïde , & par la propriété de cette courbe ST est parallèle à AN ; donc les triangles rectangles PAN , RMm sont semblables , & donnent $AP, AN :: MR, Mm$ ou $x, \sqrt{ax} :: dx, \frac{dx\sqrt{ax}}{x} = Mm$.

Or la vitesse en M étant la même que la vitesse en P est \sqrt{x} , &

cette vitesse pouvant être regardée comme uniforme pendant la descente le long de l'arc Mm , cet arc est donc $Mm = dv \sqrt{x} = \frac{dx \sqrt{ax}}{x}$, d'où je tire $dt = \frac{dx \sqrt{ax}}{x \sqrt{x}}$, & supposant $a=1$, j'ai $dt = \frac{dx}{x}$, ainsi $t = \int \frac{dx}{x}$.

Pour trouver l'intégrale du second membre, je décris une hyperbole équilatère SOZ (Fig. 88.) dont la puissance $Oo=a$, & prenant sur l'asymptote AH une abscisse AP égale à AP (Fig. 87.), je mène l'ordonnée PS (Fig. 88.), ainsi j'ai $AP \times PS = \overline{Oo}^2$, donc $PS = \frac{\overline{Oo}^2}{AP} = \frac{aa}{x}$, je mène l'ordonnée infiniment proche ps , ce qui donne $Pp = dx$, donc $PSps = \frac{aadx}{x}$, ainsi l'espace hyperbolique $AVuPS = \int \frac{aadx}{x}$ ou $\int \frac{dx}{x}$, & divisant par $a=1$, j'ai $\int \frac{dx}{x} = t$.

Si je divise la hauteur AB en petites parties (Fig. 87.), & que des points de division je mène des ordonnées à la cycloïde, j'aurai différens arcs At , AM , AV , &c. & transportant leurs abscisses sur Ao (Fig. 88.) j'aurai autant d'espaces hyperboliques $ARuV$, $APsuV$, $AQquV$, &c. lesquels divisés par $a=1$ seront comme les tems des descentes le long des différens arcs de la cycloïde; or que ces espaces soient divisés par la même quantité ou qu'ils ne le soient pas, ils sont toujours en même raison, donc ces espaces seront comme les tems des descentes, mais ces espaces sont les logarithmes des abscisses AR , AP , AQ , &c. ainsi que nous l'avons démontré dans le *Calcul différentiel & integral*, donc les tems des descentes le long des différens arcs de la cycloïde, sont entr'eux comme les logarithmes des hauteurs de ces arcs.

R E M A R Q U E.

218. J'ai dit que dans une parabole (Fig. 89.) les ordonnées qui étoient au-dessous de l'abscisse AD égale au parametre devenoient moindres de plus en plus à l'égard de leurs abscisses, & que cela étoit facile à prouver; mais si quelqu'un en souhaite la démonstration, la voici.

Du sommet A je mène la tangente AO , & je divise l'angle droit FAO en deux parties égales par la droite AI ; du point I où cette droite coupe la parabole, je mène l'ordonnée DI qui fait avec

l'abscisse AD, & la droite AI un triangle rectangle AID isoscele; car l'angle DAI étant demi-droit, par la construction l'angle DIA doit être aussi demi-droit; ainsi $DA = DI$, & $\overline{DA} = \overline{DI}$, mais par la propriété de la parabole $\overline{DI} = DA \times p$, & nous avons $\overline{DI} = DA \times DA$, donc $DA \times p = DA \times DA$, & par conséquent $p = DA$, ainsi quand DA est égale au parametre l'ordonnée DI est égale à l'abscisse DA.

Je divise le diametre AF en plusieurs parties moindres que AD, & des points de division je mene des ordonnées dont les unes sont entre A & D, & les autres en dessous de D; il est visible que chaque ordonnée qui est entre A & D est plus grande que son abscisse, car la droite AI étant une corde de la parabole est toute entiere dans la parabole, ainsi les parties Bo, CP, &c. des ordonnées BG, CH, &c. sont moindres que ces ordonnées; mais à cause des triangles semblables ADI, ACP, &c. nous avons $AD, DI :: AC, CP$, donc à cause de $AD = DI$, nous avons $AC = CP$; ainsi CP étant moindre que l'ordonnée CH, l'abscisse AC est par conséquent moindre que l'ordonnée, & on prouvera la même chose à l'égard des autres ordonnées qui sont entre A & D, cependant quoique leurs abscisses soient toujours moindres que les ordonnées, on prouvera qu'elles deviennent peu à peu plus grandes par rapport à leurs ordonnées jusqu'à l'abscisse AD qui est égale à son ordonnée, car par la propriété de la parabole les abscisses sont comme les quarrés des ordonnées, & par conséquent le rapport que les abscisses ont entr'elles étant plus grand que celui des ordonnées, il s'ensuit nécessairement que les abscisses deviennent peu à peu plus grandes par rapport aux ordonnées.

Maintenant je prolonge la droite AI à l'infini en R, & sa partie IR est toute hors de la parabole, ce que je prouve ainsi. Je fais $AO = AD = DI$, & menant la droite OV, cette droite est un diametre de la parabole puisqu'elle est parallele à l'axe AD, à cause des paralleles égales AO, DI; donc sa partie IV tombe dans la parabole & dans le triangle ARF, donc FV est moindre que FR, EI moindre que EQ, &c. or par la propriété de la parabole $\overline{EL} = AE \times AO = AE \times EI$, & $AE \times EQ$, est plus grand que $AE \times EI$, à cause de EQ plus grand que EI, donc $AE \times EQ$ est plus grand que \overline{EL} , mais à cause des triangles semblables

ADI, AEQ, nous avons $AE = EQ$, donc $EQ \times EQ = \overline{EQ}^2$, est plus grand que \overline{EL}^2 , donc EQ est plus grand que EL, & on prouvera de même que FR est plus grand que FM &c. d'où il suit que la droite IR est toute hors de la parabole, & que les ordonnées EL, FM, &c. étant moindres que les droites EQ, FR, &c. sont aussi moindres que leurs abscisses AE, AF, &c. & de plus ces abscisses deviennent plus grandes de plus en plus par rapport à leurs ordonnées, parce qu'elles sont entr'elles comme les quarrés des ordonnées, & par conséquent en raison doublée des ordonnées, ce qui fait qu'elles augmentent plus vite que les ordonnées, donc, &c.

PROPOSITION LXXIII.

219. Deux points A, M, étant donnés (Fig. 90.) trouver une courbe le long de laquelle un corps grave parvienne de A en M plus vite que le long de tout autre courbe.

*ce Probleme est
pas un fontaine.
bien facile et par
methode.*

SOLUTION.

Je mene les trois ordonnées infiniment proche PM, pm , Qn; je tire les perpendiculaires MR, mO , & la perpendiculaire nS sur pm prolongée; je nomme $AP = x$, $PM = y$, donc $Pp = pQ = MR = mO = nS = dx$, $mR = dy$, & $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; je nomme $RS = b$, ainsi $mS = RS - mR = b - dy$, & $mn = \sqrt{mS^2 + nS^2} = \sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}$.

L'arc Mm étant infiniment petit, la vitesse du corps pendant la descente de cet arc peut être prise pour uniforme, & par conséquent elle est la même que la vitesse acquise en M ou en P (N. 200.) que je nomme $= c$, de même la vitesse pendant la descente de l'arc mn pouvant être prise pour uniforme, est la même que la vitesse acquise à la fin de l'arc Am ou de la hauteur Ap, & je la nomme C, enfin je nomme $= t$ le tems de la descente le long de l'arc AM, ce qui donne dt pour le tems de la descente le long de Mm.

Dans le mouvement uniforme l'espace est comme le produit du tems par la vitesse (N. 17.), donc $Mm = cdt$, mais nous avons $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, donc $cdt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ & $dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{c}$; de même l'espace $mn = C \times dt$, or nous avons $mn = \sqrt{bb - 2bdy}$

$+ dy^2 + dx^2$, donc $Cdt = \sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}$ & $dt = \frac{\sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}}{C}$, mais le tems le long de l'arc Mn est égal au tems dt de la descente le long de Mn , & au tems de la descente le long de mn , donc $2dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{c} + \frac{\sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}}{C}$.

Or $2dt$ doit être le moindre tems que le corps grave puisse employer à parcourir l'arc Mn , donc en suivant les regles que nous avons enseignées touchant les plus grandes & les moindres quantités, je prens la différence de la dernière équation, laquelle est en supposant les dx constantes $2ddt = \frac{dyddy}{c\sqrt{dx^2 + dy^2}}$

$+ \frac{dyddy - bddy}{C\sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}}$; mais selon la même regle $2ddt = 0$, donc le second membre de cette équation est aussi égal à zero, & divisant par ddy , j'ai $\frac{dy}{c\sqrt{dx^2 + dy^2}} + \frac{dy - b}{C\sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}} = 0$,

d'où je tire $\frac{dy}{c\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{b - dy}{C\sqrt{bb - 2bdy + dy^2 + dx^2}}$, ou $\frac{mR}{c \times Mm} = \frac{mS}{C \times mn}$; ainsi j'ai mR, mS , ou $On :: c \times Mm, C \times mn$, ou $\frac{mR}{c} :: \frac{mS}{C}$,

$\frac{On}{C} :: Mm, mn$, ou enfin $C \times mR, c \times On :: Mm, mn$, c'est-à-dire, les arcs infiniment petits Mm, mn , sont en raison composée de la raison droite des différences mR, On des ordonnées correspondantes & de la raison reciproque des vitesses.

Que si nous supposons $Mm = mn$, c'est-à-dire, les $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ constantes, nous aurons $C \times mR = c \times On$; donc $mR, On :: c, C$, c'est-à-dire en supposant les arcs infiniment petits égaux entre eux, les différences mR, On des ordonnées sont comme les vitesses.

Supposons donc que les $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ soient constantes, & que le rapport constant des dy aux vitesses soit exprimé par Mm, a , & nommant la vitesse $= u$, nous aurons $dy, u :: \sqrt{dx^2 + dy^2}, a$, donc $ady = u\sqrt{dx^2 + dy^2}$, & élevant tout au quarré, puis retranchant de part & d'autre $u^2 dy^2$, ensuite divisant par $a^2 - u^2$, & tirant la racine quarrée du quotient, j'ai dy

$$= \frac{u dx}{\sqrt{a^2 - u^2}}.$$

Maintenant u étant la vitesse acquise en M ou en P est \sqrt{x} , donc u^2

$x^2 = x$; & mettant ces valeurs de u , & de u^2 , dans la valeur de dy , j'ai $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{ax-xx}}$, & multipliant le numerateur & le dénominateur par \sqrt{x} ; puis prenant a pour l'unité, j'ai $dy = \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}}$.

Or $\frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}}$ est la différence entre $\frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ & $\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-xx}}$, car si de la premiere de ces grandeurs on retranche la seconde, le reste est $\frac{2xdx}{2\sqrt{ax-xx}}$, donc j'ai comme on voit une expression de dy dont l'integrale est composée de deux parties $\int \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}} - \int \frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-xx}}$; mais

la seconde $-\int \frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-xx}} = -\sqrt{ax-xx}$, donc j'ai $y = \int \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}} - \sqrt{ax-xx}$; or $\sqrt{ax-xx}$ est l'ordonnée PN d'un demi-cercle dont le diametre AV = a , car puisque AP = x , donc PV = $a-x$, & par la propriété du cercle, j'ai $\overline{PN}^2 = AP \times PV = ax-xx$, donc PN = $\sqrt{ax-xx}$, de même $\int \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ est l'arc AN, car menant du point N le rayon NZ & la tangente Tt, les triangles NFZ, NLn, sont semblables comme nous l'avons déjà démontré plus haut en deux ou trois occasions; donc NP, NZ :: NL, Nn ou $\sqrt{ax-xx}$, $\frac{1}{2}a :: dx$, $\frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}} = Nn$; or Nn est la différence de l'arc AN, donc $\int \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ est l'arc AN; puis donc que nous avons $y = \int \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}} - \sqrt{ax-xx}$, il s'ensuit que PM = $y = AN - PN$.

$$dy, u :: \sqrt{dx^2 + dy^2}, a$$

$$ady = u \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$a^2 dy^2 = u^2 dx^2 + u^2 dy^2$$

$$a^2 dy^2 - u^2 dy^2 = u^2 dx^2$$

$$dy^2 = \frac{u^2 dx^2}{a^2 - u^2}$$

$$dy = \frac{u dx}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

$$dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a^2 - x}}$$

$$dy = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 x - x^2}}$$

$$dy = \frac{xdx}{\sqrt{ax - xx}}$$

$$dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}} - \frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-xx}}$$

$$y = \int \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}} - \int \frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-xx}}$$

$$y = \int \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}} - \sqrt{ax-xx}$$

Il ne s'agit donc que de trouver la grandeur $AV = a$ pour pouvoir décrire la courbe demandée, & c'est ce que nous trouverons dans la Proposition suivante, en conséquence de quelques réflexions que nous allons faire sur cette courbe.

Prenons une demi-cycloïde (Fig. 91.) & que la hauteur AP , de l'arc AM soit égale à la hauteur AP de l'arc AM demandée (Fig. 90.), la droite MH (Fig. 91.) est égale à l'arc HB , & la base $AC = PM + MH + HD = \text{arc } BH + \text{arc } HC$; retranchant donc d'une part MH , & de l'autre l'arc $BH = MH$, nous aurons $PM + HD = \text{arc } HC$, donc $PM = \text{arc } HC - HD$, c'est-à-dire dans la cycloïde les ordonnées PM de la partie extérieure $AQBM$ sont égales aux arcs correspondans CH moins les sinus correspondans HD ; mais dans la courbe que nous cherchons (Fig. 90.) les ordonnées PM sont égales aux arcs correspondans AN d'un demi-cercle dont le diamètre $= a$ moins le sinus correspondant PN ; donc cette courbe est une cycloïde, & il ne s'agit que de trouver le diamètre $= a$, ce que nous allons faire dans la Proposition suivante.

220. Dans la cycloïde (Fig. 91.) nous avons $PM = CH - HD$, & multipliant tout par la moitié du rayon, ou par $\frac{1}{2}HO$, nous avons $PM \times \frac{1}{2}HO = CH \times \frac{1}{2}HO - HD \times \frac{1}{2}HO$, mais $CH \times \frac{1}{2}HO$, est le secteur CHO , & $HD \times \frac{1}{2}HO$, ou $HD \times \frac{1}{2}CO$ est le triangle CHO , donc $PM \times \frac{1}{2}HO$ est égal au secteur CHO moins le triangle CHO , c'est-à-dire $PM \times \frac{1}{2}HO$ est égal au segment HC , ce qui est digne de remarque.

PROPOSITION LXXIV.

221. Deux points A, M , (Fig. 92.) étant donnés sur un plan perpendiculaire à l'horizon, décrire une demi-cycloïde AMH dont la base horizontale AG passe par l'un de ces points A , & dont la courbe passe par les deux points A, M .

SOLUTION.

Du point A , j'abaisse AR perpendiculaire à l'horizon, & je mène AG perpendiculaire à AR ; ainsi la base de la demi-cycloïde demandée sera sur AG . Je prens un demi-cercle quelconque BEC , & prenant sur AG une partie AB égale à la demi-circonférence BEC , je mets le diamètre BC perpendiculairement sur le point B , & je décris une demi-cycloïde CDA , je joins les points donnés A, M , par la droite AM qui coupe la

semi-cycloïde CDA en D, & je fais AD, AM :: BC est à un quatrième terme GH, lequel est le diamètre du demi-cercle générateur de la demi-cycloïde cherchée; faisant donc AG égal à la circonférence de ce demi-cercle, & mettant le diamètre perpendiculairement en G, je décris la demi-cycloïde HMA qui passe par les points donnés A, M.

DEMONSTRATION.

Par les points D, M, je mene les droites Sf, TI parallèles à AG; par la propriété de la cycloïde CDA, j'ai $DE = CE$, & $SD = BE - EF$ (N. 219.) ainsi il faut que je démontre que $MP = HP$, & $TM = GP - PI$.

A cause des parallèles AG, Sf, TI, nous avons AD, AM : Gf, ou BF, GI, mais par la construction AD, AM :: BC, GH, donc BF, GI :: BC, GH, ainsi les diamètres BC, GH sont coupés proportionnellement en F & en I, or les cercles BEC, GPH étant semblables, & les droites BF, GI proportionnelles aux diamètres, il est visible que les droites FC, IH sont aussi proportionnelles de même que les sinus EF, PI, & aussi les arcs BE, GP, de même que les arcs EC, PH.

Maintenant des points C, H, je mene les droites CO, HR parallèles à AG, & prolongeant AM en V, la figure AOCB est semblable à la figure AVHG, car AM, MV :: GI, IH :: BF, FC :: AD, AO; de plus AB, BC :: AG, GH, ainsi abaissant les perpendiculaires Oo, Vu sur AG, on aura Ao, oO, ou BC :: Au, uV, ou GH, ou Ao, BC :: Au, GH, mais AB, BC :: AG, GH, donc Ao, AB :: Au, AG, & $AB - Ao, AB :: AG - Au, AG$, c'est-à-dire Bo, AB :: Gu, AG, ou CO, AB :: HV, GA; on prouvera de même que FD, AB :: IM, AG, ou FD, IM :: AB, AG :: BC, GH :: EF, PI.

Puis donc que FD, IM :: EF, PI ou FD, EF :: IM, PI, donc DE, EF, MP, PI, ou EF, PI :: DE, MP; mais EF est à PI comme l'arc EC est à l'arc PH, & la droite DE est égal à l'arc EC, donc EF, PI :: DE, ou l'arc EC, MP, ou l'arc PH; ainsi MP étant égal à l'arc PH, le point M est un point de la cycloïde HMA, & par conséquent cette cycloïde passe par les points donnés.

Que si M est un point de la cycloïde, il est visible par la propriété de cette courbe que nous avons découverte dans la Proposition précédente que TM est égal à l'arc GP moins le sinus PI.

PROPOSITION LXXV.

222. La hauteur AD (Fig. 93.) dont un corps doit descendre étant connue, trouver une courbe TMN de telle nature que si le corps parvenoit au point T ou au point M ou au point N, le tems de la descente AT, ou AM, ou AN, &c. fut toujours le même, & le moindre qu'il peut employer.

SOLUTION.

Tirez AS perpendiculaire à AD, & décrivez des demi-cycloïdes EA, HA, RA, &c. dont les diametres FE, IH, SR, &c. aillent en augmentant insensiblement; plus vous décrirez de demi-cycloïdes, plus vous aurez de points de la courbe cherchée, en observant que les différences des diametres soient fort petites.

Prenez sur la premiere demi-circonférence FE l'arc FG moyen proportionnel entre la hauteur donnée AD, & le diametre FE, & menez GT parallele à AF, le point T où cette parallele coupe la demi-cycloïde, sera un point de la courbe cherchée.

De même prenez sur la seconde demi-circonférence l'arc IO moyen proportionnel entre la hauteur donnée AD & le diametre IH, & menez OM parallele à AI, le point M où cette parallele coupe la demi-cycloïde HA sera un point de la courbe.

Et faisant la même chose à l'égard des autres demi-cycloïdes, vous trouverez les points de la courbe cherchée Td.

DEMONSTRATION.

Par la construction nous avons $AD, FG :: FG, FE$, donc $\overline{FG}^2 = AD \times FE$, & $FG = \sqrt{AD} \times \sqrt{FE}$, & multipliant par \sqrt{FE} , nous avons $FG \times \sqrt{FE} = FE \times \sqrt{AD}$, & divisant par FE, nous avons $\frac{\sqrt{FE}}{FE} FG = \sqrt{AD}$, mais (N. 216.) nous avons $\frac{\sqrt{FE}}{FE} 2FG$ égal au tems de la descente le long de l'arc AT, donc ce tems $t = \frac{\sqrt{FE}}{FE} 2FG = 2\sqrt{AD}$.

De même, nous avons par la construction $AD, IO :: IO, IH$, donc $\overline{IO}^2 = AD \times IH$, & $IO = \sqrt{AD} \times \sqrt{IH}$, & multipliant par \sqrt{IH} , puis divisant par IH, nous avons $\frac{\sqrt{IH}}{IH} \times IO = \sqrt{AD}$, ou $\frac{\sqrt{IH}}{IH} \times 2IO = 2\sqrt{AD}$; mais par le même nombre

cité, le tems de la descente le long de l'arc AM est $\frac{\sqrt{IH}}{IH}$ $\times 2IO$, donc ce tems est le même que le précédent, l'un & l'autre étant égaux à $2\sqrt{AD}$, & on prouvera la même chose à l'égard des autres demi-cycloïdes.

$2\sqrt{AD} = \frac{2\sqrt{AD} \times \sqrt{AD}}{\sqrt{AD}} = \frac{2AD}{\sqrt{AD}} = \frac{AD}{\frac{1}{2}\sqrt{AD}}$. Or $\frac{1}{2}\sqrt{AD}$ est la moitié de la vitesse acquise en D, & si le mouvement du corps étoit uniforme, le corps avec la vitesse uniforme $\frac{1}{2}\sqrt{AD}$ parcoureroit l'espace AD dans un tems égal à celui qu'il employe à le parcourir avec son mouvement accéléré, donc l'espace $AD = t \times \frac{1}{2}\sqrt{AD}$, & par conséquent $t = \frac{AD}{\frac{1}{2}\sqrt{AD}} = 2\sqrt{AD}$; or les tems employés à parcourir les arcs AT, AM, AN sont tous égaux à $2\sqrt{AD}$, donc ils sont égaux au tems de la descente le long de AD.

Les arcs AT, AM, AN, &c. étant des arcs de cycloïde, le corps va plus vite de l'une à l'autre de leur extrémités, que par toute autre courbe, donc le corps parvient à un point quelconque de la courbe Td par le tems le plus court.

R E M A R Q U E.

223. Jamais la courbe Td ne touchera ni ne coupera la droite AD, car quand on décriroit une infinité de demi-cycloïdes, elles ne toucheront jamais la droite AD qu'au point A, ainsi les droites GT, OM, LN, &c. dont les extrémités déterminent les points T, M, N, &c. de la courbe Td ne parviendront jamais au point D.

En second lieu, le diamètre de la moindre cycloïde qui peut servir à la description de la courbe ne peut être gueres moindre que $\frac{4}{3}AD$, car $\frac{4}{3}AD$ multiplié par AD donne $\frac{4}{3}AD^2$, & tirant la racine quarrée, on a $\frac{2}{3}\sqrt{AD}$ pour la moyenne proportionnelle entre AD, & $\frac{4}{3}AD$, mais $\frac{2}{3}\sqrt{AD}$, ou $\frac{4}{3}AD$ est à $\frac{4}{3}AD$, comme 6 à 4, ou comme 3 à 2, & la circonférence d'un demi-cercle est à peu près à son diamètre comme 3 à 2, donc la moyenne proportionnelle entre AD & le diamètre $\frac{4}{3}AD$ est presque égale à la demi-circonférence, or l'arc moyen proportionnel entre AD & le diamètre de la cycloïde doit être moindre ou tout au plus égal à la demi-circonférence pour pouvoir déterminer un point de la courbe que nous cherchons; & il est visible qu'à mesure qu'on

prendroit des diametres moindres que $\frac{1}{2}AD$, les arcs moyens proportionnels deviendroient plus grands par rapport à ces diametres, donc, &c.

En troisième lieu, la courbe que nous cherchons approche de plus en plus de AD, & ne la touche jamais, donc AD est son asymptote, & la convexité de cette courbe est tournée du côté de AD; & pour prouver cette dernière conséquence, il n'y a qu'à faire attention qu'à mesure que les diametres augmentent les arcs FG, IO, SL, &c. moyens proportionnels entre AD & les diametres deviennent moindres par rapport à ces diametres, qu'ainsi les arcs restans GE, OH, LR, &c. deviennent plus grands, & que par conséquent les droites GT, OM, LN, &c. devenant plus grandes, il faut nécessairement que leur extrémités N, M, T, &c. approchent davantage de AD.

PROPOSITION LXXVI.

224. *Un Pont levis AB étant donné (Fig. 94.) tournant librement autour de A, trouver une courbe de telle nature que si un corps M mis à l'extrémité M d'une corde qui tient au pont par l'autre bout, vient à être mis sur un point quelconque de cette courbe, le pont & le corps soient toujours en équilibre.*

SOLUTION.

La direction de la pesanteur absolue du pont étant perpendiculaire à l'horizon est par conséquent parallèle à CA, ainsi achevant le parallélogramme BCcA, & concevant que la pesanteur absolue soit représentée par la droite CA, elle équivaldra à deux forces représentées par les droites BC, Cc, qui ont les directions BC, Cc, (N. 130.) c'est-à-dire que si une puissance faisoit parcourir un espace CA à un corps pendant un certain tems, & que deux autres puissances pendant le même tems pussent faire parcourir au même corps, l'une l'espace BC, l'autre l'espace Cc, ces deux dernières jointes ensemble ne feroient pas plus que la première route seule; or la force Cc étant parallèle au pont n'agit point sur lui, donc la force BC toute seule est en équilibre avec le poids M, donc la pesanteur absolue du pont étant représentée par AC, la puissance qu'il faudroit mettre au lieu du pont au point B, que nous supposons être le centre de gravité du pont, pour être en équilibre avec le poids M, est représentée par la droite BC.

De même la pesanteur absolue de M agit selon une direction perpendiculaire à l'horizon qui est par conséquent parallèle à CK, & ce corps agit sur la courbe AN selon la direction MK perpendiculaire à la courbe, & sur le pont selon la direction MC, ainsi achevant le parallélogramme CMK_o, & supposant que CM exprime l'effort que le corps M fait pour être en équilibre avec le pont, & MK ou C_o l'effort qu'il fait sur la courbe ; la diagonale CK exprimera la pesanteur absolue de M, puisque CK équivaut aux deux puissances CM, C_o.

Maintenant supposant que la pesanteur absolue CK soit = b , nous aurons CK, $b :: CM, CB$; car la force CM étant en équilibre avec la force CB, ces deux forces sont égales de même que CK = b ; ainsi menant MP perpendiculaire à CK, & nommant CP = x , PM = y , BC + CM = a , le triangle rectangle CMP donne $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + y^2$, donc $CM = \sqrt{x^2 + y^2}$, & $BC = BC + CM - CM = a - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Je mène pm infiniment proche de PM, & du point M la tangente MT à la courbe CN, & la perpendiculaire MR, ce qui donne les triangles semblables mRM , MPT, mais les triangles MPT, KPM, sont aussi semblables, donc mRM est semblable à KPM, & par conséquent MR, R $m :: PM, PK$, ou $dx, dy :: y, \frac{ydy}{dx} = PK$; donc $CK = CP + PK = x + \frac{ydy}{dx} = \frac{xdx + ydy}{dx}$, donc puisque j'ai CK, $b :: CM, CB$, j'ai aussi les expressions analytiques qu'on voit ici, & multipliant la première raison par dx , puis faisant le produit des extrêmes & celui des moyens, ensuite divisant par $\sqrt{x^2 + y^2}$, enfin tirant l'intégrale, j'ai l'équation $bx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$ qui est l'équation de la courbe demandée.

$$\frac{xdx + ydy}{dx}, b :: \sqrt{x^2 + y^2}, a - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$xdx + ydy, bdx :: \sqrt{x^2 + y^2}, a - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$bdx\sqrt{x^2 + y^2} = axdx + aydy - xdx\sqrt{x^2 + y^2} - ydy\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$bdx = \frac{axdx + aydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - xdx - ydy.$$

$$bx = a\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

$$bx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Pour construire cette courbe je prolonge CM en D, faisant MD = BC, & par conséquent j'ai CD = BC + CM = a, du centre C je décris avec le rayon CD un demi-cercle FDE, & je mène une ordonnée DG que je nomme = z, donc $\overline{GD} = \overline{CD} - \overline{CG}$, $a^2 - z^2$, & $GD = \sqrt{a^2 - z^2}$; les triangles semblables CGD, CPM donnent CG, CD :: CP, CM, ou z, a :: x, CM, donc $z \times CM = ax$, & $x = \frac{z \times CM}{a}$.

Les mêmes triangles donnent CD, DG :: CM, PM, ou a, $\sqrt{aa - zz}$:: CM, y; donc $ay = CM \times \sqrt{aa - zz}$, & $y = \frac{CM \sqrt{aa - zz}}{a}$.

Substituant donc dans l'équation les valeurs de x & de y que nous venons de trouver, nous aurons l'équation qu'on voit ici.

Et divisant par CM, puis ôtant de part & d'autre $\frac{bz}{a}$, & enfin multipliant tout par z, on aura CM

$$= 2a - \frac{2bz}{a}.$$

$$\frac{bz \times CM}{a} + \frac{z^2 \times \overline{CM}^2}{2a^2} + \frac{a^2 \times \overline{CM}^2 - z^2 \times \overline{CM}^2}{2a^2} = a \times CM$$

$$\frac{bz}{a} + \frac{z^2 \times CM}{2a^2} + \frac{a^2 \times CM - z^2 \times CM}{2a^2} = a$$

$$\frac{bz}{a} + \frac{a^2 \times CM}{2a^2} = a$$

$$\frac{CM}{2} = a - \frac{1}{2} \frac{bz}{a}$$

$$CM = 2a - \frac{bz}{a}$$

Il n'y a donc

pour décrire la courbe qu'on demande qu'à décrire le demi-cercle EDF avec un rayon CE égal à la longueur BC + CM de la corde attachée au pont & au poids M, puis du centre C mener des rayons CD aux points de la circonférence, & de ces points tirer des ordonnées DG, après quoi prenant une quatrième proportionnelle au rayon CD ou à la longueur de la corde, au double de la ligne b qui exprime le poids absolu de M, & à l'ordonnée z, cette quatrième proportionnelle sera $\frac{2bz}{a}$, c'est pourquoi retranchant cette proportionnelle de la grandeur 2a du diamètre, on aura $2a - \frac{2bz}{a} = CM$, & par conséquent le point M sera un point de la courbe, & faisant la même chose sur les autres rayons, on trouvera tant de points de la courbe que l'on voudra.

Mais comment trouver une ligne qui exprime la pesanteur absolue

absolue du poids M ? le voici : cherchez la longueur qu'il faut donner à la corde, c'est-à-dire, mettez le pont dans une situation horizontale, & mesurez la distance du point B où il doit être attaché au point C qui est un trou dans la muraille par où cette corde doit passer pour être attachée au poids M ; supposant donc que cette distance soit six toises, concevez que la pesanteur absolue du pont soit représentée par une ligne de six toises, il est visible que si le poids M pèse autant que le pont, sa pesanteur absolue sera représentée par la ligne de six toises ; que s'il ne pèse que la moitié de ce que pèse le pont, sa pesanteur absolue sera représentée par une ligne de trois toises, que s'il pèse le double de ce que pèse le pont, sa pesanteur absolue sera représentée par une ligne de douze toises, &c.

voir page 18

Pour revenir à la courbe, si $a=b$, on aura $CM = 2a - 2z = 2GE$, c'est-à-dire, que si le poids M pèse autant que le pont, CM sera double de GE.

Quand CM devient $CN=a$, on a $CM=a=2a - \frac{2bz}{a}$, & retranchant a de part & d'autre, on aura $a - \frac{2bz}{a} = 0$, donc $a = \frac{2bz}{a}$, d'où je tire $z = \frac{a^2}{2b}$, c'est-à-dire que quand la courbe coupe la circonférence du cercle, l'abscisse z est troisième proportionnelle à $2b$ & au rayon CE.

Si on mène une tangente MT à un point quelconque M de la courbe CMN, les triangles semblables MR m , TPM donnent mR , RM :: PM, PT, ou $dy, dx :: y, \frac{ydx}{dy} = PT$ soutangente ; or nous avons trouvé ci-dessus l'équation qu'on voit ici.

$$b dx = \frac{ax dx + ay dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x dx - y dy.$$

$$b dx + x dx = \frac{ax dx + ay dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y dy.$$

$$\overline{b dx + x dx} \times \sqrt{x^2 + y^2} = ax dx + ay dy - y dy \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\overline{b dx + x dx} \times \sqrt{x^2 + y^2} - ax dx = ay dy - y dy \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$dx = \frac{ay dy - y dy \sqrt{x^2 + y^2}}{b + x \sqrt{x^2 + y^2} - ax}.$$

$$\frac{y dx}{dy} = \frac{ay^2 - y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{b + x \sqrt{x^2 + y^2} - ax}.$$

.D d

Et ajoutant $x dx$ de part & d'autre, puis multipliant par $\sqrt{x^2 + y^2}$, puis retranchant $ax dx$, & enfin divisant par $b + x\sqrt{x^2 + y^2} - ax$, je trouve une valeur de dx , laquelle étant substituée dans $\frac{y dx}{dy}$, donne l'expression qu'on voit ici.

Or quand CM devient CN = a , on a $\sqrt{x^2 + y^2} = a$, mettant donc cette valeur de $\sqrt{x^2 + y^2}$ dans l'expression de $\frac{y dx}{dy}$ que nous venons de trouver, nous aurons comme on voit ici une autre expression de $\frac{y dx}{dy}$, laquelle est égale à zero, c'est-à-dire, que quand CM devient égal au rayon du cercle, la soutangente devient nulle, & l'ordonnée est tangente de la courbe en N; ainsi le point N de la courbe est le point le plus bas; donc s'il ne s'agit que de trouver la courbe nécessaire pour les différentes élévations qu'on veut donner au pont à commencer depuis la position horizontale jusqu'à la verticale; l'arc CN suffit pour cela.

Quand le pont étant dans une situation horizontale (Fig. 95.) la distance BC est égale à toute la longueur de la corde, on a $BC = a$, or s'il arrive alors qu'on ait $b = a$, c'est-à-dire si la pesanteur absolue du poids M est égale à la pesanteur absolue du pont, l'arc CN de la courbe répond aux différentes positions du pont depuis l'horizontale jusqu'à la verticale, car 1°. Le pont étant dans la situation horizontale, le poids est nécessairement en C, & quand le pont est vertical, la corde CN est égale à BC, mais BC est égal au rayon du demi-cercle, donc CN est aussi égal au rayon, & par conséquent le poids M se trouve au point N qui coupe la circonférence; donc ce poids à parcouru tous les points de l'arc CMN, depuis la situation horizontale du pont jusqu'à la verticale.

Quand le pont étant dans une situation horizontale, la distance BC est égale à toute la longueur de la corde, la pesanteur absolue du poids M peut être ou égale ou plus grande que la pesanteur absolue du pont; mais elle ne sauroit être moindre, car dans ce cas le poids M étant nécessairement en C, on a $CM = 0$, mais $CM = 2a - \frac{1}{2}x$, donc il faut qu'on ait $2a - \frac{1}{2}x = 0$; or pour que cela soit, il faut que $\frac{1}{2}x$ soit égal à $\frac{1}{2}x$, afin qu'on ait $2a$

— $\frac{1+z}{a} = 0$; supposant donc $b = a$, & mettant cette valeur de b dans $2a - \frac{1+z}{a} = 0$, on aura $2a - \frac{1+z}{a} = 0$, ce qui fait voir qu'alors on doit avoir $z = a$; or on a $z = a$ lorsque le rayon sur lequel on détermine CM est le rayon CE, donc b peut être égal à a . En second lieu supposant b plus grand que a , il est visible qu'afin qu'on ait $\frac{1+z}{a} = \frac{1+a}{a}$, il faut que z soit moindre que a ; or z peut être moindre que a , donc aussi b peut être supposé plus grand que a . En troisième lieu supposant b moindre que a , il est encore visible qu'afin qu'on ait $\frac{1+z}{a} = \frac{1+a}{a}$, il faut que z soit plus grand que a , mais z étant une abscisse du demi-cercle, & l'origine de ces abscisses commençant au centre, il n'est pas possible que z soit plus grand que a , donc il n'est pas possible aussi que b soit moindre que a .

Quand le pont étant dans une situation horizontale la distance BC est moindre que la corde BCM, alors l'arc MN répond à toutes les positions du pont depuis l'horizontale jusqu'à la verticale, car quand le pont est horizontal le poids est en M, & quand il est dans la verticale, la corde CN est égale à la corde BCM, & par conséquent au rayon du cercle, ainsi le poids se trouve au point N où la courbe coupe la circonférence.

Quand le pont étant dans une situation horizontale (Fig. 95.) la distance BC est moindre que la corde BCM, la pesanteur absolue du poids peut être ou égale, ou plus grande, ou moindre que la pesanteur absolue du pont; car en premier lieu, si l'on suppose que la pesanteur absolue du poids soit ou égale ou plus grande que a , & que le pont soit descendu plus bas qu'il n'est dans la situation horizontale, de façon qu'on ait $CM = 0$, on aura aussi $2a - \frac{1+z}{a} = 0$, & par conséquent il faudra que $\frac{1+z}{a}$ soit $= \frac{1+a}{a}$, ainsi on aura z ou égal ou moindre que a , & cela est possible. En second lieu, si on suppose que la pesanteur absolue du poids soit moindre que a , on ne peut pas supposer $CM = 0$, parce qu'il faudroit pour cela que $\frac{1+z}{a} = \frac{1+a}{a}$, & que par conséquent l'abscisse z fût plus grande que le rayon, ce qui n'est pas possible; ainsi dans ce cas la courbe CMN ne passera pas par le centre du cercle; mais pourvu que b soit plus grand que $\frac{1}{2}a$ on trouvera toujours un point entre le centre C & l'extrémité E du

rayon CE, qui sera le point où la courbe coupera le rayon; car supposant que le rayon qui doit déterminer CM soit le rayon CE, on aura $z = CE = a$, & mettant cette valeur de z dans $CM = 2a - \frac{z^2}{a}$, on aura $CM = 2a - \frac{a^2}{a} = 2a - a = a$, ainsi le poids M sera en un point K éloigné du centre C de la quantité $2a - 2b$, laquelle sera moindre que $CE = a$, en supposant que b est plus grand que $\frac{1}{2}a$, ce qui fait voir qu'on ne peut faire b moindre que $\frac{1}{2}a$ de la valeur $\frac{1}{2}a$, parce que le poids M qui soutient le pont en équilibre dans ses différentes positions depuis l'horizontale jusqu'à la verticale, doit nécessairement descendre le long de KN jusqu'au point N de la circonférence, ce qui ne sauroit être si CK devenoit aussi grand que CE.

Jusqu'ici nous n'avons décrit que la partie de la courbe qui est nécessaire pour tenir le pont en équilibre dans ses différentes situations; maintenant pour en mieux découvrir les propriétés faisons abstraction du pont & du poids, & considérons la courbe en elle-même comme produite par les parties $CM = 2a - \frac{z^2}{a}$ qu'on auroit prises sur tous les rayons d'un demi-cercle, en supposant deux droites données a, b , dont la seconde b seroit ou égale, ou moindre, ou plus grande que a , & que les z fussent les abscisses correspondantes aux ordonnées du demi-cercle menées des extrémités des rayons, de sorte que les z , à compter depuis le centre C jusqu'à l'extrémité E du diamètre, fussent les $+z$, & à compter depuis C jusqu'à l'autre extrémité F, ils fussent les $-z$.

Supposant $CM = 0$, nous avons $2a - \frac{z^2}{a} = 0$, donc $2a = \frac{z^2}{a}$ ou $a = \frac{z^2}{2a}$, & par conséquent $aa = bz$, donc $z, a :: a, b$; ainsi supposant $a = b$, nous avons $z = a$, & par conséquent le rayon CE (Fig. 96.) détermine alors le $CM = 0$; or comme en faisant la même construction sur les rayons du demi-cercle FNE, la courbe se trouveroit semblablement posée dans l'un & l'autre demi-cercle; il est visible que cette courbe est rebroussante en C, & que le rayon CE est sa tangente.

Mais si l'on suppose b plus grand que a , on aura aussi a plus grand que z , lorsque $CM = 0$, ainsi supposant $z = CL$ (Fig. 97.) je mene l'ordonnée LO, & le rayon CO est celui qui détermine $CM = 0$; or les autres rayons entre CO, CE donneront d'au-

tres CM qui ne seront pas égaux à zero , & qu'il faudra prendre sur les prolongemens de ces rayons dans l'autre demi-cercle ; donc dans ce cas la courbe coupe le diametre FE , & pour déterminer le CM que le rayon CE donnera comme alors on a $z = a$, je mets cette valeur de z dans $CM = 2a - \frac{2bz}{a}$, & j'ai $CM = 2a - \frac{2ab}{a} = 2a - 2b$, ainsi la courbe coupe l'axe en un point V éloigné du centre C d'une quantité égale à $2a - 2b$.

J'ai dit que les CM déterminés par les rayons qui sont entre CO & CE doivent être pris sur les prolongemens de ces rayons , parce que les CM déterminés par les rayons qui sont au-delà de CO étant positifs , & ces CM positifs allant en diminuant jusqu'au CM déterminé par CO , lequel est zero , les CM qui viennent après celui-ci doivent être négatifs.

Comme on peut faire la même construction sur les rayons du demi-cercle FHE , il est visible que la courbe revient se couper au point C , lequel est par conséquent son nœud.

Quand b est moindre que a , nous avons déjà dit ci-dessus que la courbe ne passe pas par le point C (Fig. 98.) , & que le point K où elle coupe l'axe du côté de E , est éloignée du centre C d'une quantité égale à $2a - 2b$.

Si l'on prend le rayon CR perpendiculaire au rayon CE (Fig. 96, 97, 98.) , le CM déterminé par ce rayon est toujours $= 2a$, soit que a soit égal ou moindre , ou plus grand que b ; car le z correspondant à ce rayon est $= 0$, mettant donc cette valeur de zero dans $CM = 2a - \frac{2bz}{a}$, on a $CM = 2a - 0 = 2a$.

Si l'on prend le rayon CF , le $-z$ qui lui correspond est $= -a$, car le z est négatif de ce côté ; mettant donc cette valeur dans $CM = 2a - \frac{2bz - z}{a}$ on aura $CM = 2a - \frac{2b \times -a}{a} = 2a + \frac{2ab}{a} = 2a + 2b$; c'est-à-dire que la courbe coupe l'axe en un point T éloigné du centre C d'une quantité égale à $2a + 2b$, soit que a soit plus grand ou moindre , ou égal à b .

Il est visible que cette courbe a deux ordonnées plus grandes que les autres (Fig. 96.) , à sçavoir l'une dont l'abscisse est sur CE , en ne prenant que les ordonnées qui se terminent sur la convexité de la courbe , & l'autre dont l'abscisse est sur CT en prenant les ordonnées qui se terminent sur la concavité ; or pour trouver la plus grande ordonnée dont l'abscisse est sur CE , il

faut supposer que CM soit devenu CN = a , ainsi on aura $a = 2a - \frac{2bz}{a}$, ce qui donne $z = \frac{a^2}{2b}$; or si $b = a$, on aura $z = \frac{a^2}{2b} = \frac{1}{2}a$, ainsi l'abscisse correspondante à la plus grande ordonnée PN est $z = \frac{1}{2}a$, mais le triangle rectangle CNP donne $\overline{PN}^2 = \overline{CN}^2 - \overline{CP}^2$, donc $\overline{PN}^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$, & $PN = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$; mais si b est plus grand ou moindre que a , on aura toujours $z = \frac{a^2}{2b}$, & $z^2 = \frac{a^4}{4b^2}$ donc $\overline{PN}^2 = \overline{CN}^2 - \overline{CP}^2 = aa - \frac{a^4}{4b^2}$ & $PN = \sqrt{aa - \frac{a^4}{4b^2}}$.

Pour trouver la plus grande ordonnée dont l'abscisse est sur CT, je prens l'équation de la courbe que nous avons trouvée ci-dessus en retranchant de

part & d'autre $\frac{1}{2}y^2$, comme on voit ici, je prens la différence de l'équation, & retranchant de

part & d'autre $\frac{axdx}{\sqrt{a^2 + y^2}}$,

j'ai une équation dans laquelle faisant $dy = 0$, selon la règle des plus grandes & des moindres quantités, le premier membre devient égal à zero, & divisant par dx , puis ajoutant de part & d'autre $\frac{ax}{\sqrt{ax + y^2}}$,

$$bx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$bx + \frac{1}{2}x = a\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}y^2$$

$$b dx + x dx = \frac{ax^2 + \frac{1}{2}y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y dy$$

$$b dx + x dx - \frac{ax dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{ay dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y dy$$

$$b dx + x dx - \frac{ax dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$b + x = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$b + x \times \sqrt{x^2 + y^2} = ax$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ax}{b + x} = CM$$

ensuite multipliant par $\sqrt{xx + y^2}$, puis divisant par $b + x$, je trouve $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ax}{b + x}$, & comme nous avons trouvé ci-dessus

$$CM = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ donc } CM = \frac{ax}{b + x}.$$

Or ayant trouvé ci-dessus z , $a :: x$, CM, nous avons par conséquent $CM = \frac{ax}{z}$; comparant donc cette va-

$$\frac{ax}{b + x} = \frac{ax}{z}$$

$$\frac{1}{b + x} = \frac{1}{z}$$

$$z = b + x$$

$$z - b = x$$

leur $\frac{ax}{z}$ de CM, avec sa valeur $\frac{ax}{b+x}$, j'ai $\frac{ax}{b+x} = \frac{ax}{z}$; d'où jeti-
re $z-b=x$.

Je mets cette valeur de x dans $CM = \frac{ax}{z}$, & j'ai $CM = \frac{az-ab}{z}$,

& comparant cette va-
leur de CM avec sa va-

leur $CM = 2a - \frac{1bz}{a}$,

j'ai $\frac{az-ab}{z} = 2a - \frac{1bz}{a}$,

& multipliant par a , puis
par z , puis ajoutant de
part & d'autre $2bz^2$ &
 a^2b , & retranchant $2a^2z$,
enfin divisant par $2b$,

je trouve $z^2 - \frac{a^2z}{2b} = \frac{1}{2}a^2$.

Cette équation étant
du second degré je la
résous selon les règles
que j'ai enseignées dans
l'Arithmétique des Geo-
mètres, en prenant la

moitié $\frac{a^2}{4b}$ du coefficient du second terme, puis l'élevant au
quarré $\frac{a^4}{16bb}$, je l'ajoute de part & d'autre à l'équation, & ti-
rant la racine quarrée de l'un & l'autre membre, je trouve z
 $-\frac{a^2}{4b} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16bb}}$, ou $\frac{a^2}{4b} - z = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16bb}}$, ainsi les deux
racines de l'équation sont $z = \frac{a^2}{4b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16bb}}$, à sçavoir $+$
pour la véritable racine, & $-$ pour la fausse.

Or comme nous cherchons ici la plus grande ordonnée prise
du côté de CF, ou sont les $-z$, c'est par conséquent la fausse
racine qui doit nous servir. Supposant donc $b=a$, & mettant
cette valeur de b dans la fausse racine, nous avons $z = \frac{1}{4}a$
 $-\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}} = \frac{1}{4}a - \sqrt{\frac{2a^2 + a^2}{16}} = \frac{1}{4}a - \sqrt{\frac{3a^2}{16}} = \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}a = -\frac{1}{2}a$,
ainsi prenant sur CF (Fig. 96.) la partie CO $= \frac{1}{4}a$, & me-
nant l'ordonnée Oo, puis du centre C par o la droite Cy $= 2a$

$$\frac{ax}{z} = \frac{az-ab}{z} = CM$$

$$\frac{az-ab}{z} = 2a - \frac{1bz}{a}$$

$$\frac{a^2z-a^2b}{z} = 2a^2 - 2bz$$

$$a^2z - a^2b = 2a^2z - 2bz^2$$

$$2bz^2 - a^2z = a^2b$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} = \frac{a^2}{2}$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} + \frac{a^4}{16b^2} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16b^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z - \frac{a^2}{4b} \\ \frac{a^2}{4b} - z \end{array} \right. = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16b^2}}$$

$$z = \frac{a^2}{4b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16b^2}}$$

LA MECHANIQUE

& de z la valeur $-\frac{1}{2}a$;
 & de b la valeur a , faisant $Cy = 2a - \frac{2a}{a} \times -\frac{1}{2}a = 3a$;
 l'ordonnée Yy sera la plus grande , or les triangles semblables
 COY , CYy , donnent Co , $CO :: Cy$, CY , donc a , $-\frac{1}{2}a :: 3a$,
 $-\frac{1}{2}a = 3a$, $a = CY$, c'est-à-dire , prenant $CY = \frac{1}{2}a$, la droite
 CY sera l'abscisse correspondante à la plus grande ordonnée ;
 or le triangle rectangle CYy donne $\overline{Yy}^2 = \overline{Cy}^2 - \overline{CY}^2$, donc \overline{Yy}^2
 $= 9a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{35}{4}a^2$, donc $Yy = \sqrt{\frac{35}{4}a^2}$.

On trouvera de la même façon la plus grande ordonnée lorsqu'
 a sera plus grand ou moindre que b , en mettant dans la fausse
 racine la valeur de b en a , c'est-à-dire la valeur de b exprimée par
 le rapport qu'elle a avec a , & achevant le reste comme nous ve-
 nons de faire .

Il faut remarquer ici que si l'on vouloit prendre la véritable ra-
 cine pour trouver la plus grande ordonnée du côté de CE , cer-
 te racine donneroit une valeur plus grande qu'il ne faut , car en
 faisant $b = a$ on auroit $z = a$, & en faisant b moindre que a on
 trouveroit z plus grand que a , & enfin en faisant b plus grand
 que a on trouveroit une valeur de z plus grande que celle que
 nous avons trouvée ci-dessus . Or cela doit être de même , & en
 voici la raison , ce qui fera voir en même tems la sûreté des regles
 que les nouveaux calculs prescrivent .

Quand j'ai dit que la courbe avoit deux plus grandes ordonnées
 j'y ai mis une restriction , en disant qu'il y en avoit une plus gran-
 de du côté de CE , si on ne faisoit attention qu'aux ordonnées
 qui aboutissent à la convexité de la courbe , & dans ce sens là
 nous avons trouvé cette plus grande ordonnée ; mais à propre-
 ment parler , c'est-à-dire , en prenant toutes les ordonnées , soit
 qu'elles aboutissent à la convexité de la courbe ou à la concavité ,
 il n'y en a qu'une qui soit la plus grande , & comme celle là se
 trouve du côté de CF où sont les $-z$, c'est aussi la fausse raci-
 ne qui a dû nous la déterminer ; quant à la vraie , comme elle
 est inutile , elle ne doit donner que des grandeurs dont la con-
 struction même de la courbe nous montre l'absurdité , & par cela
 même elle nous sert à connoître , & à nous assurer que la cour-
 be ne peut avoir qu'une plus grande ordonnée .

PROPOSITION

PROPOSITION LXXVII.

225. Si un cercle X (Fig. 99.) roule sur la circonférence d'un cercle immobile V qui lui est égal, & que sur le diamètre du cercle X on ait marqué un point M, qui soit ou dans l'aire du cercle, ou sur la circonférence, ou hors de l'aire, en supposant que ce diamètre ait été prolongé, la courbe décrite par ce point M pendant le tems de la revolution du cercle X, est la même courbe que nous avons considérée dans la Proposition précédente.

DEMONSTRATION.

Supposons que la revolution du cercle X ait commencé au point B, & que ce cercle ait déjà parcouru l'arc BH; je prens l'arc DH égal à l'arc BH, & le point D est le point où le cercle X a commencé sa revolution, c'est-à-dire que le point D étoit sur le point B au commencement de la revolution, & le diamètre Dd étoit sur la direction du rayon AB. Supposons que le point M soit pris sur le prolongement de dD, & que ce point décrive la courbe LCMn, je joins les deux centres A, E par la droite AE; du point A par le point B je mene la droite indéfinie AG, & du point E par le point D la droite EO qui coupe AG en O; je prens sur AG la droite AC égale à la droite EM, & du point C pris pour centre, & avec un rayon CN = ED = AB, je décris un cercle T; enfin du point C par le point M je mene le rayon CN, & du point N la droite NG perpendiculaire à RG.

Je nomme $CN = AB = ED = a$, $EM = AC = b$, & $CG = z$, l'arc BH étant égal à l'arc DH, l'angle OAE est égal à l'angle OEA, & par conséquent $OA = OE$, & à cause de $CA = ME$, on a l'angle OCM égal à l'angle OAE; or le point H étant le milieu de la base AE du triangle isoscele AOE, la droite OH est perpendiculaire sur AE, & le triangle rectangle AOH est semblable au triangle rectangle CNG. Donc $CG, CN :: AH, AO$, ou $z, a :: a \frac{aa}{z} = AO$, donc $OC = OA - AC = \frac{aa}{z} - b$, or à cause des triangles semblables OAE, OCM, j'ai $OA : AE :: OC : CM$, donc $\frac{aa}{z}, 2a :: \frac{aa}{z} - b, 2a - \frac{2bz}{a} = CM$; donc par la Proposition précédente le point M est un point de la courbe que nous avons décrite par cette Proposition; or le point

E c

M est aussi un point de la courbe que M décrit pendant la révolution du cercle X, & la même chose que nous venons de prouver se prouvera aussi du point M dans quelque endroit de sa révolution que le cercle X se trouve, donc la courbe que le point M décrit est la même que nous avons décrite dans la Proposition précédente, ainsi cette courbe est une épicycloïde.

Et la même chose se prouveroit si le point M étoit ou sur la circonférence du cercle X ou en dedans de l'aire.

COROLLAIRE.

226. Supposons donc que le cercle V (Fig. 190.) soit le cercle immobile, le cercle X, le cercle mobile, & que le commencement de la révolution soit le point C, de ce point pris pour centre je décris le demi-cercle FNE, & supposant que le point décrivant soit au point C sur la circonférence du cercle X, c'est-à-dire, supposant $b = a$, il est visible que la courbe décrite par ce point sera la même que celle de la (Fig. 96.) qui suppose $b = a$.

Supposant que le point décrivant soit en L, c'est-à-dire hors de l'aire du cercle X & de sa circonférence, il est visible que la courbe LCM est la même que celle de la Figure 97. qui suppose b plus grand que a .

Enfin supposant que le point décrivant soit en K dans l'aire du cercle X, la courbe CN sera la même que celle de la Figure 99. qui suppose b moindre que a .

Ainsi quand b est plus grand que a , l'excès CL de EL sur EC marque de combien b surpasse a , & quand b est moindre que a la différence CK de EC à EK marque de combien a surpasse b .

PROPOSITION LXXVIII.

227. Trouver une courbe GMC (Fig. 101.) de telle nature qu'un corps qui viendra à la parcourir s'approche du centre de la terre d'un mouvement uniforme, en supposant que les directions du corps dans tous les points de la courbe tendent toutes au point C, que nous regarderons comme le centre de la terre.

SOLUTION.

Nous avons déjà résolu ce Problème (N. 212.) en supposant que les directions étoient parallèles entr'elles, & nous avons

rendu raison de cette supposition dans la remarque de la même Proposition (N. 213.) ; mais comme en prenant les choses dans l'exacte rigueur les directions ne sont pas paralleles, nous allons résoudre la question en les supposant telles qu'elles sont.

Je prens sur la courbe deux points infiniment proches M, m ; du centre C je décris les arcs de cercle MP, mp , ainsi quand le corps est en M la droite AP marque de combien il est descendu vers le centre, en supposant que le mouvement ait commencé en A ; du même centre C je décris l'arc indéfini AL , & je mene par les points M, m , les droites CN, cn ; je nomme la distance $AC=b$, l'abscisse $AP=x$, l'arc $AN=y$; donc $Pp=MR=dx$, $Nn=dy$, $PC=MC=AC-AP=b$, $NC=AC=b$, & $MC=mC=PC=b-x$.

Les secteurs semblables NCn, mCR donnent $CN, Nn :: Cm, mR$, donc $b, dy :: b-x, \frac{b-x \times dy}{b} = mR$; le triangle rectangle mRM donne $\overline{MR}^2 + \overline{mR}^2 = \overline{mM}^2$, donc $\overline{mM}^2 = dx^2 + \frac{b-x \times dy^2}{b} = \frac{bbdx^2 + b-x \times dy^2}{bb}$.

Par l'hypothèse le tems de la descente le long de GM est au tems de la descente le long de Mm , comme AP est à Pp , ainsi supposant que le tems de la descente le long de GM soit exprimé par $AP=x$, le tems de la descente le long de Pp sera $Pp=dx$, & dans l'hypothèse de Galilée la vitesse acquise en M sera $\sqrt{AP}=\sqrt{x}$; or l'espace Mm étant infiniment petit, le mouvement du corps le long de cet espace peut être regardé comme uniforme, & dans le mouvement uniforme les espaces sont comme les produits des tems par les vitesses, donc l'espace Mm

$=dx\sqrt{x}$, & par conséquent $\overline{Mm}^2 = xdx^2$; or nous avons trouvé

$Mm^2 = \frac{bbdx^2 + b-x \times dy^2}{bb}$, donc

nous avons l'équation qu'on voit ici ; & multipliant tout par bb , puis retranchant $bbdx^2$ de part & d'autre, puis tirant la racine quarrée, ensuite divisant par $b-x$, & enfin tirant l'intégrale,

j'ai $\int \frac{bdx\sqrt{x-1}}{b-x} = y$.

$$\overline{mM}^2 = \frac{bbdx^2 + b-x \times dy^2}{bb}$$

$$bbx dx^2 = bb dx^2 + b-x \times dy^2$$

$$bbx dx^2 - bb dx^2 = b-x \times dy^2$$

$$bdx\sqrt{x-1} = b-x \times dy$$

$$\frac{bdx\sqrt{x-1}}{b-x} = dy$$

$$\int \frac{bdx\sqrt{x-1}}{b-x} = y$$

Il est visible qu'en déterminant x , l'intégrale du premier membre de cette équation donnera la valeur de y ou de l'arc AN , laquelle déterminera le point M de la courbe cherchée, puisqu'on n'aura qu'à tirer de N en C la droite NC , & prendre sur cette droite la partie $CM = AC - AP$; il ne s'agit donc que de trouver l'intégrale de ce premier membre, & c'est ce que nous allons faire.

Je suppose que $\int \frac{b dx \sqrt{x-1}}{b-x}$ multiplié par l'unité, est l'aire d'une courbe; donc son élément sera $\frac{b dx \sqrt{x-1}}{b-x}$, & son ordonnée sera $\frac{b \sqrt{x-1}}{b-x}$, d'où je tire $b-x, b :: \sqrt{x-1}, \frac{b \sqrt{x-1}}{b-x}$; or en supposant $AG = 1$, le troisième terme $\sqrt{x-1}$ est l'ordonnée d'une parabole dont le paramètre $= 1$, & dont l'abscisse est $= GP = AP - AG = x - 1$; car par la propriété de cette parabole le carré PQ^2 de l'ordonnée PQ est égal à l'abscisse GP multipliée par le paramètre, donc $PQ^2 = x - 1 \times 1 = x - 1$, & par conséquent $PQ = \sqrt{x-1}$; puis donc que l'élément $\frac{b \sqrt{x-1}}{b-x}$ est quatrième proportionnel aux trois termes $b-x = CP, b = CA$, & $PQ = \sqrt{x-1}$, je décris une parabole GQR qui a son sommet en G , & avec un paramètre $= 1 = AG$, puis menant l'ordonnée PQ , ensuite tirant du point A la droite AS parallèle à cette ordonnée, & la droite CQS par les points C, Q , les triangles rectangles CPQ, CAS donnent $CP, CA :: PQ, AS$, donc $b-x, b :: \sqrt{x-1}, \frac{b \sqrt{x-1}}{b-x}$, & par conséquent menant $PT = AS$, la droite PT est une ordonnée de la courbe dont l'aire est $\int \frac{b dx \sqrt{x-1}}{b-x}$ multiplié par l'unité, & faisant la même construction à l'égard de tous les AP , j'ai la courbe GTV , faisant donc avec la hauteur AG un rectangle $AGga$ égal à l'aire GPT que je suppose connue, puis divisant par $AG = 1$, la droite Gg sera $\int \frac{b dx \sqrt{x-1}}{b-x \times 1} = \int \frac{b dx \sqrt{x-1}}{b-x} = y = AN$; & faisant la même chose à l'égard de toutes les portions GPT de la courbe GTV , on aura les arcs AN correspondans; & par conséquent tirant de chaque point N les droites NC , & du centre C par chaque point P décrivant les arcs PM , les intersections des arcs PM & des droites correspondantes NC donneront autant de points

de la courbe cherchée GMC qui est la courbe du Problème.

Pour connoître la nature de la courbe GTV, supposons l'ordonnée $PT=0$, donc $\frac{\sqrt{x-1}}{b-x}=0$, & multipliant par $b-x$, puis divisant par b , on aura $\sqrt{x-1}=0$; & élevant au quarré, puis donnant 1 de part & d'autre, on aura $x=1$, ce qui fait voir que quand l'ordonnée est zero, l'abscisse x est égale à $AG=1$.

Supposons $PT=\infty$, donc $\frac{\sqrt{x-1}}{b-x}=\infty$; or quand une fraction est infiniment grande, son dénominateur est égal à zero; donc $b-x=0$, & $b=x$; donc quand l'abscisse devient égale à $AC=b$, l'ordonnée CY est infinie, & par conséquent cette ordonnée est l'asymptote de la courbe.

Pour trouver l'équation de la courbe GTV rapportée à la droite AS , je nomme $TS=AP=x$, $AG=a$, & $AS=PT=z$, donc $GP=AP-AG=x-a$; or dans la parabole GPQ , j'ai $PQ^2=GP \times AG$, donc $PQ^2=ax-aa$, & $PQ=\sqrt{ax-aa}$, mais les triangles semblables CPQ , CAS , donnent CP , $PQ :: CA$, AS , donc $b-x, \sqrt{ax-aa} :: b, \frac{\sqrt{ax-aa}}{b-x}=AS$, donc $z=\frac{\sqrt{ax-aa}}{b-x}$, & par conséquent $z^2=\frac{bax-aa^2}{b^2-2bx+xx}$, d'où je tire $b^2z^2-2bxz^2+xxz^2=bax-aa^2$, ou $x^2z^2-2bxz^2+b^2z^2-abbx+aa^2=0$ qui est l'équation cherchée.

Si dans cette équation je fais $AS=z=0$, j'ai $a^2b^2-abbx=0$, d'où je tire $a=x$, c'est-à-dire que lorsque l'abscisse AS est égale à zero, l'ordonnée ST devient égale à $AG=a$, ce qui s'accorde avec ce qui a été dit ci-dessus.

Pour connoître l'équation de la courbe GMC du Problème, je nomme $AG=1$, $GP=u$, le petit arc $mR=dz$; donc $Pp=du$, & $\overline{Mm}^2=\overline{mR}^2+\overline{MR}^2=dz^2+du^2$; or nous avons trouvé ci-dessus $\overline{Mm}^2=xdx^2$, donc $xdx^2=dz^2+du^2$; mais $x=u+1=AG+GP$, donc $dx=du$, & $dx^2=du^2$, & par conséquent $xdx^2=u+1 \times du^2=udu^2+du^2$; ainsi j'ai $udu^2+du^2=dz^2+du^2$, d'où je tire $udu^2=dz^2$, & tirant la racine quarrée, j'ai $u^{\frac{1}{2}}du=dz$, dont l'intégrale est $\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}=z$, laquelle étant élevée au quarré donne $z^2=\frac{4}{9}u^3$, ou $\frac{3}{2}z^2=u^3$; or z étant l'intégrale de $dz=mR$, est par conséquent égale à l'arc MP qui est l'ordon-

car par la propriété du cercle, on a $AG, GD :: GD, GC$; donc $AG, GD :: \sqrt{AG}, \sqrt{GC}$, les triangles semblables DGE, FGE donnent DG, GE ou $AG :: FG, GC$, ou $AG, GD :: GC, GF$, donc $GC, GF :: \sqrt{AG}, \sqrt{GC}$, ou $GF, GC :: \sqrt{GC}, \sqrt{AG}$, c'est-à-dire, le sinus de l'angle GCF est au sinus de complement de cet angle comme \sqrt{GC}, \sqrt{AG} , donc cet angle est l'angle cherché.

Pour mener la droite CM (Fig. 101.) qui passe par le point d'inflexion, je prens sur AC (Fig. 102.) la droite $AH = \frac{1}{2}AC$; je décris un demi-cercle sur cette droite, & menant au point G l'ordonnée GV , je mene les droites AV, HV ; je fais $VK = \frac{1}{2}AG = AL$, & menant AK je fais $LO = AK$; le point O est le point de l'axe auquel répond le point d'inflexion de la courbe; car par la propriété du cercle, j'ai $AG, AV :: AV, AH$, ou $\frac{1}{2}AC$, donc $\overline{AV} = AG \times \frac{1}{2}AC$, & $AV = \sqrt{AG \times \frac{1}{2}AC}$; or l'angle AVK étant droit, on a $\overline{AK} = \overline{AV} + \overline{VK}$, ou $\frac{1}{2}\overline{AG}$, donc on aura $AK = \sqrt{AG \times \frac{1}{2}AC} + \frac{1}{2}\overline{AG}$; mais $LG = \frac{1}{2}AG$, & $LO = AK$, donc $GO = LO$, ou $AK - LG = \sqrt{AG \times \frac{1}{2}AC} + \frac{1}{2}\overline{AG} - \frac{1}{2}\overline{AG}$, & c'est la valeur de $u = GP$ (Fig. 101.) que nous avons trouvée ci-dessus; faisant donc GP (Fig. 101.) égal à GO (Fig. 102.) & du centre C menant l'arc PM , le point M sera le point d'inflexion cherché.

L'équation de la courbe GMC étant $z = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$, sa différence est $dz = du \cdot u$; mais $u = x - 1$, donc $du = dx$, & $dz = dx \sqrt{x-1}$; Supposant donc $mR = dz = 0$, nous aurons $dx \sqrt{x-1} = 0$, donc $x-1=0$, & $x=1$, c'est-à-dire quand l'arc MP sera infiniment petit, ou quand l'ordonnée sera égale à zero, ce qui arrive au point G , on aura $x=1=AG$, mais x marque la hauteur d'où le corps doit descendre, donc le corps doit commencer à tomber au point A & non pas au point G .

Maintenant pour redifier la courbe GMC nous avons $\overline{Mm} = x dx^{\frac{1}{2}}$, donc $Mm = dx \sqrt{x}$; or Mm est la différence de l'arc GM , prenant donc l'intégrale, nous aurons $GM = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x \sqrt{x}$; mais $x = u + 1$, donc $GM = \frac{2}{3}u + \frac{2}{3} \times \sqrt{u+1}$, & faisant $u=0$ pour voir si l'intégrale est complète, & effaçant dans l'intégrale les termes où u se trouve, le reste est $\frac{2}{3} \times \sqrt{1} = \frac{2}{3}$; ainsi retranchant $\frac{2}{3}$ de

de l'intégrale, j'ai $\frac{2}{3}u + \frac{2}{3} \times \sqrt{u+1} - \frac{2}{3}$, qui est la valeur de GM (selon les règles que nous avons données dans le *Calcul intégral*.)

Je prens une droite AP (*Fig. 103.*) = AP (*Fig. 101.*) je décris un demi-cercle sur cette droite, & faisant AG (*Fig. 103.*) = AG (*Fig. 101.*), puis prenant AD = $\frac{2}{3}$ AD, je mene l'ordonnée GB, la droite DF parallèle à GB, & du point A par le point B la droite AF qui coupe DF en F; enfin je prens de E vers A la partie FH = $\frac{2}{3}$ AG, & la partie AH est égale à l'arc GM (*Fig. 101.*) car par la propriété du cercle, j'ai AP, AB :: AB, AG, donc $\overline{AB} = \overline{AP} \times \overline{AG}$, & $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AP} \times \overline{AG}} = \sqrt{\overline{AP}}$, à cause de AG = 1; les triangles semblables BAG, FAD, donnent AG, AB :: AD, AF, donc $\overline{AF} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AD}}{\overline{AG}}$, & mettant la valeur $\sqrt{\overline{AP}}$ de AB, & la valeur $\frac{2}{3}\overline{AP}$ de AD, j'ai $\overline{AF} = \frac{\frac{2}{3}\overline{AP} \times \sqrt{\overline{AP}}}{\overline{AG}}$, & retranchant de AF la valeur $\frac{2}{3}\overline{AG}$ de FH, j'ai $\overline{AF} - \overline{FH} = \overline{AH} = \frac{2\overline{AP} \times \sqrt{\overline{AP}}}{3 \times \overline{AG}} - \frac{2}{3}\overline{AG} = \frac{2\sqrt{x}}{3 \times 1} - \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2\sqrt{x}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}u + \frac{2}{3} \times \sqrt{u+1} - \frac{2}{3}$, donc, &c.

Pour avoir la quadrature de l'aire GMC (*Fig. 101.*) j'observe que l'élément de cet aire est le secteur infiniment petit CmR = mR $\times \frac{1}{2}$ CR, or en faisant CG = c, nous avons CP = CR = c - u; mais mR = dz = $u^{\frac{1}{2}} du$, donc CmR = mR $\times \frac{1}{2}$ CR = $\frac{1}{2} cu^{\frac{1}{2}} du - \frac{1}{2} u^{\frac{3}{2}} du$; tirant donc l'intégrale, nous aurons $\frac{1}{5} cu^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7} u^{\frac{7}{2}}$ = $\frac{5cu - 3u^2 \times \sqrt{u}}{15}$ = $\frac{5GC \times GP - 3GP^2 \times \sqrt{GP}}{15AG}$, à cause de AG = 1, & ce fera la valeur de l'aire GMP, ainsi faisant GP = GC, & par conséquent u = c, nous aurons $\frac{5c^2 - 3c^2 \times \sqrt{c}}{15}$ = $\frac{2c^2 \times \sqrt{c}}{15}$ = $\frac{2GC \times \sqrt{GC}}{15AB}$ pour la valeur de l'aire entière GMC.

Nous avons supposé jusqu'ici que l'accélération causée par la pesanteur étoit selon la loi de Galilée, c'est pourquoi nous avons trouvé que l'une des valeurs de \overline{Mm} étoit $x dx^2$, par la raison que Mm étant un espace infiniment petit, le mouvement le long de cet espace peut être regardé comme uniforme, & que dans le mouvement uniforme l'espace Mm est comme le produit de la vitesse par le tems, ce qui donne effectivement $\overline{Mm} = dx \sqrt{x}$

dans l'hypothèse de Galilée, & par conséquent $\overline{Mm} = xdx^2$; mais si l'on veut prendre une autre hypothèse, voici comme on fera.

Suposé que la vitesse acquise en M ou en P soit comme $\sqrt{2bx - xx}$, ainsi que nous l'avons trouvée dans l'hypothèse du nombre 90, l'espace Mm sera donc $dx\sqrt{2bx - xx}$, & par conséquent $\overline{Mm} = 2bxdx^2 - xxdx^2$, or l'autre valeur de \overline{Mm} trouvée ci-dessus est $\frac{bbdx^2 + b - x^2 \times dy^2}{bb}$, donc nous avons l'équation qu'on voit ici.

Et multipliant tout par bb , puis retranchant $bbdx^2$ de part & d'autre, ensuite divisant par $b - x^2$, enfin tirant la racine quarrée, & l'intégrale de cette racine, nous aurons une valeur de y ou de l'arc AN que nous trouverons en cherchant d'abord la courbe représentée par $\int \frac{b dx \sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$

$$2bxdx^2 - xxdx^2 = \frac{bbdx^2 + b - x^2 \times dy^2}{bb}$$

$$2b^3xdx^2 - bbxxdx^2 = bbdx^2 + b - x^2 \times dy^2$$

$$2b^3xdx^2 - bbxxdx^2 - bbdx^2 = b - x^2 \times dy^2$$

$$\frac{2b^3xdx^2 - bbxxdx^2 - bbdx^2}{b - x^2} = dy^2$$

$$\frac{b dx \sqrt{2bx - xx - 1}}{b - x} = dy$$

$$\int \frac{b dx \sqrt{2bx - xx - 1}}{b - x} = y$$

$$\int \frac{b dx \sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x} = y$$

multiplié par 1, ce que je fais ainsi.

La différence de cette courbe est $\frac{b dx \sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$, & son élément est $\frac{b \sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$. Je prens une droite AC (Fig. 104.)

égale à AC (Fig. 101.); je prens sur cette ligne les droites AG, AP, égale aux droites AG, AP (Fig. 101.) du point C (Fig. 104.) pris pour centre, je décris sur le rayon AC le quart de cercle ACO; du point P je mene l'ordonnée PH sur laquelle je décris un demi-cercle; dans ce quart de cercle j'inscris la corde PO = AG = a, & du point O je mene l'autre corde OH.

Par la nature du cercle, le quarré de l'ordonnée PH au quart de cercle AO est égal à AP × 2AC - AG, donc $\overline{PH}^2 = 2bx - xx$; or dans le triangle rectangle PHO, j'ai $\overline{OH}^2 = \overline{PH}^2 - \overline{PO}^2$, ou

\overline{AG}^2 , donc $\overline{OH}^2 = 2bx - xx - aa$, & par conséquent $OH = \sqrt{2bx - xx - aa}$.

Je prens sur PH la droite $PK = OH$, par le point A je mene AV parallele à PK, & du point C par le point K, je mene la droite CKV, les triangles semblables PCK, ACV donnent $PC, PK :: AC, AV$, donc $b - x, \sqrt{2bx - xx - aa} :: b, \frac{b\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x} = AV$, je prolonge PK en S, & du point V menant VS parallele à AP, j'ai $PS = AV = \frac{b\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$, & par conséquent S est un point de la courbe FST dont l'aire est $\int \frac{b dx \sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$, & je trouverois de la même façon tous les points de cette courbe; supposant donc cette courbe décrite, & sa quadrature connue, je fais sur $AG = a = 1$ un rectangle $AGga$ égal à l'espace PSF, & divisant ce rectangle par $AG = 1$, le quotient $\int \frac{b dx \sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x \times 1}$, ou $\int \frac{b dx \sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x}$ = Gg est la valeur de y ou de l'arc AN (Fig. 101.), & faisant la même chose à l'égard de tous les espaces PSF (Fig. 104.) j'ai les valeurs de tous les arcs AN (Fig. 101.) correspondans aux AP.

Si nous supposons que l'ordonnée PS de la courbe FST soit égale à zero, nous aurons $\frac{b\sqrt{2bx - xx - aa}}{b - x} = 0$; or quand une fraction est égale à zero, son numerateur est infiniment petit, donc $b\sqrt{2bx - xx - aa} = 0$, & divisant par b, puis élevant au quarré, j'ai $2bx - xx = aa$, ou $xx - 2bx = -aa$; donc ajoutant de part & d'autre le quarré bb de la moitié du coefficient du second terme, j'ai $xx - 2bx + bb = bb - aa$, & tirant la racine quarrée, j'ai $b - x = \sqrt{bb - aa}$, ou $x = b - \sqrt{bb - aa}$, je décris sur AC un demi-cercle AZC, j'y inscris la corde AZ égale à AG, & menant l'autre corde ZC, le triangle rectangle AZC donne $\overline{ZC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AZ}^2$, ou \overline{AG}^2 , donc $\overline{ZC}^2 = bb - aa$, & $ZC = \sqrt{bb - aa}$; je porte ZC sur AC de C en F, & j'ai $AC - FC = b - \sqrt{bb - aa}$, donc le point F est le sommet de la courbe FST, puisque nous venons de voir que quand l'ordonnée de cette courbe est égale à zero, l'abscisse est $x = b - \sqrt{bb - aa}$.

Puisque quand PS est égal à zero, nous avons $\frac{b\sqrt{2bx-xx-aa}}{b-x}$
 $= 0$, donc en multipliant par $b-x$, puis divisant par b , & ensuite élevant au quarré nous avons $2bx-xx-aa=0$, ou $2bx-xx=aa$, & par conséquent $\sqrt{2bx-xx}=a$, c'est-à-dire quand l'ordonnée PS de la courbe FST est égale à zero, l'ordonnée correspondante FX du quart de cercle est égale à AG, & en effet cela est visible par la construction que nous avons faite ci-dessus, car quand l'ordonnée PH du quart de cercle est égale à AG, la corde PO=AG tombe nécessairement sur PH, & lui est égale, donc la corde DH devient égale à zero, de même que PK, & par conséquent les triangles rectangles CPK, CAV, donnent aussi AV=c.

Si nous supposons $x=b$, nous aurons $\frac{b\sqrt{2bx-xx-aa}}{b-x} = \frac{b\sqrt{2bb-bb-aa}}{b-b} = \frac{b\sqrt{bb-aa}}{0}$, c'est-à-dire lorsque l'abscisse est égale à AC, l'ordonnée PM est infinie, & par conséquent elle est l'asymptote de la courbe FST.

Et en suivant les mêmes regles, on trouvera l'équation de la courbe GMC (Fig. 101.) dans l'hypothèse présente, sa nature, ses propriétés, &c.

CHAPITRE IX.

Du mouvement des Pendules & du centre d'oscillation.

DEFINITIONS.

228. **S**I une ligne AB (Fig. 105.) perpendiculaire à l'horizon peut tourner librement autour du point fixe A, & qu'à son extrémité elle ait un corps grave B qu'on puisse faire monter & descendre le long des arcs CB, BD, décrites par la ligne AB, ce corps B joint à la ligne AB s'appelle un *pendule*; on le nomme *pendule simple* lorsqu'il n'y a qu'un seul poids B à l'extrémité B, & *pendule composé* lorsqu'il y a plusieurs poids B, H, F, &c. sur différens points de la ligne AB, où ils demeurent fixes.

PROPOSITION LXXIX.

229. Si un pendule AB (Fig. 105.) perpendiculaire à l'horizon est

mis dans la situation AC oblique à l'horizon, le corps grave C descendra jusqu'en B, d'où il remontera le long de l'arc BD égal à l'arc BC, de là il descendra jusqu'en B, d'où il remontera le long de l'arc BC = BD, & il continuera de même à descendre & à monter des arcs égaux, si le mouvement se fait dans un milieu non résistant.

DEMONSTRATION.

Le point fixe A empêchant le pendule de tomber, on peut regarder ce point comme la base qui soutient le corps, ainsi quand on met ce corps de façon que la direction de sa pesanteur, c'est-à-dire, la ligne AB menée de son centre de gravité B perpendiculairement à l'horizon passe par la base A, ce corps doit être en repos; mais quand on met ce corps en un autre point C, de sorte que la direction HI de sa pesanteur ne passe pas par la base A, il faut nécessairement que le centre de gravité du corps, & par conséquent le corps C descende; or comme il ne peut descendre le long de la droite CI, à cause de la ligne CA, qui le retient, il descend le long de l'arc CB, & étant arrivé en B, il seroit en repos s'il n'avoit acquis par sa descente une vitesse qui l'oblige de continuer son mouvement; mais à cause de la ligne AB, auquel il est attaché, il ne peut se mouvoir qu'en remontant le long de l'arc BD; or lorsqu'un corps étant descendu pendant un certain tems par la force de sa pesanteur vient à remonter, la vitesse qu'il a acquise à la fin de la descente le fait remonter autant qu'il étoit descendu, ainsi que nous avons dit plus haut; donc le pendule étant parvenu en B remonte le long de l'arc BD égal à l'arc BC; mais ce pendule se trouvant en D où toute la vitesse qu'il avoit acquise en B se trouve perdue recommence à descendre par la force de sa pesanteur jusqu'en B où sa vitesse acquise le fait remonter jusqu'en C, & ainsi de suite; donc, &c.

REMARQUE.

230. Nous supposons que le mouvement du pendule se fait dans un milieu non résistant, car tout le monde sait que dans l'air le pendule monte toujours un peu moins qu'il ne descend, ce qui fait qu'à la fin il s'arrête dans la position AB perpendiculaire à l'horizon, & cela vient en partie de la résistance de l'air, & en partie du frottement qui se fait autour du point fixe C.

DEFINITION.

231. Le mouvement du corps le long de l'arc CB, qu'il descend joint au mouvement le long de l'arc BD qu'il remonte, s'appelle *vibration* du pendule ou *oscillation*; ainsi le mouvement de C en D est une vibration, celui de D en C est une autre vibration, & ainsi de suite.

Toute ligne droite parallele à l'horizon, & qui passe par le point A, s'appelle *axe de vibration* ou *d'oscillation*.

PROPOSITION LXXX.

232. Si un corps grave B (Fig. 106.) attaché à un fil AB est suspendu par un point A, & qu'après avoir mené par le point A une droite RS parallele à l'horizon, on décrive sur les bases AR, AS, deux demi-cycloïdes CEA, DHA, dont les diametres RC, SD soient chacun égaux à la moitié de la longueur du fil, on vienne à mettre le corps A en C, ensorte que le fil enveloppe la demi-cycloïde CEA, ou en F, ensorte qu'il n'y ait qu'une partie du fil qui enveloppe un arc AE, la vibration CD se fera dans un tems égal à celui de la vibration FG, en supposant toujours que le mouvement du pendule se fasse dans un milieu non résistant.

DEMONSTRATION.

Nous avons supposé dans la construction que le fil AB fût double du diametre RC ou SD, afin que le fil AB pût envelopper la demi-cycloïde CEA ou DHA, laquelle est aussi double du diametre RC ou SD, ainsi que nous l'avons démontré dans la *Théorie & Pratique du Geomètre*; or le corps venant à descendre de C en B, le fil se developpe, & comme sa partie developpée, par exemple la partie FE, est toujours tendue, & par conséquent perpendiculaire à la courbe CFBD, il s'ensuit que l'arc CFB est la ligne de developpement de la demi-cycloïde CEA, & que par conséquent la courbe CFB est une demi-cycloïde égale à la demi-cycloïde CEA, comme il a été démontré dans le même ouvrage que je viens de citer, cela posé.

Quand le corps est descendu de C en B, sa vitesse acquise le fait remonter le long de l'arc BD égal à l'arc CB dans un tems égal à celui qu'il a employé à descendre le long de l'arc CB; de même quand le corps étant mis en F a descendu de F en B, sa vitesse acquise le fait remonter le long de l'arc BG égal à FG

dans un tems égal à celui qu'il a employé à descendre le long de l'arc FB; or que le corps descende de C en B, ou seulement de F en B, le tems qu'il y employe est toujours le même (N. 204.) donc le tems de la demi-vibration CB est égal au tems de la demi-vibration FB, & par conséquent le tems de la vibration entiere CD est égal au tems de la vibration entiere FG.

COROLLAIRE I.

233. Il suit de là que quelques inégales que puissent être les vibrations du pendule que nous venons de décrire, les tems de ces vibrations sont tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

234. Si du centre A & du rayon AB on décrit un cercle, & qu'on prenne sur sa circonférence des arcs BM, BN, qui ne soient pas bien grands, ces arcs ne différeront guères des arcs correspondans BO, BP, de la demi-cycloïde BC; or le tems que le corps mis en O emploieroit à descendre le long de OB, est égal au tems que le même corps mis en P emploieroit à descendre le long de PB, donc le tems que le corps emploieroit à descendre le long de MB ne seroit pas sensiblement différent au tems que ce corps mis en N emploieroit à descendre le long de NB; c'est-à-dire, que si le pendule au lieu de décrire la cycloïde CBD décriroit un arc de cercle, les tems des vibrations inégales Mm, Nn, &c. qui ne sont pas bien grandes seroient sensiblement égaux, & l'expérience est conforme à ce que nous venons de dire.

PROPOSITION LXXXI.

235. *Trouver le tems d'une vibration de pendule entre deux demi-cycloïdes (Fig. 107).*

SOLUTION.

Supposons qu'on veuille sçavoir la durée de la vibration HV (Fig. 107), nous chercherons d'abord la durée de la descente le long de HB, après quoi il est visible que nous aurons la durée de la vibration entiere, pour cela.

Je mene la droite HV qui coupe ZB en L, & sur LB pris pour diametre, je décris un demi-cercle LNB, enfin je mene les ordonnées infiniment proches PM, pm.

Je nomme le diamètre $ZB = 2a$, le diamètre $LB = 2r$, & l'abscisse $LP = x$; donc $PB = 2r - x$, & par la propriété du cercle $PN = \sqrt{2rx - xx}$; de plus $Pp = NO = rm = dx$, & si je nomme t le tems de la descente le long de HM , j'aurai dt pour le tems de la descente le long de Mm .

Maintenant la vitesse acquise à la fin de HM étant la même que la vitesse acquise à la fin de $LP = x$ (N. 197.) cette vitesse selon la loi de Galilée sera $= \sqrt{x}$; or le mouvement le long de l'arc infiniment petit Mm , pouvant être regardé comme uniforme, l'espace Mm sera $dt \times \sqrt{x}$ (N. 17.) & par conséquent $dt = \frac{Mm}{\sqrt{x}}$.

Si du point M je mene la tangente MT , cette tangente sera parallele à la corde QB par la propriété de la cycloïde, donc les triangles Mmr , QBP étant semblables, donnent $Mm, rm :: QB, BP$, or par la propriété du cercle nous avons: ZB, QB, BP , donc $QB, BP :: \sqrt{ZB}, \sqrt{BP}$, & par conséquent $Mm, rm :: \sqrt{ZB}, \sqrt{BP}$, d'où je tire $Mm = \frac{rm \times \sqrt{ZB}}{\sqrt{BP}} = \frac{dx \sqrt{2r}}{\sqrt{2r-x}}$; & met-

tant cette valeur de Mm dans $dt = \frac{Mm}{\sqrt{x}}$, j'ai $dt = \frac{dx \sqrt{2a}}{\sqrt{2rx - xx}}$; & multipliant le numérateur & le dénominateur du second membre par $2r$, j'ai $dt = \frac{2r dx \sqrt{2a}}{2r \sqrt{2rx - xx}}$; or si on cherche la valeur de l'arc LN , ainsi que nous avons déjà fait plusieurs fois dans cet Ouvrage, on trouvera $LN = \int \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$, donc son élément

$Nn = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$ & par conséquent $dt = \frac{2\sqrt{2a} \times Nn}{2r}$, & $t = \frac{2\sqrt{2a}}{2r} \times \int Nn$; mais l'intégrale de Nn est l'arc LN , donc $t = \frac{2\sqrt{2a} \times LN}{2r}$;

or quand t marque le tems le long de l'arc entier HB , l'arc LN devient égal à la demi-circonférence LNB , donc on a alors $t = \frac{2\sqrt{2a} \times LNB}{2r}$, d'où l'on tire $2r, LNB :: 2\sqrt{2a}, t$, mais $2\sqrt{2a}$

$= \frac{2\sqrt{2a} \times \sqrt{2a}}{\sqrt{2a}} = \frac{2 \times 2a}{\sqrt{2a}} = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$; or $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$ est la moitié de la vitesse acquise à la fin de ZB , c'est-à-dire acquise en B , & si le mouvement le long de ZB étoit uniforme, le corps parcourroit ZB avec la vitesse $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$, dans le même tems qu'il le parcourt avec son mouvement accéléré, donc l'espace ZB ou $2a$ seroit $T \times \frac{1}{2}\sqrt{2a}$

$\sqrt{2a}$ en nommant le tems T (N. 17.) & par conséquent on auroit $T \times \frac{1}{2}\sqrt{2a} = 2a$, donc $T = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}} = 2\sqrt{2a}$, c'est-à-dire que $2\sqrt{2a}$ exprime le tems que le corps employeroit à parcourir ZB avec la vitesse uniforme $\frac{1}{2}\sqrt{2a}$, & par conséquent celui qu'il emploie à parcourir le même espace avec son mouvement uniformément accéléré; puis donc que nous avons $2r$, $LNB : 2\sqrt{2a}$, t , ou t , $2\sqrt{2a} : LNB$, $2r$; il s'ensuit que le tems de la descente le long de l'arc HB , est au tems de la descente le long du diamètre du cercle générateur, comme la circonférence du demi-cercle LNB est au diamètre $2r$ de ce demi-cercle; mais le rapport du diamètre à la demi-circonférence est le même dans tous les cercles, donc le tems de la descente le long de HB , ou de la demi-vibration HB , est au tems de la descente le long du diamètre du cercle générateur, comme la demi-circonférence du cercle générateur est à son diamètre.

Mais la vibration IIV est double de HB , donc le tems de cette vibration est à celui de la descente le long du diamètre ZB comme la circonférence du cercle générateur est au diamètre ZB .

PROPOSITION LXXXII.

236. *La pesanteur des corps est moindre dans les lieux où les vibrations d'un même pendule sont plus lentes, & elle est plus grande dans les lieux où les vibrations se font plus promptement.*

DEMONSTRATION

Le tems de la vibration CBD (Fig. 107.) est au tems de la descente le long du diamètre ZB de la cycloïde comme la circonférence du cercle générateur est à son diamètre, & ce rapport est constant, donc si le tems de la vibration CBD devient plus grand, le tems de la descente le long de ZB devient aussi plus grand; mais quand le tems de la descente le long de ZB devient plus grand, le mouvement est moindre puisqu'il y a moins de vitesse, donc la pesanteur qui est la cause de ce mouvement est aussi moindre.

Et on prouvera de la même façon que si les vibrations du pendule se font plus promptement, la pesanteur est plus grande.

PROPOSITION LXXXIII.

237. *Si deux pendules CA , EF (Fig. 108.) font leurs vibrations*
G g

sur deux arcs semblables, le tems d'une vibration du premier CA est au tems de la vibration du second EF, comme la racine quarrée de la longueur CA est à la racine quarrée de la longueur EF.

DEMONSTRATION.

Si les deux arcs DB, GH sont des arcs de cycloïde, le tems de la vibration DB sera au tems de la descente le long du diamètre du cercle générateur, c'est-à-dire le long de $\frac{1}{2}$ CA comme la circonférence du cercle au diamètre, de même le tems de la vibration GH est au tems de la descente le long du diamètre du cercle générateur, c'est-à-dire, le long de $\frac{1}{2}$ EF, comme la circonférence du cercle est au diamètre; donc le tems de la vibration DB est au tems de la vibration GH, comme le tems de la descente le long de $\frac{1}{2}$ CA est au tems de la descente le long de $\frac{1}{2}$ EF, ou comme $\sqrt{\frac{1}{2}CA}$ est à $\sqrt{\frac{1}{2}EF}$, ou enfin comme \sqrt{CA} est à \sqrt{EF} .

Les vibrations sur différens arcs d'une même cycloïde étant toutes égales entr'elles (N. 233.), il est visible qu'il n'est pas nécessaire que les arcs DB, GH soient semblables, pour faire que les tems des vibrations des deux pendules soient entr'eux comme les racines quarrées des longueurs.

Si les arcs DB, GH, sont des arcs semblables de cercles; le tems de la descente le long de DA est au tems de la descente le long de GF, comme \sqrt{DA} est à \sqrt{GF} (N. 205); mais à cause de la similitude des arcs DA, GF, on a DA, GF :: CA, EF, donc \sqrt{DA} , \sqrt{GF} :: \sqrt{CA} , \sqrt{EF} , & par conséquent le tems de la descente le long de DA est au tems de la descente le long de GF, comme \sqrt{CA} est à \sqrt{EF} ; d'où il suit que le tems de la vibration entiere DB est au tems de la vibration entiere GH comme \sqrt{CA} est à \sqrt{EF} .

COROLLAIRE.

238. Donc quand les arcs sont semblables, les longueurs CA, EF des pendules, sont entr'elles comme les quarrés des tems des vibrations DB, GH.

PROPOSITION LXXXIV.

239. Si deux pendules sont isochrones, c'est-à-dire, si toutes leurs vibrations se font dans des tems égaux sans que le tems d'une vibration de l'un, soit égal au tems d'une vibration de l'autre, le nombre

des vibrations que le premier fera dans un tems déterminé, sera au nombre des vibrations que le second fera dans le même tems reciproquement, comme le tems que le second employe à une de ses vibrations est au tems que le premier employe à une des siennes.

DEMONSTRATION.

Je nomme b le nombre des vibrations que le premier pendule fait pendant le tems $= a$, & mb le nombre des vibrations que le second fait dans le même tems; la lettre m signifie un nombre tel qu'on voudra, entier ou rompu, puisque les vibrations du premier pendule se font toutes dans des tems égaux, si je divise le tems total a de ses vibrations par leur nombre b , le quotient $\frac{a}{b}$ sera la valeur du tems de l'une de ses vibrations, par la même raison, si je divise le tems total a des vibrations du second pendule par leur nombre mb , le quotient $\frac{a}{mb}$ sera la valeur du tems de l'une de ses vibrations, donc le tems d'une vibration du premier est au tems d'une vibration du second, comme $\frac{a}{b}$ est à $\frac{a}{mb}$; ou comme amb est à ab , ou comme mb est à b , c'est-à-dire, reciproquement comme le nombre des vibrations du second au nombre des vibrations du premier; & par conséquent le nombre des vibrations du premier est au nombre des vibrations du second, reciproquement comme le tems d'une vibration du second est au tems d'une vibration du premier.

COROLLAIRE.

240. *Donc les longueurs des pendules isochrones sont entr'elles en raison doublée de la raison reciproque des quarrés des nombres des vibrations; car le tems de chaque vibration du premier étant au tems de chaque vibration du second, comme la racine de la longueur du premier est à la racine de la longueur du second (N. 237), & le tems de chaque vibration du premier étant au tems de chaque vibration du second, reciproquement comme le nombre des vibrations du second est au nombre des vibrations du premier (N. 239), il s'ensuit que la racine de la longueur du premier est à la longueur de la racine du second, reciproquement comme le nombre des vibrations du premier est au nombre des vibrations du second, & que par conséquent la longueur du premier est à la longueur du second, reciproquement comme le*

quarré du nombre des vibrations du second est au quarré du nombre des vibrations du premier.

PROPOSITION LXXXV.

241. *Les longueurs de deux pendules suspendus entre différentes cycloïdes sont comme les quarrés des tems d'une vibration de l'un & d'une vibration de l'autre.*

DEMONSTRATION.

Supposons que les arcs DB, GH (Fig. 108.) représentent des cycloïdes, le tems de la vibration DB est au tems de la descente le long du diamètre du cercle générateur, c'est-à-dire le long de $\frac{1}{2}CA$, comme la circonférence du cercle au diamètre; & de même le tems de la vibration GH est au tems de la descente le long du diamètre du cercle générateur, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}EF$, comme la circonférence du cercle au diamètre, donc le tems de la vibration DB est au tems de la vibration GH, comme $\sqrt{\frac{1}{2}CA}$ est à $\sqrt{\frac{1}{2}EF}$, ou comme \sqrt{CA} est à \sqrt{EF} ; ainsi \sqrt{CA} , \sqrt{EF} expriment les tems des vibrations DB, GH, mais CA, EF sont les quarrés de \sqrt{CA} , \sqrt{EF} ; donc les longueurs CA, EF sont entr'elles comme les quarrés des tems des vibrations DB, GH.

COROLLAIRE.

242. Donc les tems des vibrations DB, GH sont comme les racines quarrées des longueurs CA, EF.

PROPOSITION LXXXVI.

243. *La vitesse qu'un pendule FB (Fig. 109.) qui décrit des arcs de cercle, à acquise au point B le plus bas d'une demi-vibration EB, est à la vitesse qu'il auroit acquise en descendant le long du double AB de sa longueur FB, comme la corde EB de l'arc que le pendule décrit est au diamètre AB du cercle de cet arc ou au double de la longueur.*

DEMONSTRATION.

Du point E je mene l'ordonnée EP, & la droite PB est la hauteur de la demi-vibration EB; or la vitesse acquise à la fin de EB est égale à la vitesse que le corps acquerroit en descendant

de P en B (N. 197), & la vitesse acquise en descendant de P en B, est à la vitesse acquise en tombant de A en B, comme \sqrt{BP} est à \sqrt{AB} , donc la vitesse acquise à la fin de EB, est à la vitesse acquise à la fin de AB, comme \sqrt{EB} est à \sqrt{AB} ; mais par la propriété du cercle on a :: BA, BE, BP, donc BE, BA :: \sqrt{BP} , \sqrt{AB} , & par conséquent la vitesse acquise à la fin de EB, est à la vitesse acquise à la fin de AB, comme la corde BE est au diamètre AB.

COROLLAIRE.

244. Si nous prenons une autre demi-vibration DB, nous aurons donc la vitesse acquise à la fin de DB est à la vitesse acquise à la fin de AB comme la corde DB est au diamètre AB; donc la vitesse acquise à la fin de la demi-vibration EB, est à la vitesse acquise à la fin de la demi-vibration DB, comme la corde EB est à la corde DB.

PROPOSITION LXXXVII.

245. Trouver la durée d'une demi-vibration NB (Fig. 110.) d'un pendule CB, dont l'arc NB n'est pas bien grand, en supposant que la force qui accélère le mouvement du pendule étant uniforme ou toujours la même, soit cependant moindre ou plus grande que la pesanteur.

SOLUTION.

Supposant que les arcs NB, MB décrits par le pendule ne soient pas bien grands, & que AB soit double de la longueur CB, du pendule, je nomme CB = a , BP = x , BQ = b ce qui donne AB = $2a$, & QP = $b - x$.

Par la propriété du cercle j'ai :: AB, BN, BQ, ou :: $2a$, BN, b , donc $\overline{BN}^2 = 2ab$, & $BN = \sqrt{2ab}$; par la même propriété j'ai :: AB, BM, BP, ou :: $2a$, BM, x , donc $\overline{BM}^2 = 2ax$ & $BM = \sqrt{2ax}$; or les arcs BN, BM n'étant pas bien grands, ils ne différeront pas beaucoup de leurs cordes, ainsi j'ai $BN = \sqrt{2 \cdot b}$, & $BM = \sqrt{2ax}$, & par conséquent l'arc NM = $BN - BM = \sqrt{2ab} - \sqrt{2ax}$, & la différence de cet arc NM, c'est-à-dire, le petit arc Mm = $-\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{2a} = \frac{-dx \sqrt{2a}}{2\sqrt{x}}$, ou bien en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{2}$, j'ai $Mm = \frac{-dx \sqrt{a}}{\sqrt{2x}}$.

G g ii j

Je nomme la force motrice $=g$, & la masse $=m$; or la force motrice g étant constante par la supposition, de même que la pesanteur est constante selon la loi de Galilée, il est évident que la vitesse acquise à la fin de NM est égale à la vitesse acquise à la fin de la hauteur QB (N. 197), puisque le mouvement sera toujours uniformément accéléré de même que dans la loi de Galilée, à la seule différence que la vitesse acquise en M ou en P sera plus grande ou moindre que celle que la pesanteur feroit acquérir en M ou en P, selon que g sera plus grand ou moindre que la pesanteur; mais si nous nommions $QP=r$ & la vitesse acquise $=u$, nous aurions $\int g dr = \frac{1}{2} mu^2$ (N. 84) donc puisque $QP=b-x$, & que sa différence est $\frac{-dx}{b-x}$, nous aurons $\int g \times \frac{-dx}{b-x}$
 $= \frac{1}{2} mu^2$, ou $gb-gx = \frac{1}{2} mu^2$, donc $\frac{2gb-2gx}{m} = u^2$, &

$$\frac{\sqrt{2gb-2gx}}{\sqrt{m}} = u.$$

L'arc Mm étant infiniment petit, le mouvement pendant la descente le long de cet arc peut être pris pour uniforme, ainsi l'espace $Mm = udt$ (N. 17), & par conséquent $dt = \frac{Mm}{u}$, & met-

tant les valeurs de Mm & de u , on aura $dt = \frac{-dx\sqrt{m}\sqrt{a}}{\sqrt{2x}\sqrt{2gb-2gx}}$
 $= \frac{-dx\sqrt{am}}{\sqrt{4bx-4xx} \times \sqrt{g}} = \frac{-dx\sqrt{am}}{\sqrt{bx-xx} \times \sqrt{g}}$; or si l'on cherche la valeur de l'arc AR, ainsi que nous l'avons déjà fait plusieurs fois dans cet Ouvrage, on trouvera $BR = \int \frac{b dx}{2\sqrt{bx-xx}}$, donc l'arc restant $RQ = \int \frac{-b dx}{2\sqrt{bx-xx}}$, à cause que la différence Rr est négative par rapport à l'arc RQ; donc l'élément de RQ fera $\frac{-b dx}{2\sqrt{bx-xx}}$, & par conséquent $\frac{-dx}{\sqrt{bx-xx}}$ sera égal à cet élément divisé par $\frac{1}{2}b$.

Je suppose l'élément $\frac{-b dx}{2\sqrt{bx-xx}} = dz$, donc divisant par $\frac{1}{2}b$, j'ai $\frac{-dx}{\sqrt{bx-xx}} = \frac{2dz}{b}$, & substituant cette valeur dans celle de dt que nous avons trouvée ci-dessus, j'ai $dt = \frac{2dx\sqrt{am}}{b \times 2\sqrt{g}} = \frac{dz\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$, donc $t = \frac{\sqrt{am}}{b\sqrt{g}} \times \int dz = \frac{2\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$; or dz étant égal à l'élément de

l'arc RQ, cet arc est donc z , ainsi en mettant les grandeurs représentées par a & b , on a $t = \frac{RO \times \sqrt{AB} \times \sqrt{m}}{BQ \times \sqrt{g}}$.

Maintenant si l'on suppose que l'arc RQ devienne égal à la demi-circonférence QRB, on aura $t = \frac{QRB \times \sqrt{AB} \times \sqrt{m}}{BQ \times \sqrt{g}}$, supposant donc que $\sqrt{m} = \sqrt{g}$ comme dans la loi de Galilée, on aura $t = \frac{QRB \times \sqrt{AB}}{BQ}$, d'où l'on tire t , $\sqrt{AB} :: QRB, BQ$, c'est-à-dire, le tems de la descente le long de l'arc NB est au tems de la descente le long de AB, ou du double de la longueur du pendule, comme la demi-circonférence du cercle est au diamètre; ce qui ne doit s'entendre que lorsque l'arc BN n'est pas bien grand, comme nous l'avons déjà dit, à cause que nous avons supposé que la corde BN ne différoit pas beaucoup de l'arc BN.

Si l'on suppose par exemple $g = 4m$, on aura $t = \frac{QRB \times \sqrt{AB} \times \sqrt{m}}{BQ \times \sqrt{4}} = \frac{QRB \times \sqrt{AB}}{2BQ}$, d'où l'on tire t , $\sqrt{AB} :: QRB, 2BQ$, c'est-à-dire, le tems de la descente le long de l'arc BN est à celui de la descente le long du double de la longueur du pendule, comme la circonférence du cercle est au double du diamètre, & ainsi des autres.

PROPOSITION LXXXVIII.

246. Deux pendules inégaux étant donnés, & supposant, comme dans la Proposition précédente, qu'ils fassent leurs vibrations sur des arcs qui ne sont pas bien grands, & que les forces qui les agitent soient différentes de leurs pesanteurs; les tems de leurs vibrations sont en raison composée de trois raisons, dont la première est la raison directe des racines des longueurs, la seconde la raison directe des racines des masses, & la troisième la raison inverse de la racine des forces, lesquelles nous supposons uniformes comme les pesanteurs.

DEMONSTRATION.

Il faut se ressouvenir que quand les pendules font leurs vibrations sur des arcs qui ne sont pas bien grands, toutes leurs vibrations sont isochrones, & qu'ainsi les deux pendules que nous comparons ici ont leurs vibrations isochrones, quoique le tems de chaque vibration de l'un ne soit pas égal au tems de chaque vibration de l'autre, cela posé.

Je nomme L la longueur du premier pendule, T le tems d'une oscillation, M la masse, & G la force qui le meut; je nomme l la longueur du second pendule, t le tems d'une oscillation, m la masse, & g la force qui le meut.

Par la Proposition précédente j'ai $T = \frac{QRB \times \sqrt{2L} \times \sqrt{M}}{BQ \times \sqrt{G}}$ & $t = \frac{qrb \times \sqrt{2l} \times \sqrt{m}}{bq \times \sqrt{g}}$; le rapport $\frac{QRB}{BQ}$ signifie le rapport de la circonférence au diamètre, comme on a vû dans la Proposition précédente, & $\frac{qrb}{bq}$ exprime aussi ce même rapport; car soit que le diamètre soit plus grand ou moindre, le rapport de la circonférence au diamètre est toujours le même, donc $T, t :: \frac{QRB \times \sqrt{2L} \times \sqrt{M}}{BQ \times \sqrt{G}}, \frac{qrb \times \sqrt{2l} \times \sqrt{m}}{bq \times \sqrt{g}} :: \frac{\sqrt{2L} \times \sqrt{M}}{\sqrt{G}}, \frac{\sqrt{2l} \times \sqrt{m}}{\sqrt{g}} :: \sqrt{g} \times \sqrt{L} \times \sqrt{M}, \sqrt{G} \times \sqrt{l} \times \sqrt{m}$.

PROPOSITION. LXXXIX.

247. Supposant toujours que les forces qui agitent deux pendules soient différentes des pesanteurs, je dis que si les longueurs sont égales, les masses que nous supposons inégales sont entr'elles en raison composée des forces, & de la raison des quarrés des tems.

DEMONSTRATION.

Par la Proposition précédente $T, t :: \frac{\sqrt{L} \times \sqrt{M}}{\sqrt{G}}, \frac{\sqrt{l} \times \sqrt{m}}{\sqrt{g}}$, & à cause des longueurs égales nous avons $T, t :: \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{G}}, \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{g}}$; donc $T^2, t^2 :: \frac{M}{G}, \frac{m}{g}$, d'où l'on tire $M, m :: T^2 G, t^2 g$.

COROLLAIRE I.

248. Si $T = t$, on aura $M, m :: G, g$, c'est-à-dire, si les tems sont égaux, les masses seront comme les forces.

COROLLAIRE II.

249. Si G, g , on aura $M, m :: T^2, t^2$, c'est-à-dire, les forces étant égales, les masses seront comme les quarrés des tems.

COROLLAIRE III

COROLLAIRE III.

250. Si M, m , on aura $T^2 G = t^2 g$, donc $G, g :: t^2, T^2$, c'est-à-dire, les masses étant égales, les forces sont entr'elles reciproquement comme les quarrés des tems.

COROLLAIRE IV.

251. Puisque nous avons $T, t :: \frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{G}}, \frac{\sqrt{lm}}{\sqrt{g}}$, donc $T^2, t^2 :: \frac{LM}{G}, \frac{lm}{g}$, & par conséquent $T^2 G, t^2 g :: LM, lm$; or si l'on suppose $T = t$, & $M = m$, on aura $G, g :: L, l$, c'est-à-dire, si les tems sont égaux & les masses aussi, & que les longueurs soient inégales, les forces sont comme les longueurs.

COROLLAIRE V.

252. Puisque $T^2 G, t^2 g :: LM, lm$, donc $\frac{T^2 G}{L}, \frac{t^2 g}{l} :: M, m$, & $T^2 G l, t^2 g L :: M, m$, c'est-à-dire qu'en supposant les longueurs inégales, les masses sont en raison composée de la raison directe des quarrés des tems, de la raison directe des forces, & de la raison reciproque des longueurs.

COROLLAIRE VI.

253. Si $M = m$, on a $T^2 G l = t^2 g L$, donc $T^2, t^2 :: g L, G l$, & $T, t :: \sqrt{g L}, \sqrt{G l}$, c'est-à-dire, si les masses sont égales les tems sont en raison composée de la raison directe des racines des longueurs, & de la raison reciproque des racines des forces.

COROLLAIRE VII.

254. Si $M = m$, & $T = t$, on a $g L = G l$, donc $G, g :: L, l$; c'est-à-dire si les masses sont égales & les tems aussi, les forces sont entr'elles comme les longueurs.

COROLLAIRE VIII.

255. Si $M = m$, & $L = l$, on a $T^2 G = t^2 g$; donc $T^2, t^2 :: g, G$, & $T, t :: \sqrt{g}, \sqrt{G}$, c'est-à-dire, si les masses sont égales, & les lon-
H h

guez, & les tems sont entr'eux comme les racines des forces.

COROLLAIRE IX.

256. Si $M=m$, & $G=g$, on a $T^2/l = t^2/L$, donc $T^2, t^2 :: L, l$, & $T, t :: \sqrt{L}, \sqrt{l}$, c'est-à-dire, si les masses sont égales & les forces aussi, les tems sont entr'eux comme les racines des longueurs.

PROPOSITION XC.

257. Supposant toujours que les forces qui agitent deux pendules sont différentes de leur pesanteurs, & que les arcs sur lesquels se font les vibrations soient petits, les nombres des vibrations que ces deux pendules font dans un même tems déterminé sont en raison composée de la raison réciproque des racines des masses, de la raison réciproque des racines des longueurs, & de la raison directe des racines des forces.

DEMONSTRATION.

Nommant N le nombre de vibrations du premier, & n le nombre de vibrations du second, nous avons N est à n réciproquement comme le tems d'une vibration du second est au tems d'une vibration du premier (N. 239.) Or par la proposition précédente (N. 247.) nous avons $T, t :: \frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{G}}, \frac{\sqrt{lm}}{\sqrt{g}} :: \sqrt{LMg}, \sqrt{lmG}$, donc $N, n :: \sqrt{lmG}, \sqrt{LMg} :: \sqrt{l} \times \sqrt{m} \times \sqrt{G}, \sqrt{L} \times \sqrt{M} \times \sqrt{g}$.

COROLLAIRE I.

258. Si $M=m$, on a $N, n :: \sqrt{l} \times \sqrt{G}, \sqrt{L} \times \sqrt{g}$, c'est-à-dire, si les masses sont égales, les nombres de vibrations sont en raison composée de la raison inverse des racines des longueurs, & de la raison directe des racines des forces.

COROLLAIRE II.

259. Si $L=l$, on a $N, n :: \sqrt{m} \times \sqrt{G}, \sqrt{M} \times \sqrt{g}$, c'est-à-dire, les longueurs étant égales, les nombres de vibrations sont en raison composée de la raison indirecte des racines des masses, & de la raison directe des racines des forces.

COROLLAIRE III.

260. Si $G=g$, on aura $N, n :: \sqrt{l} \times \sqrt{m}, \sqrt{L} \times \sqrt{M}$, ou les nombres des vibrations sont entr'eux en raison composée de la raison indirecte des racines des longueurs & de la raison indirecte des racines des masses.

COROLLAIRE IV.

261. Si $M=m$, & $L=l$, on aura $N, n :: \sqrt{G}, \sqrt{g}$, c'est-à-dire les nombres d'oscillations sont entr'eux comme les racines des forces.

De même, si $M=m$, & $G=g$, on aura $N, n :: \sqrt{L}, \sqrt{l}$, c'est-à-dire, les nombres des vibrations sont entr'eux réciproquement comme les racines des longueurs, & il est aisé de tirer d'autres Corollaires semblables de cette proposition.

DEFINITIONS.

262. On appelle *centre d'oscillation* le point d'un pendule composé, auquel si l'on transportoit tous les poids attachés en différens endroits de la longueur, chaque vibration se feroit encore dans un tems égal à celui que le pendule composé employoit pour les faire; d'où il suit que la distance du centre d'oscillation d'un pendule composé au point de suspension ou au centre du mouvement est égale à la longueur d'un pendule simple dont les vibrations seroient isocrones à celles du pendule composé.

REMARQUE.

263. Ne pouvant se faire que la longueur d'un pendule simple ne soit de quelque matiere, & cette matiere quelque déliée qu'elle soit ayant toujours une pesanteur, il est évident qu'il n'est pas possible d'avoir à la rigueur un pendule simple, & que tout ce qu'on peut faire de mieux quand on veut faire des expériences qui approchent de tout ce que nous avons dit jusqu'ici touchant le pendule, c'est de se servir d'un fil extrêmement délié, & d'y attacher un poids qui soit d'une matiere extrêmement compacte, ou qui pese beaucoup sous un petit volume, parce que la résistance de l'air de laquelle nous avons fait abstraction, de même que de la pesanteur de la longueur du pendule, a moins de prise sur des corps de cette nature que sur les autres.

PROPOSITION XCI.

264. Trouver le centre d'oscillation d'un pendule composé.

H h ij

que les trois corps parviendront à la verticale AQ dans un même tems, ainsi les vibrations ne seront plus qu'en raison composée des masses & des vitesses, mais comme les vitesses seront dans la même raison des arcs BM, CP, DQ, qui auront été parcourus dans le même tems, & que ces arcs sont comme les distances, il s'ensuit que les vibrations seront entr'elles comme les produits des masses par les distances de même qu'auparavant, & tout ce qui sera arrivé, c'est que les corps plus proches de A n'iront pas si vite qu'auparavant, & ceux qui en seront plus éloignés iront plus vite, de façon que ce que les uns auront perdu du tems, les autres le gagneront, & que le mouvement du pendule se fera dans un tems moyen entre les tems des différentes vibrations des pendules séparés; puis donc que la réunion des pendules a fait cesser la différence des tems en donnant un tems moyen, il est clair que pour faire cesser la différence des vibrations, laquelle provient des différences des longueurs, il n'y a qu'à chercher une longueur moyenne, or pour cela

Je conçois ces vibrations, c'est à-dire les produits $B \times BA$, $C \times CA$, $D \times DA$, des masses par les distances comme autant de poids attachés aux points B, C, D, & il est visible par les règles que nous avons données dans le Chapitre du centre de gravité, que si nous multiplions ces poids par leur distances, & que nous divisons la somme des produits par la somme des poids, le quotient sera la longueur cherchée AH, ainsi nous aurons

$$\frac{B \times \overline{BA} + C \times \overline{CA} + D \times \overline{DA}}{B \times BA + C \times CA + D \times DA} = AH,$$
 c'est-à-dire, la somme du produit des masses par les quarrés de leur distances étant divisée par la somme du produit des masses par les distances, est égale à la longueur ou distance à laquelle tous les poids doivent être attachés pour avoir un pendule simple qui fasse ses vibrations en même tems que le composé.

R E M A R Q U E.

265. C'est en suivant ce principe qu'on trouve les centres d'oscillation des lignes, des figures & des solides qui tournent autour d'un axe, j'en ai traité assez amplement dans *le Calcul Différentiel & Intégral*, c'est pourquoi je me dispenserai d'en parler ici; d'autant plus que la quantité des matieres qui nous restent à éclaircir me fait déjà craindre que cet ouvrage ne devienne trop long.

CHAPITRE X.

Du Mouvement des Corps projetés.

DEFINITIONS.

266. **O**N dit qu'un corps est *projeté perpendiculairement*, lorsqu'on le pousse selon une direction perpendiculaire à l'horizon, qu'il est *projeté horizontalement*, lorsqu'il est poussé selon une direction horizontale, enfin qu'il est *projeté obliquement* lorsqu'on le pousse selon une direction oblique à l'horizon, & alors l'angle que la ligne de direction fait avec la ligne horizontale s'appelle angle de direction.

PROPOSITION XCII.

267. *Si un corps est projeté perpendiculairement à l'horizon, son mouvement est toujours perpendiculaire à l'horizon.*

DEMONSTRATION.

Un corps suit toujours sa première direction, à moins qu'il n'y ait quelque cause qui l'oblige de changer; or quand un corps est projeté perpendiculairement à l'horizon, rien ne l'oblige de changer de direction; car sa pesanteur qui retarde peu à peu son mouvement lorsqu'il monte, ou qui l'accélère lorsqu'il descend a aussi une direction perpendiculaire à l'horizon; donc le corps suit toujours sa première direction.

PROPOSITION XCIII.

268. *Si un corps A (Fig. 112.) est projeté horizontalement, il décrit par son mouvement une parabole AMPR.*

DEMONSTRATION.

Lorsque le corps est projeté horizontalement, sa pesanteur ne laisse pas que d'agir, & par conséquent le mouvement de ce corps est composé de deux mouvemens, dont le premier est causé par une force qui a la direction horizontale AD, & le second est causé par la pesanteur qui a la direction perpendiculaire

AQ ; or le mouvement causé par la premiere force étant uniforme , si le corps dans une minute parcourt l'espace AB , dans deux minutes il parcourra l'espace AC double de AB , & dans trois il parcourra l'espace AD triple de AB , &c. mais le mouvement causé par la pesanteur étant uniformement acceleré , si le corps à la fin de la premiere minute a parcouru l'espace AE , il aura parcouru à la fin de deux minutes l'espace AN quadruple de AE , à la fin de trois minutes l'espace AQ neuf fois plus grand que AE , &c. c'est-à-dire que les espaces que la pesanteur fera parcourir seront comme les quarez des espaces que la force qui a la direction AD fait parcourir dans les mêmes tems , puis donc que la pesanteur & la force qui a la direction AD agissent en même tems , il est clair qu'en achevant les parallelogrammes AM , AP , AR , &c. le corps se trouvera en M à la fin de la premiere minute , en P à la fin de la seconde , en R à la fin de la troisieme , &c. donc ce corps décrira la courbe AMPR ; or les ordonnées EM , NP , QR de cette courbe sont égales aux espaces AB , AC , AD , &c. que la force qui a la direction AD fait parcourir , & les abscisses AE , AN , AQ , &c. sont les espaces que la pesanteur fait parcourir dans les mêmes tems , donc les abscisses de cette courbe sont entr'elles comme les quarez des ordonnées ; or c'est la propriété de la parabole quarrée , donc la courbe ANPR est une parabole quarrée , donc , &c.

R E M A R Q U E.

269. Nous supposons que le corps A se trouvant aux points A , M , P , R , &c. sa pesanteur le pousse selon des directions AQ , BM , CP , DR , &c. paralleles entr'elles , ce qui n'est pas vrai , puisque la pesanteur poussant le corps vers le centre de la terre , toutes ces directions doivent se joindre au centre , cependant comme le centre de la terre est extrêmement éloigné de sa surface , & qu'au contraire les corps qu'on projette sont à une distance fort petite de cette surface , surtout si on compare cette distance avec celle de la surface au centre , & que d'autre part la partie de la surface de la terre que la projection embrasse , c'est-à-dire la droite AD est fort petite à l'égard de toute la circonférence , il est sûr que le non parallelisme des directions est imperceptible , & qu'on peut regarder ces directions comme paralleles sans craindre de tomber dans quelque erreur

qui puisse se faire sentir. Nous donnerons cependant à la fin de ce Chapitre la façon de trouver la courbe AMPR, en supposant les directions *convergentes*, c'est-à-dire en supposant qu'elles vont toutes aboutir à un point.

PROPOSITION XCIV.

270. Si un corps A (Fig. 113.) est projeté selon une direction oblique AD, la courbe AMPR qu'il décrit pendant son mouvement, est encore une parabole.

DEMONSTRATION.

La Demonstration est la même que celle de la Proposition précédente; car le corps étant poussé par la force AD, & par la pesanteur AQ son mouvement est composé; or selon le premier mouvement il décriroit dans une minute, dans deux, dans trois, &c. les espaces AB, AC, AD, &c. qui seroient comme 1, 2, 3, &c. & par le second il décriroit dans les mêmes tems des espaces AE, AN, AQ, &c. qui seroient comme les quarez de AB, AC, AD, &c. ou comme les quarez 1, 4, 9, &c. achevant donc les parallelogrammes AM, AP, AR, &c. le corps passera par les points A, M, P, R, &c. & décrira par conséquent la courbe AMPR dont les abscisses AE, AN, AQ, &c. sont comme les quarez des ordonnées EM, NP, QR, &c. d'où il suit que cette courbe est une parabole.

De même si le corps est projeté selon la direction oblique AD (Fig. 114.) de haut en bas, la courbe AMP que le corps décrira sera une parabole, ce que l'on prouvera de la même façon, ainsi que la figure le fait voir.

COROLLAIRE I.

271. Si par la propriété de la parabole le parametre est trois fois proportionnel à l'abscisse & à son ordonnée; donc si l'on prend pour abscisse la droite AE que la pesanteur peut faire parcourir au corps dans une minute, l'ordonnée EM sera l'espace que la force qui a la direction AD peut faire parcourir dans la même minute, & par conséquent si l'espace AE & l'espace AB ou EM sont connus, on connoitra aisément le parametre du diametre AQ.

COROLLAIRE II.

272. L'espace AB que la force qui a la direction AD peut faire

faire parcourir dans une minute peut représenter la vitesse du corps projeté ; or si plusieurs corps projetés ont la même vitesse, c'est-à-dire, si dans une minute ces corps parcourent des espaces égaux chacun a AB, les espaces que la pesanteur leur fait parcourir dans la même minute étant égaux chacun à l'espace AE, les parametres des diametres AQ des paraboles décrites par le mouvement de ces corps seront les mêmes.

COROLLAIRE III.

273. La ligne de direction AD est tangente de la parabole ; ce qui n'a pas besoin de Demonstration.

DEFINITION.

274. Si du point A qui est l'origine de la projection, on mene une droite horizontale AR (Fig. 115.) qui coupe la parabole en R, la droite AR s'appellera *amplitude* de la parabole, ce qui doit s'entendre dans les paraboles décrites par les corps projetés de bas en haut.

PROPOSITION XCV.

275. Lorsqu'un corps est projeté (Fig. 115.) les espaces horizontaux qui répondent aux arcs de parabole parcourus dans des tems égaux, sont égaux.

DEMONSTRATION.

La ligne de direction AD étant divisée en parties égales AB, BC, CD, ces parties représentent les espaces que la force qui a la direction AD feroit parcourir au corps dans des tems égaux, & les arcs AM, MP, PR, représentent les espaces de la parabole parcourus dans des tems égaux ; or si l'on prolonge les droites BM, CP, &c. jusqu'à ce qu'elles coupent la ligne horizontale AR aux points b, c, &c. il est visible que les espaces Ab, bc, cR repondront aux arcs AM, MP, PR ; mais à cause des triangles semblables ABb, ACc, ADR, les espaces Ab, bc, cR seront entr'eux comme les espaces AB, BC, CR ; donc ils seront égaux entr'eux, & par conséquent, &c.

PROPOSITION XCVI.

276. L'angle d'élevation DAR (Fig. 115.) étant donné, & l'amplitude AR trouver le parametre du diametre AQ de la parabole.

SOLUTION.

Je nomme r le sinus total, a le sinus de l'angle DAR d'élevation, b le sinus de son complément à l'angle droit, c l'amplitude AR, & x le paramètre cherché ; l'angle DAR étant connu & l'amplitude AR, tout le triangle rectangle DAR est aisé à connoître. Prenant donc pour sinus total l'hypoténuse AD, il est clair que la droite DR sera le sinus de l'angle d'élevation, & la droite AR le sinus de son complément à l'angle droit, donc j'ai $b, a :: AR, DR$, ou $b, a :: c, DR$, donc $DR = \frac{ac}{b}$, mais $DR = AQ$, donc $AQ = \frac{ac}{b}$.

Dans le même triangle DAR, j'ai $b, r :: AR, AD$, ou $b, r :: c, AD$, donc $AD = \frac{rc}{b}$; or par la propriété de la parabole, j'ai $x \times AQ = \overline{QR}^2 = \overline{AD}^2$, donc $x \times \frac{ac}{b} = \frac{r^2 c^2}{b^2}$, d'où je tire $ax = \frac{r^2 c}{b}$ & $x = \frac{r^2 c}{ab}$ qui donne cette analogie $a, \frac{r^2}{b} :: c, x$.

Mais $\frac{r^2}{b}$ est la sécante de l'angle d'élevation DAB, car si du centre A & du rayon AD je décris l'arc AZ, & que du point Z je mene ZX parallèle à DR, il est visible que ZX sera la tangente de l'angle d'élevation, & AX sa sécante ; or les triangles semblables ARD, AZX donnent AR, AD :: AZ, AX, mais AD = AZ, donc : AR, AD, AX, ou :: b, r, AX , ce qui donne $\frac{r^2}{b} = AX$.

Puis donc que nous avons $a, \frac{r^2}{b} :: c, x$, il s'ensuit que le paramètre x est troisième proportionnel au sinus de l'angle d'élevation, à la sécante de cet angle & à l'amplitude de la parabole, ou, ce qui revient au même, l'amplitude est au paramètre du diamètre AQ, comme le sinus de l'angle d'élevation est à sa sécante.

COROLLAIRE I.

277. Puisque nous avons $ax = \frac{r^2 c}{b}$, donc $2ax = \frac{2r^2 c}{b}$, & $2abx = 2r^2 c$, ou $\frac{2abx}{2r^2} = c$, d'où l'on tire cette analogie $r, \frac{2ab}{r} :: \frac{1}{2}x, c$, mais $\frac{2ab}{r}$ est le sinus d'un angle double de l'angle d'élevation,

tion, & tantôt sous un autre a toujours la même vitesse, la plus grande amplitude est celle de la parabole qu'il décrit lorsque son angle d'élevation est de 45 degrés, & les amplitudes des angles d'élevation qui s'éloignent également de 45 degrés l'un au-dessous & l'autre au-dessus sont égales entr'elles.

DEMONSTRATION.

La vitesse étant toujours la même dans les différentes projections du corps, les amplitudes des différentes paraboles qu'il décrit sont comme les sinus des angles doubles des angles d'élevation (N. 278); or quand l'angle d'élevation est de 45 degrés le double de cet angle est un angle droit dont le sinus est le plus grand de tous les sinus; donc l'amplitude est alors la plus grande, puisqu'elle est comme le plus grand sinus.

En second lieu, quand deux angles sont également éloignés de l'angle de 45 degrés, l'un en dessous & l'autre en dessus, les doubles de ces angles sont également éloignés de l'angle droit; or les sinus des angles également éloignés de l'angle droit sont égaux, donc quand le corps est projeté d'abord sous un angle moindre de 45 degrés & ensuite sous un angle qui est autant au-dessus de 45 degrés que le premier est au-dessous, les amplitudes des deux paraboles sont égales puisqu'elles sont comme les sinus des angles doubles de leurs angles d'élevation, lesquels sinus sont égaux.

COROLLAIRE I.

280. Quand un corps est projeté sous un angle de 45 degrés, le demi-parametre de la parabole qu'il décrit est égal à son amplitude; car puisque sous quelque angle d'élevation que le corps soit projeté, le demi-parametre est toujours à l'amplitude comme le sinus total au sinus de l'angle double de son angle d'élevation (N. 277), & que quand l'angle d'élevation est de 45 degrés, le sinus de l'angle double est égal au sinus total, il s'ensuit que le demi-parametre est aussi égal à l'amplitude.

COROLLAIRE II.

281. Quand un corps étant projeté successivement sous différents angles, a toujours la même vitesse, s'il arrive qu'on connoisse la plus grande amplitude, on trouvera son amplitude pour un angle d'élevation tel qu'on voudra, en faisant cette analogie;

le sinus total est au sinus d'un angle double de l'angle d'élevation donné comme la plus grande amplitude est à l'amplitude correspondante à l'angle d'élevation donné.

COROLLAIRE III.

282. La vitesse d'un corps projeté obliquement étant connue, on connoitra son amplitude en cette sorte.

La vitesse du corps peut se déterminer par l'espace AB ou EM (Fig. 115), que la force qui a la direction AD peut lui faire parcourir dans une minute; supposant donc que cet espace soit connu, nous sçavons par plusieurs expériences que les Sçavans ont faites, que l'espace AE que la pesanteur fait parcourir à un corps dans une minute, est de 15 pieds un pouce; faisant donc le quarré de AB, c'est-à-dire le quarré du nombre des pieds que vaut l'espace AB, & le divisant par 15 pieds un pouce, il est évident que le quotient donnera la valeur du parametre par la propriété de la parabole; c'est pourquoi prenant la moitié de ce parametre, on aura l'amplitude de la projection sous un angle de 45 degrés (N. 280), après quoi il sera facile de connoître son amplitude pour tel angle qu'on voudra par le second Corollaire.

COROLLAIRE IV.

283. La plus grande amplitude étant connue, on connoitra la vitesse du corps projeté en cette sorte.

La plus grande amplitude est C égale au-demi parametre, doublant donc cette amplitude, j'ai le demi-parametre; c'est pourquoi je multiplie le parametre par AE = 15 pieds 2 pouces, & le produit est le quarré de EM, tirant donc la racine quarrée j'ai la valeur de EM ou la vitesse cherchée, ce qui est évident par le Corollaire précédent.

PROPOSITION XCVIII.

284. Trouver la plus grande hauteur y4 (Fig. 115.) à laquelle un corps projeté obliquement puisse monter, son angle d'élevation étant connue.

SOLUTION.

Je nomme AR = a , RD = AQ = b , Ab = x ; or le triangle rectangle ARD donne $\overline{AD}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RD}^2$, donc $\overline{AD}^2 = \overline{QR}^2 = a^2 + b^2$.

Les triangles semblables ARD, AbB donnent AR, RD :: Ab, bB, donc $a, b :: x, \frac{bx}{a} = bB$; or le triangle rectangle AbB donne $\overline{AB}^2 = \overline{Ab}^2 + \overline{bB}^2$, donc $\overline{AB}^2 = \overline{EM}^2 = xx + \frac{b^2 x^2}{a^2} = \frac{aax^2 + b^2 x^2}{a^2}$.

Par la propriété de la parabole j'ai $QR^2, \overline{EM}^2 :: AQ, AE$, donc $a^2 + b^2 \cdot \frac{aax^2 + b^2 x^2}{aa} :: b, \frac{bx^2}{a^2} = AE = BM$, donc $Mb = Bb - BM = \frac{bx}{a} - \frac{bx^2}{a^2}$.

Or la plus grande hauteur y₄ qu'on demande est la plus grande de toutes les perpendiculaires tirées des points de la courbe AMR sur la droite AR, c'est-à-dire la plus grande de toutes les $\frac{bx}{a} - \frac{bx^2}{a^2}$, ainsi par la règle des plus grandes & des moindres, il faut prendre la différence & la supposer égale à zéro, ce qui donne $\frac{bdx}{a} - \frac{2bx \cdot dx}{a^2} = 0$, donc $\frac{b \cdot dx}{a} = \frac{2bx \cdot dx}{a^2}$, & $\frac{b}{a} = \frac{2bx}{a^2}$, ou $ab = 2bx$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}a$; c'est-à-dire, que pour avoir la plus grande hauteur y₄, il faut prendre $Ay = \frac{1}{2}AR$, & élever en y la perpendiculaire y₄, & le point 4 sera le point de la plus grande hauteur.

COROLLAIRE I.

285. Si l'on prolonge la plus grande hauteur y₄ jusqu'à la ligne de direction AD en Y, on aura y₄ = Y₄; car les triangles semblables ARD, AyY, donnent AR, AD :: Ay, AY; mais $Ay = \frac{1}{2}AR$, donc $AY = \frac{1}{2}AD$; je mene l'ordonnée u₄, laquelle étant égale à AY est par conséquent $= \frac{1}{2}AD$. Or la propriété de la parabole donne \overline{QR}^2 ou \overline{AD}^2, u_4^2 ou $\overline{AY}^2 :: AQ, Au$, & $\overline{AY}^2 = \frac{1}{4}\overline{AD}^2$, donc $Au = \frac{1}{4}AQ$, & par conséquent $Y_4 = \frac{1}{4}AQ = \frac{1}{4}DR$.

Mais les triangles semblables ARD, AyY donnent $Yy = \frac{1}{2}DR$, à cause de $Ay = \frac{1}{2}AR$, donc $Yy = \frac{1}{2}DR$, & par conséquent $Yy - Y_4 = \frac{1}{2}DR - \frac{1}{4}DR = \frac{1}{4}DR$.

COROLLAIRE II.

286. L'amplitude & l'angle d'élevation étant donnés, on trouvera la plus grande hauteur en cette sorte.

Prenant pour sinus total la droite AD, l'amplitude AR sera le sinus du complément à l'angle droit de l'angle d'élevation, & la

droite DR fera le sinus de cet angle d'élevation. Pour connoître donc cette droite je dis ; comme le sinus de complement est au sinus de l'angle d'élevation , ainsi l'amplitude AR est à la droite DR , laquelle étant connue , sa quatrième partie sera la hauteur cherchée.

COROLLAIRE III.

287. La plus grande hauteur y_4 est à la huitième partie du parametre , comme le sinus versé de l'angle double de l'angle d'élevation est au sinus total.

Soit l'angle OTV (Fig. 116.) égal à l'angle d'élevation , & la droite TL égale au sinus total ; je fais $LO = TL$, & $OV = TL$; le triangle TLO étant isoscele , l'angle externe OLV est double de l'angle OTL ; je mene Lt perpendiculaire sur TO , & OY perpendiculaire sur TV , ainsi Lt est le sinus de l'angle d'élevation , Tr est le sinus de son complement à l'angle droit , OY est le sinus de l'angle OLY double de l'angle d'élevation , & LY est le sinus de son complement.

Je nomme le sinus total $TL = LO = r$, le sinus de l'angle d'élevation $Lt = a$, le sinus de son complement $Tr = b$, donc $TO = 2b$, à cause que le perpendiculaire Lt coupe la base TO du triangle isoscele TLO en deux parties égales.

Les triangles semblables TLt , TOY donnent $TL, Tr :: TO, TY$; donc $r, b :: 2b, \frac{2bb}{r} = TY$; & par conséquent $LY = TY - TL = \frac{2bb}{r} - r = \frac{2bb - rr}{r}$; mais le triangle rectangle TLt donne $TL^2 = Tr^2 + Lt^2 = b^2 + a^2 = rr$, mettant donc cette valeur de rr dans celle de LY , j'ai $LY = \frac{2bb - rr}{r} = \frac{b^2 - a^2}{r}$.

Du centre L je décris l'arc DZ , ainsi $YZ = LZ - LY = LO - LY = r - \frac{b^2 + a^2}{r} = \frac{rr - b^2 + a^2}{r}$, & mettant au lieu de rr sa valeur $b^2 + a^2$, j'ai $YZ = \frac{2a^2}{r}$, & c'est la valeur du sinus versé d'un angle double de l'angle d'élevation , cela posé.

Si je nomme le parametre x & le sinus de l'angle double de l'angle d'élevation $\frac{2a^2}{r}$, ainsi que nous l'avons trouvé ci-dessus (N. 277) , j'aurai l'amplitude en faisant $r, \frac{2ab}{r} :: \frac{1}{2}x, \frac{a^2x}{r^2}$ (N. 277)

donc (Fig. 115.) j'aurai $AR = \frac{abx}{r^2}$; & pour trouver DR comme j'ai $b, a :: AR, DR$, mettant la valeur de AR, j'ai $b, a :: \frac{abx}{r^2}, \frac{a^2x}{r^2} = DR$; or $y_4 = \frac{1}{4} DR$ (N. 285), donc $y_4 = \frac{a^2x}{4r^2} = \frac{2a^2x}{8r^2}$, d'où je tire $r, \frac{2a^2}{r}, \frac{1}{8}x, \frac{2a^2x}{8r} = y_4$; mais $\frac{2a^2}{r}$ est le sinus versé d'un angle double de l'angle d'élevation; donc le sinus total est au sinus versé d'un angle double de l'angle d'élevation, comme le huitième du parametre est à la plus grande hauteur.

COROLLAIRE IV.

288. Si un corps projeté successivement sous différens angles d'élevation a toujours la même vitesse, les plus grandes hauteurs dans les différentes paraboles qu'il décrira seront comme les sinus versés des angles doubles des angles d'élevation; car dans toutes ces paraboles on aura toujours: la plus grande hauteur est au huitième du parametre, comme le sinus de l'angle double de l'angle d'élevation est au sinus total; or le parametre & le sinus total seront toujours les mêmes, donc les plus grandes hauteurs seront comme les sinus versés des angles doubles des angles d'élevation.

COROLLAIRE V.

289. Posant les mêmes choses que dans le Corollaire précédent, & nommant a le sinus d'un angle d'élevation, & A le sinus d'un autre angle d'élevation, la plus grande hauteur repondante au sinus a fera $\frac{2a^2x}{8r}$ (N. 287), & la plus grande hauteur repondante au sinus A fera $\frac{2A^2x}{8r}$, ainsi ces hauteurs seront comme $\frac{2a^2x}{8r}, \frac{2A^2x}{8r}$, ou comme $2a^2, 2A^2$, ou comme a^2, A^2 , c'est-à-dire comme les quarrés des sinus des angles d'élevation.

PROPOSITION XCIX.

290. Connoissant la vitesse d'un corps projeté obliquement, & un point P (Fig. 115.) que ce corps doit choquer dans son mouvement; connoître l'angle d'élevation qu'il faut lui donner.

SOLUTION.

La vitesse du corps étant donnée, on peut trouver aisément son

fon parametre, comme il a été dit ci-dessus (N. 282); je nomme ce parametre $=a$, la hauteur $cP = b$, la distance $Ac = c$, le sinus total $=r$, & la tangente de l'angle d'élevation que je cherche $=x$.

Si je prens Ac pour le sinus total, la droite cC fera la tangente de l'angle d'élevation cherché, c'est pourquoi j'ai r, x, Ac, cC , ou $r, x :: c, cC$, donc $\frac{cx}{r} = cC$, & $CP = AN = cC - cP = \frac{cx}{r} - b$; or par la propriété de la parabole, j'ai $\overline{PN}^2 = AN \times a$; donc $\overline{PN}^2 = \frac{acx}{r} - ab$; mais $\overline{PN}^2 = \overline{AC}^2$, & à cause du triangle rectangle ACc , j'ai $\overline{AC}^2 = \overline{Ac}^2 + \overline{cC}^2 = c^2 + \frac{c^2 x^2}{r^2}$, donc j'ai $\frac{acx}{r} - ab = c^2 + \frac{c^2 x^2}{r^2}$, & retranchant de part & d'autre $\frac{acx}{r}$ & c^2 , puis multipliant par r^2 , & divisant par c^2 , j'ai une équation du second degré que je résous à la manière ordinaire en cette sorte.

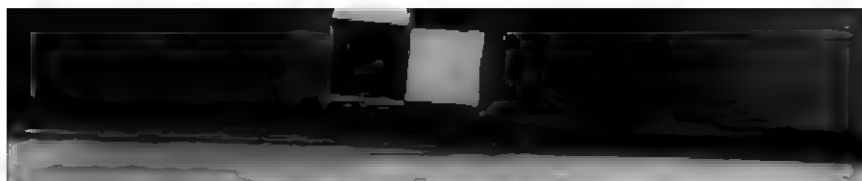
Je prens $\frac{ar}{2c}$ qui est la moitié du coefficient du second terme, du second membre, je l'éleve au quarré, & l'ajoutant de part & d'autre à l'équation je tire la racine des deux membres, puis donnant $\frac{ar}{2c}$ de part & d'autre, je trouve enfin la valeur de x telle qu'on voit ici, de

laquelle je tire cette analogie $c, \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - ab - c^2} :: r, x$.

Si le point P (Fig. 117.) étoit en dessous de l'horizon on auroit $CP = Cc + Pc = \frac{cx}{r} + b$, & achevant le calcul comme nous venons de faire, on trouveroit $x = \frac{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + ab - c^2} \times r}{c}$.

COROLLAIRE I.

291. Si l'on a $ab + c^2 = \frac{1}{4}a^2$, on aura par conséquent —
K k



LA MECHANIQUE

... dans le cas de la Figure 115, & l'analogie
... en celle-ci, $r, \frac{1}{2}a::r, x$; c'est-à-dire,
... la même du parametre, comme le sinus total
... l'angle que l'on cherche.

COROLLAIRE II.

... plus grand que $\frac{1}{2}a^2$, on aura —
... une racine imaginaire; ainsi la valeur
... dans le cas de la Figure 115, ce qui fait
... le point marqué P.
... dans le cas de la Figure 117 on a c^2
... $\frac{1}{2}a^2::r, x$, & que si l'on avoit c^2
... le corps ne pourroit atteindre le point

PROPOSITION C.

221. Un corps étant projeté successivement sous différens angles
d'élevation, & avec toujours la même vitesse, les tems qu'il emploie
à parcourir les paraboles qu'il décrit sur l'horizon, sont entr'eux com-
me les carrés des angles d'élevation (Fig. 115).

DEMONSTRATION.

Je nomme r le sinus total, a le sinus de l'angle DAR. d'éleva-
tion, & le sinus de son complement à l'angle droit, & x le para-
mètre. du centre A & du rayon AD je décris l'arc DZ, & me-
nant ZN parallèle à DR, la droite AX sera la secante de l'an-
gle d'élevation, PR en sera le sinus droit, & AR sera le sinus
de son complement; ainsi à cause des triangles semblables RAD, —
ZAN, l'on AR. AD :: AZ, AN, ou $b, r::r, AX$, donc $\frac{r^2}{b}$

AX.

Or (A. 270.) le parametre est à l'amplitude AR, comme la —
secante de l'angle d'élevation est au sinus de cet angle, donc $\frac{r^2}{b}$, —
— AR, mais le sinus b de complement est au sinus —
total comme AR. AD, donc $b, r::\frac{ar^2}{r^2}, \frac{ar}{r} = AD$; d'où je —
me $r, r::x, AD$, mais AD est l'espace que le corps parcourroit —
avec la vitesse uniforme, dans le même tems qu'il parcourt la —
parabole AMR, ainsi AD peut marquer le tems employé à par—

$= OL \times p$; or à cause des ordonnées OP , LC parallèles entr'elles, & des droites LO , CH perpendiculaires sur OH , j'ai $LO = CH$ & $LC = OH$, donc $\overline{LC} = \overline{OH}$, & par conséquent puisque nous avons $\overline{LC} - \overline{OP} = OL \times p$, nous avons aussi $\overline{OH} - \overline{OP} = HC \times p$, mais la double ordonnée MP étant coupée en deux également en P , & la droite PH lui étant ajoutée, on a $MP \times PH = \overline{OH} - \overline{OP}$, donc $MP \times PH = HC \times p$; ce qui démontre le second cas.

Dans le tems que j'écrivois ceci, je croyois faire sage de cette propriété de la parabole pour quelques unes des Propositions suivantes; mais ayant ensuite trouvé des voyes plus courtes pour démontrer ces Propositions, je n'ai laissé sublimer celle-ci que parce que cette propriété de la parabole n'est pas connue de tout le monde, & qu'elle peut cependant être utile en bien des occasions.

295. Soit une parabole AB (Fig. 234.) décrite par un corps projeté selon une direction horizontale AD , par une force uniforme que nous exprimerons par AD ; si du point D l'on mène DB parallèle à l'axe, & qu'ayant mené en B la tangente BT , on suppose que le même corps B soit projeté de B en T selon la direction BT avec une force uniforme qui soit à la force AD comme BT est à AD , le corps par cette seconde projection décrira la parabole AB , dans un tems égal à celui qu'il a employé à décrire la même parabole par la première projection.

Concevons que AD soit divisé en parties égales, par exemple en 4, & que des points de division soient menées les droites LH , CO , FM , parallèles à l'axe; il est visible que la droite TB sera aussi divisée en 4 parties égales aux points L , C , N , & que le tems que le corps poussé par la force AD emploieroit à parcourir chacune des parties égales de AD , est égal au tems que le même corps poussé par la force TB emploieroit à parcourir chacune des parties égales de BT ; donc si à la fin du premier instant de la projection selon AD , la pesanteur du corps l'a fait descendre d'une quantité égale à EH , la même pesanteur à la fin du premier instant, selon la projection BT , fera descendre le corps d'une quantité NM égale à EH ; par la même raison si à la fin du second instant, du troisième, & du quatrième, le corps poussé par la force AD se trouve abaissé par la pesanteur

des quantités CO , FM , DB , le même corps poussé par la force BT se trouvera abaissé à la fin du second instant, du troisième & du quatrième, des quantités CO , LH , TA égales chacune à chacune aux quantités CO , FM , DB , maintenant les quantités EH , CO , FM , DB étant comme les quarrés des tems employés à parcourir les espaces AE , AC , AF , AD , sont par conséquent comme 1, 4, 9, 16 ; ainsi les quantités NM , CO , LH , TA , sont aussi comme 1, 4, 9, 16 ; or les triangles CFN , CDB étant semblables, on a CD , CF :: DB , FN ; mais $CD = 2CF$, donc $DB = 2FN$ ou $FN = \frac{1}{2}DB$; or $DB = 16$, donc $FN = 8$, & ajoutant à FN la quantité NM dont le corps poussé par la force BT , se trouve abaissé à la fin de BN ; nous aurons $FN + NM = 8 + 1 = 9$; mais la quantité FM dont le corps poussé par la force AD se trouve abaissé à la fin de AF est 9 ; donc l'extrémité M de cet abaïssement est précisément au même point où se trouve l'extrémité M de l'abaïssement NM à la fin du tems de la seconde projection ; l'abaïssement CO étant le même dans l'une & l'autre projection, il est visible que l'extrémité O de l'un & de l'autre sera au même point ; les triangles TAC , LEC étant semblables, donnent TA , LE :: AC , AE , or $AC = 2AE$, donc $TA = 2LE$, ou $LE = \frac{1}{2}TA$; mais $TA = DB = 16$, donc $LE = 8$; donc si à LE on ajoute la quantité $EH = 1$, dont la pesanteur a fait descendre le corps dans le tems AE selon la direction AD , la somme sera $8 + 1 = 9$; or l'espace LH dont la gravité avoit fait descendre le corps à la fin du tems BL selon la direction BL , est aussi 9, dont l'extrémité H de l'abaïssement LH , selon la direction BL , est au même point que l'extrémité de l'abaïssement EH , selon la direction AE ; donc le corps projeté selon la direction BT par une force comme BT , passe par les mêmes points par lesquels il passeroit s'il étoit projeté selon la direction AD par une force comme AD , & par conséquent le corps décrit la même courbe par l'une ou l'autre projection.

Si le corps poussé selon la direction BT par une force uniforme exprimée par BT , continuoît à se mouvoir après être parvenu en A , il décriroit de l'autre côté de l'axe une demi-parabole AQ égale à la demi-parabole AB ; car prolongeant BT au-delà de T , & divisant son prolongement en parties égales aux parties de BT ; il est visible qu'à la fin du tems BZ l'abaïssement ZY seroit $= 25$, puisqu'il seroit comme le quarré de $BZ = 5$. Or les

triangles rectangles CTA, CZX donneroient $CT, CZ :: TA, ZX$, & $CT = \frac{1}{2} CZ$; donc $TA = \frac{1}{2} ZX$, ou $ZX = \frac{1}{2} TA$; mais $TA = 16$, donc $\frac{1}{2} TA = 8$, & $\frac{1}{2} TA = 24$, & par conséquent $ZX = 24$; or nous venons de trouver $ZY = 25$, donc $ZY = ZY - ZX = 25 - 24 = 1$, c'est-à-dire que l'extrémité Y de l'abaissement ZY seroit autant éloigné de l'horizontale XD que l'abaissement EH, & comme les espaces TL, TZ étant égaux, les espaces AE, AX doivent être aussi égaux, il s'ensuit que les abaissemens XY, EH se trouvant égaux, & à égale distance de l'axe, les points Y, H appartiennent à une même parabole, & continuant le même raisonnement, on trouvera que la demi-parabole AQ décrite par le corps dans un tems égal à BT sera égale à la demi-parabole AB décrite dans le tems BT.

Par un semblable raisonnement, on trouvera que si le corps au lieu d'être poussé par la force BT de B vers T, étoit poussé de B vers V, en sorte qu'il parcourût l'espace BV dans le même tems qu'il parcourroit BT, la pesanteur lui seroit décrire l'arc BK, que la même pesanteur lui seroit décrire, si après être parvenu en B lorsqu'il étoit poussé par AD, il continuoit de se mouvoir pendant un tems égal à celui que la force AD emploieroit à lui faire parcourir $DP = AD$.

296. Si sur le prolongement BH (Fig. 235.) de l'axe MB d'une demi-parabole AB décrite par le mouvement d'un corps projeté de B en R avec une direction horizontale, on prend une partie DB égale à la hauteur dont le corps en repos devoit descendre pour acquérir une vitesse égale à la vitesse de la force uniforme de la direction, & qu'ayant mené du point D sur la direction BR une droite qui la coupe en un point quelconque E, on élève sur DE au point E la perpendiculaire EM qui coupe l'axe en M; je dis 1°. Que tandis que la force uniforme feroit parcourir au corps l'espace BR double de BE, la pesanteur laisseroit ce corps d'une quantité égale à BM. 2°. Que si du point R on mène RA parallèle à l'axe, & que du point A où cette ligne coupe la parabole on mène la tangente AH, & qu'on conçoit une force uniforme qui pousseroit le corps de A vers H dans un tems égal à celui que la force horizontale emploieroit à lui faire parcourir l'espace RB, la droite DM composée de DB & BM, est la hauteur dont le corps A en repos devoit tomber pour acquérir une vitesse égale à celle de la force uniforme de la direction AH.

La force horizontale avec la vitesse acquise à la fin de DB, feroit parcourir un espace double de DB dans un tems égal à ce-

lui que le corps auroit employé à descendre le long de DB (N. 63), cela posé.

L'espace DB parcouru par la chute DB est à l'espace BM parcouru par la chute BM, comme le carré de la vitesse acquise par la chute DB est au carré de la vitesse acquise par la chute BM, donc ces vitesses sont en raison soudoublée des chutes DB, BM; or à cause du triangle rectangle DEM, dans lequel la droite EB est perpendiculaire sur la base, les triangles rectangles DEB, EBM sont semblables, donc on a :: DB, BE, BM, & par conséquent DB est à BE en raison soudoublée de DB à BM, donc les vitesses acquises par les chutes DB, BM sont entr'elles comme DB, BE, & les tems employés à acquérir ces vitesses sont aussi comme DB, BE; or la force uniforme horizontale pendant le tems DB fait parcourir un espace double de DB, donc pendant le tems BE elle doit faire parcourir un espace BR double de l'espace BE, c'est la première chose que nous avons à démontrer.

La force uniforme de la direction AH feroit parcourir l'espace AE dans le même tems que la force uniforme de la direction BR feroit parcourir l'espace BE par la supposition. Or les triangles rectangles ARE, BEM sont semblables & égaux, car EB=ER, & BM=AR, puisque dans le tems que le corps auroit parcouru l'espace BR sa pesanteur l'auroit abaissée d'un espace AR égal à BM, comme il vient d'être démontré. Donc EM=AE, & par conséquent les deux forces uniformes sont comme ME, EB, mais à cause des triangles semblables MBE, EBD, on a EB, ME :: DB, DE, donc les forces EB, AE sont comme DB, DE; or les hauteurs dont le corps auroit dû tomber pour acquérir ces forces ou vitesses, sont en raison doublée de ces vitesses, donc ces hauteurs sont comme les carrés de DB, BE; mais les triangles rectangles semblables BDE, DEM donnent :: BD, DE, DM, donc BD, DM sont entr'eux comme les carrés de BD & DE, & par conséquent les hauteurs dont le corps devoit tomber, sont comme BD, DM; mais DB est la hauteur dont le corps doit tomber pour acquérir une force égale à la force horizontale; donc DM est la hauteur dont le même corps devoit tomber pour acquérir une force égale à la force de la direction AD, & c'est la seconde chose qu'il falloit démontrer.

On dira sans doute que la force horizontale avec la vitesse ac-

quise par la chute DB, doit faire parcourir un espace double de DB (N. 63), & la force oblique avec la vitesse acquise par la chute DM, doit faire parcourir un espace double de DM; & non pas l'espace AE, mais il faut prendre garde que cela n'est vrai que lorsque les espaces parcourus par les forces uniformes sont parcourus dans des tems égaux aux tems des chutes, lesquels tems sont inégaux entr'eux quand les chutes sont inégales; au contraire dans la question présente les espaces BE, AE que les forces uniformes font parcourir, sont parcourus dans un même tems, c'est pourquoi le tems de la chute BM étant plus grand que le tems de la chute DB, il faut diviser l'espace que la force oblique feroit parcourir par le tems de sa chute, afin de reduire les deux forces uniformes à un même tems. Soit par exemple $DB = 1$; $BE = 2$, donc à cause de :: DB, BE, BM, nous aurons $BM = 4$, & $DM = DB + BM = 1 + 4 = 5$; il est indubitable qu'à la fin de la chute BD le corps a acquis une force qui peut lui faire parcourir un espace BE double de BD, dans un tems égal au tems de la chute DB, & qu'à la fin de la chute DM le corps aura acquis une force qui peut lui faire parcourir un espace double de DM, & par conséquent = 10 dans un tems égal à celui de la chute DM; mais les tems des chutes étant comme $\sqrt{1}$, $\sqrt{5}$, ou comme 1, $\sqrt{5}$, les espaces 2, 10 parcourus par les forces uniformes, seroient parcourus dans des tems inégaux 1, $\sqrt{5}$. Pour reduire donc ces deux forces à un même tems 1, il faut dire, si pendant le tems $\sqrt{5}$ la force oblique parcourt 10, que doit-elle parcourir pendant le tems 1? Et faisant la regle, on trouvera $\sqrt{5}$, 10 :: 1, $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times 5}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$, & par conséquent $2\sqrt{5}$ fera l'espace que la force oblique acquise par la chute DM doit parcourir pendant le tems 1, que la force horizontale acquise par la chute DB employe à parcourir BE, & en effet, la droite AE ou EM est égale à $2\sqrt{5}$, car dans le triangle rectangle MBE on a $\overline{EM}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BM}^2 = 4 + 16 = 20$, & par conséquent $EM = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

De même si BE n'étoit égal qu'à 1, la force horizontale parcourroit BE dans la moitié du tems égal à celui de la chute DB; or alors à cause de $BD = BE$ on auroit $BM = 1$, & $DM = 2$, ainsi la force oblique avec la vitesse acquise à la fin de la chute BM, parcourroit un espace double de BM ou égal à 4 dans un tems égal à celui de sa chute; donc les tems du mouvement des deux

deux forces uniformes seroient $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, c'est pourquoi pour reduire ces deux forces à un même tems, il faut dire, si pendant le tems $\sqrt{2}$ la force oblique parcourt un espace $= 4$, quel espace parcourra-t-elle pendant le tems $\frac{1}{2}$? Et faisant la regle on trouvera $\sqrt{2}$, $4 :: \frac{1}{2} \frac{4 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; ainsi $\sqrt{2}$ est l'espace que la force oblique doit parcourir dans le tems que la force horizontale parcourroit $BE = 1$; & en effet, dans la supposition présente AE seroit égal à $\sqrt{2}$, car dans le triangle rectangle EMB , on auroit \overline{EM}^2 ou $\overline{AE}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BM}^2 = 1 + 1 = 2$, donc $AE = \sqrt{2}$, & la même chose arriveroit dans telle autre supposition qu'on voudroit faire, ce qui montre évidemment la vérité de ce que nous avons démontré.

Si l'on a bien compris les principes précédens on en tirera sans peine toute la théorie & la pratique du jet des bombes, ainsi que nous allons le faire voir. On se souviendra qu'un corps poussé par la force oblique qui fait parcourir AE dans le même tems que la force horizontale fait parcourir BE , décrit la même parabole qu'il décriroit s'il étoit poussé par la force horizontale (N. 295).

En premier lieu, *la force d'un corps projeté horizontalement est égale à la racine du quart du parametre de la parabole qu'il décrit.*

Supposons que la parabole décrite soit BA (Fig. 235), & nommons p le parametre, nous aurons donc \overline{AM}^2 ou $\overline{RB}^2 = BM \times p$; or BE étant la moitié de AR , nous avons $\overline{AM}^2 = 4\overline{EB}^2$, donc $4\overline{EB}^2 = BM \times p$; d'un autre côté nous avons DB, BE, BM , donc $BM \times DB = \overline{BE}^2$, & multipliant par 4 nous aurons $4\overline{BE}^2 = BM \times 4BD$, donc $BM \times p = BM \times 4BD$, & par conséquent divisant par BM nous aurons $p = 4BD$, & $BD = \frac{1}{4}p$; mais BD étant la hauteur dont le corps doit tomber pour acquérir une force égale à la force uniforme horizontale, la vitesse acquise à la fin de BD est \sqrt{BD} , donc cette vitesse ou force est $\sqrt{\frac{1}{4}p}$.

En second lieu, *la force oblique qui fait parcourir l'espace AE dans le même tems que la force horizontale fait parcourir l'espace BE , est égale à la racine du quart du parametre du diametre qui passe par le point A .*

La force oblique est égale à la vitesse acquise par la chute DM , donc elle est \sqrt{DM} ; mais $DM = DB + BM$, & par conséquent $4DM = 4DB + 4BM$; or $4DB$ est le parametre de l'axe BM ,

comme on vient de voir, & $4BM$ est le quadruple de l'abscisse BM correspondant au point A , & par la propriété de la parabole le parametre du diametre qui passe par le point A , est égal au parametre de l'axe BM plus quatre fois l'abscisse BM , donc le parametre du diametre qui passe par A est $4BD + 4BM$, & son quart est $BD + BM = DM$. Donc puisque la force oblique AE est égale à \sqrt{DM} , elle est par conséquent égale à la racine du quart du parametre du diametre qui passe par A .

Achevant la parabole ABC , nous nommerons AC *amplitude* de la parabole, & menant du point C la droite CF parallele à l'axe, & qui coupe la direction oblique en F , nous nommerons AF *direction oblique*.

Il est visible que EB étant égal à RE , & AC égal à $2RE$, EB n'est par conséquent que le quart de l'amplitude AC , & par la même raison AE , n'est que le quart de la direction oblique AF ; or les chutes DB , DM sont les chutes que le corps auroit dû faire pour acquérir les forces uniformes BE , AE qui agissent dans des tems égaux, donc pour acquérir des forces AC , AF , quadruples des forces BE , AE dans des tems quadruples, les chutes DB , DM devroient être quadruples; ainsi exprimant les forces BE , AE , non plus par les espaces BE , AE , qui ne sont que les quarts des espaces qu'elles parcourent, mais par les espaces mêmes AC , AF , leurs vitesses seront $\sqrt{4DB}$, $\sqrt{4DM}$, c'est-à-dire que la force horizontale sera égale à la racine du parametre de l'axe, & la force oblique égale à la racine du parametre du diametre qui passe par le point A ; c'est en effet la véritable valeur de ces forces, ainsi qu'on verra dans l'addition de cette premiere partie, où nous ferons voir que la force du choc dans un point quelconque de la parabole est égale à la racine du parametre du diametre qui passe par ce point; cependant comme les quarts sont entr'eux en même raison que leurs entiers, il est permis de prendre les uns pour les autres, & c'est ce qu'on fait communement, parce qu'on y trouve plus de commodité.

En troisieme lieu. Si un même corps est projeté par une même force, tantôt sous une direction oblique à l'horison, & tantôt sous un autre de différente obliquité, &c. il décrit une infinité de paraboles dont les parametres des axes sont tous différens.

Nous venons de voir 1°. Que si un corps poussé par une force horizontale, décrit une parabole BA (*fig. 235*), & qu'étant poussé par une force oblique dans la direction AH de la tangente,

il décrive la même parabole AB dans un tems égal à celui qu'il a employé à la décrire lorsqu'il étoit poussé par la force horizontale, les deux forces sont entr'elles comme AE, BE, c'est-à-dire comme le quart de la direction oblique AF au quart de l'amplitude AC. 2°. Que les hauteurs dont le corps devoit tomber pour acquérir les forces BE, AE, sont entr'elles comme DB à DM, c'est à-dire, comme le $\frac{1}{2}$ du parametre de l'axe est à DB + BM, ou au $\frac{1}{4}$ de ce parametre plus la hauteur de la parabole, cela posé.

Soit la parabole BAC (Fig. 236), dont le $\frac{1}{4}$ du parametre est PA, & la hauteur est AD. Je décris sur PD le demi-cercle FED, & menant du point A l'horizontale AR, & du point E les cordes ED, EP, je prouverai aisément comme ci-dessus que lorsque la pesanteur aura fait descendre le corps de la quantité AD = RB, la force horizontale lui aura fait parcourir l'espace RA double de AE; menant donc du point B la tangente BT qui passera par le point E par la propriété de la parabole, si la force de la direction BE qui projetteroit le même corps de B en E, étoit à la force horizontale comme BE est à AE, le corps décriroit la même parabole BAC, & la force horizontale seroit à la force oblique, comme AE est à BE; d'où il suit, comme ci-dessus, que les hauteurs dont le corps devoit tomber pour acquérir ces forces, seroient comme PA est à PD, ainsi la force BE seroit exprimée par \sqrt{PD} .

Je prens une droite $pd = PD$, je la partage en deux parties pa , ad différentes des parties PA, AD dont elle est composée auparavant; je prens pa pour le quart du parametre d'une parabole ab dont la hauteur est ad , je décris autour de pd le demi-cercle ped , je mene l'horizontale ar , & du point e les cordes ep , ed ; ainsi je prouverois aisément que quand la pesanteur aura fait descendre le corps d'une quantité égale à $ad = rb$, la force horizontale auroit fait parcourir au corps l'espace ar double de ae , & qu'en menant la tangente br , si la force de la direction be étoit à la force horizontale comme be est à ea , le corps décriroit la même parabole, & que par conséquent les hauteurs dont le corps devoit tomber pour acquérir les forces ae , be , devroient être comme pa , pd , d'où il suit que la force be seroit exprimée par \sqrt{pd} ; mais $PD = pd$, donc $\sqrt{PD} = \sqrt{pd}$, & par conséquent la force avec laquelle le corps poussé selon la direction BE dé-

crit la parabole BAC, est égale à la force avec laquelle le corps poussé selon la direction *be* décrit la parabole *bac*.

Or comme on peut couper PA en deux parties PA, AD, qui ne soient ni comme PA est à AD, ni comme *pa* est à *ad*, & que cette division se peut faire en une infinité de façons; il s'ensuit qu'en prenant dans chacune de ces divisions la partie supérieure pour le quart du parametre, & l'inférieure pour la hauteur, on décrira une infinité d'autres paraboles, & que si des extrémités B, *b*, &c. de leurs amplitudes on mene les tangentes BT, *bt*, &c. le corps poussé selon les directions de ces tangentes avec des forces qui seroient aux forces AE, *ae*, &c. comme BE, *be*, &c. décriroit les mêmes paraboles, BAC, *bac*, &c. & que les hauteurs dont il faudroit que le corps descendit pour acquérir ces forces BE, *be*, &c. seroient toujours la même PD, ou *pd*; donc ces forces BE, *be*, &c. étant toujours exprimées par \sqrt{PD} ou \sqrt{pd} seroient égales entr'elles, ainsi la même force \sqrt{PD} peut faire parcourir une infinité de paraboles différentes dont les parametres sont différens, ce qu'il falloit démontrer.

Au reste, il faut prendre garde que quoique les forces selon les directions BE, *be*, &c. avec lesquelles le corps décrit les paraboles BAC, *bac*, &c. soient égales, il ne s'ensuit pas que les directions BE, *be*, &c. soient égales, & la raison en est que le corps ne décrit les paraboles BAC, *bac*, &c. que dans des tems égaux à ceux qu'il auroit employés à les décrire s'il avoit été poussé par les forces horizontales AE, *ae*, &c. lesquelles étant inégales entr'elles employent aussi des tems différens, c'est pourquoi les directions BE, *be*, &c. qui sont comme AE, *ae*, &c. doivent être inégales; ainsi l'on doit entendre que le même corps poussé sous différentes directions par une force toujours égale à \sqrt{PD} décriroit différentes paraboles dans des tems différens.

En quatrième lieu. *Les quarts des directions sous lesquelles un même corps étant poussé par une même force, peut décrire une infinité de différentes paraboles, sont égaux aux cordes menées de l'extrémité d'un diametre d'un demi-cercle à tous les points de la circonférence de ce demi-cercle, & les quarts des amplitudes de ces mêmes paraboles sont égaux aux perpendiculaires menées des extrémités de ces cordes sur le diametre.*

Si dans la Figure 236, je fais BS = DP, & que sur BS pris pour diametre je décrive un demi-cercle SEB, ce demi-cercle

passera par le point E, car les parties SR, RB du diamètre SB étant égales chacune à chacune aux parties PA, AD du diamètre PD=BS, il est évident que la perpendiculaire RE qui est moyenne proportionnelle entre les parties SR, RB, doit être égale à AE, qui est moyenne proportionnelle entre les parties PA, AD; donc l'ordonnée RE du demi-cercle SEB est égale à l'ordonnée AE du demi-cercle PED; mais par la propriété de la parabole le point E est au milieu de RA & RE=EA, donc le demi-cercle SEB passe par le point E, & par conséquent la droite BE, qui est le quart de la direction oblique est égale à la corde BE menée de l'extrémité B au point E de la demi-circconférence; de même AE étant égal au quart de l'amplitude BC, l'ordonnée RE est aussi égale au quart de cette amplitude.

De même si je fais $bs=pd$ & que sur bs pris pour diamètre, je décrive un demi-cercle seb , lequel sera égal au demi-cercle SEB, à cause de l'égalité des diamètres, ce demi-cercle passera par le point e , & le quart be de la direction oblique sera corde de ce cercle, & le quart ae ou re de l'amplitude bc sera égal à l'ordonnée re menée du point e ; donc les deux quarts de direction BE, be seront corde d'un même cercle, de même que les quarts d'amplitudes RE, re seront les ordonnées menées de l'extrémité de ces cordes; de plus les parties SR, RB coupées par l'ordonnée ER seront égales l'une au quart PA du paramètre de l'axe de la parabole correspondante BAC, & l'autre à la hauteur AD; de même les parties sr , rb coupées par l'ordonnée er seront égales l'une au quart pa du paramètre de l'axe de la parabole correspondante bac , & l'autre à la hauteur ad de cette même parabole.

Or comme on peut couper le diamètre SB ou PA d'une infinité de façons en deux parties SR, BR différentes de SR, BR; & qu'en prenant les différens SR pour des quarts de paramètre, & les différens RB pour différentes hauteurs, on aura différentes paraboles dont les quarts d'amplitudes seront les différentes ordonnées RE, & les quarts de directions seront les différentes cordes BE, il s'ensuit que les quarts des directions & les quarts d'amplitude des différentes paraboles que peut décrire un même corps projeté avec une même force sous différentes directions obliques, sont compris dans un même demi-cercle, dont le diamètre SB=PD est égal au quart du paramètre du diamètre qui passe par le point B, lequel paramètre est toujours

le même dans ces différentes paraboles.

PROPOSITION CI.

297. *Tirer des principes précédens la théorie & la pratique du jet des bombes sans avoir recours à l'algebre.*

Il faut d'abord faire une épreuve en jettant une bombe avec une charge déterminée & sous un angle connu, & après avoir examiné l'amplitude de la parabole qu'elle aura décrite, il faut mener sur un papier une droite indéfinie AZ (Fig. 237.) qui représentera l'horizontale, & sur cette droite on prendra par le moyen d'une échelle la droite AE égale à l'amplitude; on élèvera en A une droite indéfinie AX perpendiculaire sur AE, & au même point A on fera un angle MAE égal à l'angle sous lequel la bombe a été jetée, on coupera l'amplitude AE en quatre parties égales, & de l'extrémité O de l'une de ces parties on élèvera sur AE la perpendiculaire OQ qui coupe la direction AM en Q, d'où l'on menera QT perpendiculaire sur AX; cela fait, il est visible que TQ sera le quart de l'amplitude, & AQ le quart de la direction AM, donc AQ sera une corde d'un cercle dont le diamètre est égal à la hauteur de la parabole, plus le quart du parametre de son axe, & TQ sera l'ordonnée correspondante de ce cercle; pour trouver donc ce diamètre on prolongera TQ en F, faisant QF=TQ, & la droite TF étant égale à la moitié de l'amplitude, le point F sera le sommet de la parabole; ainsi menant l'axe LL'Y perpendiculaire sur AE, la droite QL, & au point Q élevant sur QL la perpendiculaire QY qui coupe l'axe en Y, on aura YF égal au quart du parametre de l'axe, & FL égal à sa hauteur, donc faisant AX égal à LY, on auroit le diamètre du demi-cercle cherché, ce diamètre peut se trouver plus aisément en élevant sur AQ la perpendiculaire QX qui coupe AX en X, ou bien en prenant une troisième proportionnelle TX aux deux lignes AT, TQ, tout ceci n'est qu'une suite des principes précédens; car à cause des triangles semblables LQF, FQY, on a :: LF, QF, FY, donc $\overline{QF}^2 = LF \times FY$; or par la propriété de la parabole on a \overline{AL}^2 ou \overline{TF}^2 ou $\overline{QF}^2 = LF \times p$, donc $\overline{QF}^2 = LF \times \frac{1}{4}p$, en nommant p le parametre de l'axe; & par conséquent $LF \times FY = LF \times \frac{1}{4}p$, & $FY = \frac{1}{4}p$, & par conséquent FY est la hauteur dont le corps devrait tomber pour acquérir une force horizontale avec laquelle le corps étant projeté de F vers T décrirait la parabole FA.

Ce demi-cercle étant trouvé, si l'on veut avoir l'amplitude de la parabole que décrira la même bombe poussée avec la même force sous un autre angle de direction MAE ou NAE, on formera l'angle MAE ou NAE, & du point M ou N, ou la jambe MA ou NA coupera le cercle, on menera MG ou NH perpendiculaire au diamètre AX, & GM sera le quart de l'amplitude AR de la parabole AIR décrite sous l'angle MAL, & la corde AM sera le quart de sa direction, de même NH sera le quart de l'amplitude de la parabole décrite sous l'angle NAE, & la corde AN sera le quart de sa direction, & ainsi des autres.

Si du centre G du cercle, on mene au point Q le rayon GQ, l'angle au centre AGQ sera double de l'angle du segment QAO qui est l'angle d'élevation de la parabole AFE, or TQ est le sinus de l'angle GAQ, donc le quart de l'amplitude de cette parabole est le sinus de l'angle double de son angle d'élevation, & comme on trouvera la même chose à l'égard des autres paraboles, il s'ensuit que *les quarts des amplitudes de ces paraboles, & par conséquent les amplitudes elles-mêmes sont entr'elles comme les sinus des angles doubles des angles d'élevation, lorsque la force de la poudre est la même.*

La hauteur FL ou TA de la parabole AFE décrite sous l'angle QAE est le sinus verse de l'angle QGA double de l'angle d'élevation QAE, & la même chose se trouvera dans les autres paraboles, donc *les hauteurs des paraboles décrites sous différents angles d'élevation avec une même force de poudre, sont entr'elles comme les sinus verses des angles doubles des angles d'élevation.*

Par la propriété du cercle, on a :: TA, AQ, TX, donc $TA \times TX = \overline{AQ}^2$, c'est-à-dire le produit du diamètre AX par le sinus verse TA de l'angle double de l'angle d'élevation QAE de la parabole décrite sous cet angle est égal au quarré de la corde AQ; or la moitié de la corde AQ étant le sinus de la moitié de l'angle QGA est aussi le sinus de l'angle d'élevation QAE, donc le produit du diamètre par le sinus verse TA de l'angle double de l'angle d'élevation QAE est égal à quatre fois le quarré du sinus de cet angle d'élevation QAE; or on trouvera la même chose dans les autres paraboles, donc les produits des sinus verses des angles doubles d'élevation par le diamètre AX sont égaux à quatre fois les quarrés des sinus de ces angles d'élevation, mais les produits des sinus verses par le diamètre sont

entr'eux comme les sinus versés, & les quarrés des sinus des angles d'élevation pris quatre fois, sont entr'eux comme les quarrés mêmes; donc les sinus versés des angles doubles des angles d'élevation sont entr'eux comme les quarrés des sinus des angles d'élevation; or les hauteurs des paraboles sont entr'elles comme les sinus versés des angles doubles des angles d'élevation, donc *les hauteurs des paraboles sont entr'elles comme les quarrés des sinus des angles d'élevation.*

Les tems des projections sous différens angles sont comme les racines des hauteurs des paraboles, car le tems employé à parcourir la demi-parabole FA est égal au tems que la pesanteur emploieroit à faire descendre le corps le long de la hauteur FL, puisque ce corps projeté par une force horizontale FT se trouveroit en A dans le même tems que sa pesanteur l'auroit abbaislé de la quantité FL; or dans le mouvement accéléré les tems sont comme les racines des espaces, donc les tems des différentes projections sont comme les racines des hauteurs, mais les hauteurs sont comme les quarrés des sinus des angles d'élevation, donc les tems sont comme les racines de ces quarrés, & par conséquent les tems sont comme les sinus; donc *la force de la poudre étant la même, les tems des projections sous différens angles, sont entr'eux comme les sinus des angles d'élevation.*

L'ordonnée GM du cercle étant plus grande que toutes les autres, il s'ensuit que la parabole dont l'amplitude sera le quadruple de cette ordonnée, aura aussi la plus grande amplitude que la même force de poudre puisse donner; or en ce cas la direction MA forme un angle de quarante-cinq degrés; donc *de toutes les projections qu'on peut faire sous différens angles avec une même force de poudre, celle qui est faite sous quarante-cinq degrés a la plus grande amplitude.*

Les ordonnées du cercle également éloignées du centre sont égales entr'elles, donc les projections qui auront pour amplitudes les quadruples de ces ordonnées seront égales; or en ce cas les directions NA, QA formeront avec l'horizontale des angles également éloignés de 45 degrés, comme il est aisé de le démontrer; donc *les projections faites avec une même force de poudre sous des angles également éloignés de 45 degrés ont des amplitudes égales.*

La distance AE d'un but E étant donnée, on divisera cette distance

distance en quatre parties égales, & de l'extrémité de la première partie, on élèvera la perpendiculaire OQ ; si cette perpendiculaire coupe le cercle en un point Q , on menera la corde AQ , & l'angle QAO fait par cette corde avec l'horizontale fera l'angle d'élévation qu'il faudra donner au mortier pour atteindre le but avec une force de poudre convenable au diamètre XA du cercle, mais si la perpendiculaire OQ ne coupe pas le cercle, ce sera signe qu'avec la même force de poudre on ne peut point atteindre ce but, ce qui est évident par les principes que nous venons d'établir.

Et si on vouloit trouver de combien il faudroit augmenter la charge pour atteindre un but R qu'on ne pourroit atteindre avec la charge convenable au diamètre AX , on feroit en A un angle de 45 degrés, ensuite on couperoit la distance AR en quatre parties égales, & de l'extrémité de la première de ces parties, on élèveroit une perpendiculaire qui couperoit la direction Ax en un point M que je suppose différent du point M du cercle XMA ; du point M on meneroit MG perpendiculaire à l'indéfinie AX ; ainsi GM seroit une plus grande ordonnée du cercle convenable à la force qu'on demande, c'est pourquoi du point G & du rayon GM on décriroit un cercle qui seroit le cercle cherché ; or la force exprimée par ce cercle étant à la force exprimée par le cercle précédent comme la racine de son diamètre à la racine du diamètre précédent, le rapport de ces racines donneroit le rapport des forces, & par conséquent on connoitroit de combien on devroit augmenter la force précédente pour atteindre le but R sous un angle de 45 degrés. J'ai pris l'angle de 45 degrés, parce que cet angle donnant la plus grande amplitude d'une même force de poudre, il est visible qu'en prenant un autre angle, on n'auroit pû y atteindre avec la charge qu'on vient de trouver, & qu'il auroit fallu l'augmenter davantage, ce qu'il faut éviter le plus qu'on peut pour ne pas dépenser de la poudre inutilement.

On voit aisément qu'il n'est point de difficultés touchant les projections sur des buts au niveau de la batterie qu'on ne puisse résoudre sans peine par le moyen du cercle dont je viens de parler, c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage. Mais voyons maintenant quel usage on peut faire de ce cercle à l'égard des buts qui sont au-dessus ou au-dessous du niveau de la batterie.

Mm

298. Il y a long-tems que l'on cherche une Methode aisée pour atteindre un but situé au-dessus ou au-dessous du niveau de la batterie. M. Blondel proposa ce Problème à l'Academie, & Messieurs Buot, de Romer, & de la Hire en donnerent de fort belles solutions synthetiques rapportées par M. Blondel dans son Traité du jet des Bombes ; mais comme ces solutions demandent plusieurs analogies, & la connoissance de plusieurs angles & sinus, ce qui les rend embarrassantes dans la pratique. Le P. Reynaud, M. de Maupertuis, M. Wolf, & beaucoup d'autres Geometres ont proposé des formules algebriques par lesquelles ils ont cru diminuer la difficulté. Quoique ces formules ne soient que du second degré, cependant leur usage n'en est pas si aisé qu'on se l'imagine, & d'ailleurs la plupart des gens de guerre n'aiment point l'algebre, & je doute fort qu'il se trouve des Bombardiers qui veuillent s'y assujettir. J'ai donc cru devoir me tourner d'un autre côté ; la force ou la charge de la poudre est facile à déterminer dès qu'on connoît la route ou la parabole que la bombe doit décrire pour atteindre un but situé au niveau de l'horizon : il ne s'agit donc, me suis-je dit à moi-même, que de réduire les cas du dessus ou du dessous du niveau de la batterie au seul cas de M. Blondel, & de trouver pour cela une Méthode facile à pratiquer ; or c'est ce que j'ai trouvé & d'une maniere si commode, qu'il n'est point d'enfant de dix ans qui ne puisse la pratiquer comme on le verra bientôt, mais auparavant voici le principe que je dois établir.

Soit une parabole ABC (l'fig. 238.) décrite sous un angle DAC avec une force quelconque ; soit l'amplitude AC coupée en quatre parties égales, & des points de division soient élevées les perpendiculaires FI, GK, HL, qui coupent la direction AD aussi en quatre parties égales, & la parabole aux points M, B, N, entre lesquels le point B est le sommet & les deux autres M, N, étant également éloignés du sommet sont aussi également éloignés de l'amplitude AC. Je dis que si l'on joint les points M, N, par la droite MN qui par conséquent sera parallele à l'amplitude, & qui coupera la plus grande hauteur BG en O, la partie BO de cette hauteur sera égale au tiers de FM ou de NH.

Je nomme $AD = x$, donc $AI = \frac{1}{4}x$, $AK = \frac{2}{4}x$, & $AL = \frac{3}{4}x$. Or par la propriété de la parabole les chûtes IM, KB, LN, DC sont comme les quarrés des droites AI, AK, AL, AD, donc ces chutes sont $\frac{1}{16}xx$, $\frac{4}{16}xx$, $\frac{9}{16}xx$, & xx ; mais à cause

des triangles semblables IAF, KAG, LAH, DAC, on a DC, IF :: DA, IA, & $IA = \frac{1}{4}DA$, donc $IF = DC = \frac{1}{4}xx$; par un semblable raisonnement on trouvera $KG = \frac{2}{4}xx$, & $LH = \frac{3}{4}xx$; donc si de $IF = \frac{1}{4}xx$ on retranche $IM = \frac{1}{8}xx$, on aura $FM = \frac{1}{8}xx$; de même, si de $KG = \frac{2}{4}xx$ on retranche $KB = \frac{4}{8}xx$, le reste BG sera $\frac{4}{8}xx$; ôtant donc de $BG = \frac{4}{8}xx$, la partie $GO = FM = \frac{1}{8}xx$, on aura $BO = \frac{1}{8}xx$, & par conséquent BO sera égal au tiers de FM, ce qu'il falloit démontrer. Cela posé,

PREMIERE DIFFICULTE'.

La hauteur BN (Fig. 239.) d'un but B au-dessus du niveau de la batterie A étant donnée avec la distance AN, trouver l'angle d'élevation sous lequel on atteindra ce but., & la force qu'on y doit employer.

SOLUTION.

Je coupe AN en trois parties égales aux points O, P; je prolonge AN, & je fais NM égal à $\frac{1}{3}$ de AN; du point P milieu de AM j'éleve PQ que je fais égal à $\frac{1}{3}NB$, & la parabole qui aura pour hauteur la droite QP & pour amplitude la droite AM passera par le but B par le principe précédent, puisque QP fera plus grand que BN de $\frac{1}{3}BN$; menant donc du point A la tangente AR, l'angle RAM sera l'angle d'inclinaison qu'il faudra donner au mortier, & cet angle pourra se connoître aisément, à cause que les côtés AP, PR, ou 2PQ du triangle rectangle APR sont connus; il ne s'agit donc plus que de trouver la force de la poudre, & pour cela je mene du sommet Q la droite QS qui coupe en S la droite AX perpendiculaire sur AC, & en Z la tangente AR; j'éleve au point Z la droite XZ perpendiculaire sur AR, laquelle coupe AX en X, & la droite AX est le diamètre du cercle XZA qui comprend cette projection par les principes établis ci-dessus; donc la racine de XA est la force de la poudre, c'est-à-dire que si on avoit fait une épreuve qui eut donné un diamètre plus grand ou moindre que XA, la différence des racines des diametres marqueroit de combien il faudroit augmenter ou diminuer la charge pour atteindre le but sous l'angle RAM.

Il est visible que toutes les lignes nécessaires dans ce cas sont faciles à trouver, car les côtés AP, PR du triangle rectangle

M m ij

APR étant connus, son hypothenuse se connoitra aisément, & par conséquent sa moitié AZ; de même l'angle d'inclinaison RAP pouvant se connoître comme il a été dit, l'angle RAX complément à l'angle droit de l'angle RAP sera aussi connu, donc dans le triangle AZX dont on connoît le côté AZ, & l'angle aigu ZAX, on pourra connoître l'hypothenuse AX.

SECONDE DIFFICULTE'.

Connoissant la hauteur BP (Fig. 240) du niveau AB de la batterie A au-dessus d'un but P, & la distance AB connoître sous quelle angle d'élevation on peut atteindre ce but & avec quelle force.

SOLUTION.

Je coupe BP en trois parties égales, j'en prends deux de B en C; je coupe aussi AB en trois parties égales, & j'en prends deux de A en D.

Du point C par le point D, je mène CDE faisant $DE = DC$; du point E, j'abaisse EQ perpendiculaire sur la droite AD, laquelle se trouve partagée également en Q, car les triangles rectangles CDB, DEQ étant semblables, & la base DC étant égale à la base DE, le côté DB est par conséquent égal au côté QD, mais DB est le tiers de AB, donc QD en est aussi le tiers, & AQ est le tiers restant, donc $AQ = QD$; je coupe EQ en deux parties égales en H, & la parabole qui a pour hauteur HQ, & pour base AD passe par le but donné P, ce que je démontre ainsi

Du point E je mène par le point A la tangente ES, faisant $AS = AE$, la force uniforme qui feroit parcourir AE selon la direction AE feroit parcourir dans le même tems la droite AS selon la direction AS, & par conséquent l'abaissement EH causé par la pesanteur à la fin de AE seroit égal à l'abaissement ST à la fin de AS; or les triangles rectangles AVS, AEQ étant semblables, & le côté AE étant égal au côté AS, on a $VS = EQ$; ajoutant donc à VS la droite $ST = EH = \frac{1}{2}EQ$, on a $VT = EQ + \frac{1}{2}EQ = \frac{3}{2}EQ$; or par la construction $CP = \frac{1}{2}BC$, & $BC = EQ$; donc $CP = \frac{1}{2}EQ$, & $BP = \frac{1}{2}EQ$, & par conséquent $VT = BP$; or il est visible que $VQ = QB$; donc les points T, P sont également distans de l'axe EX prolongé; ainsi puisque la parabole AHD étant continuée du côté de T passe par le point T, la même parabole continuée du côté de P passera par le point P.

Pour trouver la force de la poudre on menera du sommet H la droite HN qui coupe la tangente AE en N, & élevant au point N la perpendiculaire NM qui coupe en M la droite AM perpendiculaire sur AD, la droite AM sera le diamètre du cercle qui comprend cette projection, &c.

TROISIEME DIFFICULTE'.

Connoissant la hauteur BP (Fig. 241.) du niveau AB de la batterie au-dessus d'un but P, & la distance AB, connoître sous quel angle d'abaissement BAC on peut atteindre ce but & avec quelle force.

Je coupe BP en trois parties égales, & j'en prends deux de B en C; du point C par le point A je mene la droite CE, faisant $AE = AC$; du point E je mene EQ perpendiculaire sur BD, & coupant EQ en deux parties égales en H, & faisant $CD = QA$, la parabole qui a pour hauteur la droite HQ & pour base $AD = 2AQ$ passe par le but P; tirant donc selon la direction AC, on atteindra P.

La force uniforme qui feroit parcourir AE sur la direction AE, fait parcourir dans le même tems la droite AC sur la direction AC; donc l'abaissement EH causé par la pesanteur à la fin de AE est égal à l'abaissement CP qui seroit causé par la même pesanteur à la fin de AC; or à cause des triangles semblables & égaux AEQ, ABC, on a $EQ = BC$, donc $EH = \frac{1}{2}EQ = \frac{1}{2}BC$, & par conséquent l'abaissement $CP = \frac{1}{2}BC$, donc $CP = \frac{1}{2}BP$, & BC plus l'abaissement CP est égal à BP, donc la parabole passe par le point P: on trouvera sa force de même que ci-dessus.

QUATRIEME DIFFICULTE'.

Connoissant la hauteur BP (Fig. 241.) du niveau de la batterie A au-dessus d'un but B, & la distance AB, connoître la force qu'il faut donner pour atteindre le but en tirant selon l'horizontale AB.

Je prends une troisième proportionnelle aux lignes BP & AB; & il est clair que cette proportionnelle est le parametre de la parabole AP qui passe par le point P; ainsi le quart de cette parabole est la hauteur dont le corps devoit tomber pour acquérir la force requise. Ce quatrième cas n'a rien de difficile, & je n'en ai parlé que parce que quelques Auteurs y ont trouvé de l'embarras.

J'ai été plus long que je ne pensois sur cette matiere, mais

J'espère qu'on me pardonnera en faveur d'une nouveauté dont l'usage est extrêmement étendu.

Au reste lorsque le but est au-dessus ou au-dessous du niveau de batterie, il y a des cas où il est impossible de l'atteindre, mais comme on peut aisément juger de ces cas, je ne m'y arrête point de peur d'être trop long, il me suffira de dire que lorsqu'en agissant comme j'ai dit, on trouvera qu'il faudroit une charge qui seroit au-delà de la plus grande qu'on a coutume d'employer, le cas seroit impossible, puisqu'on ne sçauroit charger plus qu'on ne peut.

PROPOSITION CII.

299. Trouver la courbe de projection d'un corps en supposant que les directions de la pesanteur dans les differens endroits de la courbe ne soient pas paralleles entr'elles.

SOLUTION.

Supposons que le point C (Fig. 119.) soit le centre de la terre, & que le corps A soit projeté horizontalement, en sorte que la direction de la force qui le projette soit la ligne horizontale vraie ou l'arc AT, & que l'espace AN soit l'espace que cette force feroit parcourir au corps dans une minute. Supposons aussi que la droite AH soit la hauteur d'où le corps doit tomber pour acquérir une vitesse égale à la vitesse que donne la force qui a pour direction l'arc AT, & enfin que la droite AP soit l'espace que la pesanteur du corps lui feroit parcourir dans une minute. Je mene du point N la droite NC au centre de la terre, & du centre C avec le rayon CP je décris l'arc PM, ainsi le point M est le point où le corps A doit se trouver à la fin de la premiere minute.

Je mene Cn infiniment proche de CN, & l'arc pm infiniment proche de PM, & nommant AH = a, AP = x, AC = b, AN = y, j'ai Pp = RM = dx, Nn = dy, PC = MC = mC = b - x.

Les secteurs semblables CNn, CRm donnent CN, CR :: Nn, Rm, ou b, b - x :: dy, $\frac{b dy - x dy}{b} = Rm$, donc $Rm^2 = \frac{b - x}{bb} \times dy^2$,

or $MR^2 = dx^2$, & le triangle rectangle MmR donne $Mm^2 = MR^2 + Rm^2$, donc $Mm^2 = dx^2 + \frac{b - x}{bb} \times dy^2 = \frac{b^2 dx^2 + b - x \times dy^2}{bb}$.

Maintenant si le corps descendoit le long de AP ou de NM,

la vitesse acquise en P seroit $\sqrt{AP} = \sqrt{x}$, & comme l'espace Pp ou MR est infiniment petit, on peut regarder cette vitesse comme uniforme pendant le tems que le corps parcoureroit Pp ou MR; de même la vitesse acquise à la fin de l'arc AM étant la même que la vitesse acquise à la fin de HP $= a+x$, à cause que ce mouvement est composé de la vitesse HA que donne la force qui a la direction AT, & de la vitesse que donne la pesanteur, la vitesse, dis-je, acquise en M est $\sqrt{a+x}$; or cette vitesse peut être regardée comme uniforme pendant le tems que le corps parcourt l'espace Mm, donc les vitesses des espaces MR, Mm étant censées uniformes, elles sont entr'elles comme ces espaces, & par conséquent MR, Mm :: \sqrt{x} , $\sqrt{a+x}$, & $\overline{MR}^2, \overline{Mm}^2 :: x, a+x$; mais nous avons $\overline{MR}^2 = dx^2$, & $\overline{Mm}^2 = \frac{b^2 dx^2 + b^2 x \times dy^2}{bb}$, donc nous avons l'analogie qu'on voit ici.

Et multipliant la première raison par bb , puis faisant le produit des extrêmes & celui des moyens, ensuite retranchant de part & d'autre $bbx dx^2$, puis tirant la racine carrée, enfin divisant par $b+x\sqrt{x}$, j'ai $dy = \frac{bdx\sqrt{a}}{b-x\sqrt{x}}$, dont l'intégrale est $y = \int \frac{bdx\sqrt{a}}{b-x\sqrt{x}}$, ou bien

$$\begin{aligned} dx^2, \frac{b^2 dx^2 + b^2 x \times dy^2}{bb} &:: x, a+x \\ bbdx^2, b^2 dx^2 + b^2 x \times dy^2 &:: x, a+x \\ abbdx^2 + bbx dx^2 &= b^2 x dx^2 + b^2 x \times x dy^2 \\ abbdx^2 &= b^2 x \times x dy^2 \\ bdx\sqrt{a} &= b-x \times dy\sqrt{x} \\ \frac{bdx\sqrt{a}}{b-x\sqrt{x}} &= dy \\ y &= \int \frac{bdx\sqrt{a}}{b-x\sqrt{x}} \\ y &= \int \frac{abdx}{b-x\sqrt{ax}} \end{aligned}$$

$y = \int \frac{abdx}{b-x\sqrt{ax}}$, en multipliant le numérateur & le dénominateur par \sqrt{a} .

Pour trouver cette integrale, je multiplie le second membre par a , ce qui donne $\int \frac{a^2 bdx}{b-x\sqrt{ax}}$, & je regarde ce produit comme l'aire d'une courbe, laquelle étant décrite, & sa quadrature étant supposée connue, je n'aurai qu'à diviser par a pour avoir la valeur de y .

Or je puis décrire cette courbe de plusieurs façons comme on a pu l'observer dans les exemples que nous avons donnés ci-dessus de ces sortes de courbes, mais dans le cas présent j'observe que la courbe que je cherche étant $\int \frac{a^2 b dx}{b - x \sqrt{ax}}$, son élément sera $\frac{a^2 b dx}{b - x \sqrt{ax}}$, & par conséquent son ordonnée sera $\frac{a^2 b}{b - x \sqrt{ax}}$; or cette ordonnée est formée par deux analogies dont la première est \sqrt{ax} , $a :: a, \frac{a^2}{\sqrt{ax}}$, & la seconde est $b - x$, $\frac{a^2}{\sqrt{ax}} :: b, \frac{a^2 b}{b - x \sqrt{ax}}$. Mais le premier terme \sqrt{ax} de la première analogie est l'ordonnée d'une parabole dont le paramètre est $= a$, ainsi si je décris sur le diamètre AC une parabole AZ dont le paramètre soit $AH = a$, & que je fasse PQ, $AH :: AH, \frac{AH^2}{PQ} = \frac{a^2}{\sqrt{ax}}$, & qu'ensuite je fasse CP, $\frac{a^2}{\sqrt{ax}} :: AC, \frac{a^2 \times AC}{CP \sqrt{ax}} = \frac{a^2 b}{b - x \sqrt{ax}}$, la droite $\frac{a^2 b}{b - x \sqrt{ax}}$ sera l'ordonnée de la courbe que je cherche correspondante à l'abscisse AP; & faisant la même chose à l'égard de toutes les abscisses prises sur AC, je trouverai toutes les ordonnées, & par conséquent l'aire de la courbe que je cherche; ainsi supposant que cette aire qui sera $\int \frac{a^2 b}{b - x \sqrt{ax}}$ soit connue, & divisant par a la partie qui est coupée par l'ordonnée correspondante à l'abscisse AP, le quotient sera $\int \frac{ab}{b - x \sqrt{ax}} = y$, c'est-à-dire l'arc AN; ainsi supposant la quadrature du cercle, c'est-à-dire qu'on ait une ligne égale à la circonférence du rayon CA, on aura la valeur de son arc AN; c'est pourquoi de l'extrémité N tirant NC au centre C, & décrivant l'arc PM, on trouvera le point M de la courbe de projection correspondante à l'extrémité P de l'abscisse AP que je suppose connue & déterminée; & faisant la même chose à l'égard de toutes les autres abscisses de AC, on aura la courbe AMS de projection.

Comme ceci n'est pas d'une grande utilité, je n'entre pas dans un plus grand détail.

CHAPITRE XI.

Du choc des Corps.

DEFINITIONS.

300. **O**N dit qu'un corps est *parfaitement dur*, lorsqu'en venant à choquer contre un autre il ne change point de figure, qu'il est *mol* lorsque le choc lui fait perdre la figure qu'il avoit, enfin qu'il est *élastique* ou à *ressort*, lorsque le choc lui faisant d'abord perdre sa première figure, il la reprend aussitôt par sa propre force. Un bâton, par exemple qui se courbe lorsqu'on le presse en appuyant un de ses bouts sur un plancher ou contre une muraille, & qui se remet en ligne droite lorsqu'on ne le presse plus, est un corps *élastique*.

301. On dit qu'un corps choque un autre corps *perpendiculairement* lorsqu'il le choque selon une direction perpendiculaire à ce corps, & qu'il le choque *obliquement* lorsqu'il le choque selon une direction oblique.

302. Le *centre de percussion* est le point par lequel un corps choque un autre corps avec une force plus grande que par tout autre point.

303. L'*action* d'un corps sur un autre est la manière dont ce corps agit sur l'autre, & la *réaction* est la manière dont le corps choqué ou pressé agit sur celui qui le choque ou qui le presse.

Tout corps qui agit sur un autre corps reçoit de cet autre corps une réaction qui est égale à son action. Si *quelqu'un*, dit M. Newton, *presse une pierre avec le doigt, ce doigt sera autant pressé par la pierre que la pierre en est pressée. Si un Cheval tire un poids, il est attiré de la même façon par ce poids; c'est-à-dire, la force qu'il a pour aller en avant est diminuée d'une quantité égale à la résistance que fait le corps, & de là on a tiré l'axiome suivant.*

AXIOME.

304. La réaction est égale & contraire à l'action.

PROPOSITION CIII.

305. Si un corps A non élastique (Fig. 120) choque un autre corps
N n

B non élastique qui est en repos , ou qui se meut selon la même direction , mais avec moins de vitesse , la somme des quantités de mouvement après le choc est égale à la somme des quantités avant le choc.

DEMONSTRATION

Si les deux corps se meuvent selon la même direction , je nomme a la quantité de mouvement de A avant le choc , b la quantité de mouvement de B aussi avant le choc , & c la quantité que B reçoit dans l'instant du choc , par l'axiome précédent B reagissant sur A produit dans A une quantité $= c$; or ce mouvement étant contraire au mouvement a , détruit dans A une quantité $= c$, donc le mouvement de A après le choc est $a - c$, & celle de B est $b + c$, ajoutant donc ensemble ces deux quantités de mouvement la somme sera $a - c + b + c = a + b$, mais la somme des quantités de mouvement avant le choc étoit aussi $a + b$, donc les sommes des quantités de mouvement sont égales avant & après le choc.

Si B est en repos avant le choc , sa quantité de mouvement est $= 0$, & par conséquent la somme des quantités de mouvement avant le choc est $a + 0 = a$; or après le choc le mouvement de B est c , & celui de A est $a - c$, à cause que B par sa réaction détruit c dans A , donc la somme des mouvemens après le choc est $a - c + c = a$, & par conséquent la somme des quantités de mouvement avant le choc est égale à la somme après le choc.

PROPOSITION CIV.

306. *Si deux corps A , B non élastiques (Fig. 120.) qui se meuvent avec des directions contraires viennent à se choquer , la différence de leurs quantités de mouvement avant le choc est égale à la somme de leurs quantités de mouvement après le choc.*

DEMONSTRATION.

Je nomme a la quantité de mouvement de A avant le choc ; & b la quantité de mouvement de B , aussi avant le choc ; ainsi si $a = b$, la différence sera $a - b = 0$; or les deux corps agissant & reagissant avec la même force , le mouvement cessera dans l'instant du choc , donc la quantité de mouvement après le choc sera égale à zero , & par conséquent cette quantité sera égale à la différence avant le choc.

Si a est plus grand que b , la différence avant le choc sera $a - b$; or le mouvement de B après le choc sera $= c$, parce que a aura détruit b & produit le mouvement contraire c dans B, & à cause de la réaction de B le mouvement de A après le choc sera $a - b - c$, ajoutant donc ensemble ces deux quantités de mouvement, la somme sera $a - b - c + c = a - b$, donc la somme des quantités de mouvement après le choc sera égale à la différence des quantités avant le choc.

Si b est plus grand que a , la différence avant le choc sera $b - a$, & l'on connoîtra aisément que le mouvement de a après le choc sera c , que celui de b sera $b - a - c$, & que la somme des deux sera $b - a - c + c = b - a$, donc, &c.

Nota. Que dans les cas de cette Proposition, de même que dans ceux de la précédente, les Cartesiens disent qu'il y a toujours une même quantité de mouvement avant & après le choc; mais comme ils ne prennent pour quantité de mouvement avant & après le choc que celle qui est selon la direction du corps qui a le plus de force, & qu'ils en retranchent celle qui a une direction contraire, il est visible que ce que nous appellons différence des quantités de mouvement avant le choc, est la même chose que ce qu'ils appellent quantité de mouvement, & qu'ainsi on est d'accord dans le fonds quoiqu'on s'exprime différemment.

A X I O M E.

307. Si un corps A non élastique venant à choquer un corps B ne lui communique aucun mouvement, le mouvement du corps A cesse totalement.

L'expérience générale & commune est une preuve certaine de cet Axiome, cependant si on en veut une raison, il n'y a qu'à faire attention que le corps A ne communiquant aucune quantité de mouvement au corps B, le corps B ne sçauroit non plus lui en donner par sa réaction, & qu'ainsi le corps B ne faisant que s'opposer invinciblement au mouvement du corps A, il faut nécessairement que le mouvement de celui-ci se détruise; ou bien encore on peut dire que le corps A choquant le corps B avec toute sa force, laquelle est égale à sa quantité de mouvement, le corps B reagit en lui communiquant une égale quantité de mouvement, dont la direction est contraire à celle qu'il avoit, ce qui fait que le mouvement se détruit.

N n ij

LA MECHANIQUE
PROPOSITION. CIX.

313. Si deux corps non élastiques, d'égales masses, & qui se meuvent avec différentes vitesses & des directions contraires, viennent à se choquer, enforte que l'on entraîne l'autre, la vitesse après le choc sera égale à la moitié de la différence des vitesses avant le choc.

DEMONSTRATION.

Soit M la masse du premier & du second, V la vitesse du premier & u celle du second; la quantité de mouvement du premier sera MV , celle du second sera Mu , & leur différence sera $MV - Mu$; or cette différence est égale à la différence de la quantité de mouvement après le choc (N 306), donc la vitesse après le choc sera $\frac{MV - Mu}{2M}$, mais la différence des vitesses avant le choc est $V - u$; donc la vitesse après le choc est à la différence des vitesses avant le choc, comme $\frac{MV - Mu}{2M}$ est à $V - u$, ou comme $\frac{MV - Mu}{2M}$ est à $\frac{1}{2} \frac{MV - Mu}{M}$, ou comme 1 est à 2.

COROLLAIRE I.

314. Si les masses étant inégales, les vitesses sont reciproques aux masses, le mouvement cesse après le choc. Car par la supposition on a $M, m :: u, V$, donc $MV = mu$, c'est-à-dire les quantités des mouvemens avant le choc sont égales, & par conséquent leur différence $MV - mu = 0$; or après le choc la quantité de mouvement restante est égale à la différence des quantités avant le choc (N. 306), donc cette quantité est zero, & par conséquent le mouvement cesse.

COROLLAIRE II.

315. Si les masses étant inégales les vitesses sont égales, la vitesse après le choc est à la vitesse avant le choc, comme la différence des masses est à leur somme. Car la quantité de mouvement du premier avant le choc est MV , celle du second est mV , & leur différence est $MV - mV$; mais la quantité de mouvement après le choc est égale à cette différence, donc la vitesse après le choc est $\frac{MV - mV}{M + m}$, & par conséquent cette vitesse est à la vitesse avant le choc, comme $\frac{MV - mV}{M + m}$ est à V , ou $\frac{MV + mV}{M + m}$, ou comme $M - m$ est à $M + m$.

A avant le choc, la quantité de mouvement de A avant le choc est donc MV , & celle de B est zero; mais après le choc la somme des quantités de mouvement doit être égale à la somme des quantités de mouvement avant le choc, (N. 305), donc la somme après le choc doit être encore $=MV$; or la vitesse est toujours égale à la quantité de mouvement divisée par la masse, donc la vitesse commune aux deux corps après le choc est MV divisée par $M+m$, c'est-à-dire $\frac{MV}{M+m}$; mais la vitesse avant le choc étoit V , donc la vitesse après le choc est à la vitesse avant le choc, comme $\frac{MV}{M+m}$ est à V , ou comme $\frac{MV}{M+m}$ est à $\frac{MV+mV}{M+m}$, ou comme M est à $M+m$.

Si $M=m$ la vitesse après le choc sera à la vitesse avant le choc comme M à $2M$ ou comme 1 à 2.

PROPOSITION CVIII.

311. Si un corps A non élastique choque un autre corps B non élastique aussi, & qui se meut selon la même direction, mais avec moins de vitesse, & que le corps A entraîne le corps B, la vitesse après le choc sera égale à la somme des quantités de mouvement divisée par la somme des masses.

DEMONSTRATION.

Je nomme M la masse de A, V sa vitesse, m la masse de B, & u sa vitesse; la quantité de mouvement de A avant le choc sera donc MV , celle de B sera mu , & la somme des deux $MV+mu$; or cette somme doit être la même après le choc (N. 305), donc la vitesse commune après le choc sera $\frac{MV+mu}{M+m}$.

COROLLAIRE.

312. Si $M=m$ la vitesse après le choc est égale à la moitié de la somme des vitesses avant le choc; car la vitesse après le choc sera $\frac{MV+Mu}{M+m} = \frac{MV+Mu}{2M}$; or la somme des vitesses avant le choc est $V+u$, donc la vitesse après le choc sera à la somme des vitesses avant le choc, comme $\frac{MV+Mu}{2M}$ est à $V+u$, ou comme $\frac{MV+Mu}{2M}$ est à $\frac{2MV+2Mu}{2M}$, ou comme $MV+Mu$ est à $2MV+2Mu$, ou enfin comme 1 à 2.

Or l'opération que nous venons d'enseigner pour trouver le centre de percussion est la même que nous avons enseignée ci-dessus (N. 264.) pour trouver le centre d'oscillation, donc le centre d'oscillation & le centre de percussion d'un corps ne sont qu'une même chose.

Si le corps AB se meut toujours parallèlement à lui-même vers le corps AC (Fig. 122), toutes ses parties parcourent des espaces BC, PM, RS, &c. égaux entr'eux, & ces espaces expriment leurs vitesses à cause qu'ils sont parcourus dans le même tems, donc les forces de ces parties sont leurs produits par ces vitesses égales; mais pour trouver un point sur AC où la somme de ces forces étant réunie produise le même effet, il faut multiplier ces forces par leurs distances AC, AM, AS, &c. & diviser ensuite la somme des produits par la somme des forces, comme il vient d'être dit; or les vitesses étant égales les forces sont comme les masses, donc on aura le même quotient, si au lieu de multiplier les forces par leurs distances AC, AM, AS, &c. & de diviser la somme des produits par la somme des forces, on multiplie simplement les parties du corps AB mises en C, M, S par leurs distances AC, AM, AS, & qu'on divise la somme des produits par la somme des parties; mais cette opération est la même que celle que l'on fait pour trouver le centre de gravité d'un corps (N. 118), donc en ce cas le centre de percussion & le centre de gravité sont la même chose.

DEFINITION.

318. Si un corps A (Fig. 123) choque obliquement un corps BD, l'angle que fait la direction AC du corps A avec le corps BD se nomme *angle d'incidence*, & si le corps A après avoir choqué le corps BD se réfléchit, l'angle fait par la nouvelle direction CE qu'il prend avec le corps BD, se nomme *angle de réflexion*.

PROPOSITION CXI.

319. *La force élastique ou la force du ressort d'un corps est égale à la force qui le comprime, ou qui le tend sans le briser.*

DEMONSTRATION.

Puisque le corps est comprimé ou tendu sans être brisé, il est évident qu'il résiste avec une force égale à celle qui le comprime

me ou qui le tend ; or il ne résiste que par la force élastique ; donc la force élastique est égale à la force qui comprime ou qui tend le corps.

PROPOSITION CXII.

320. Si un corps élastique A (Fig. 123.) choque selon une direction perpendiculaire AB un corps BD qui est en repos & qui n'est point ébranlé par le choc, & que le corps A ne se brise point, ce corps se réfléchira avec la même vitesse le long de la même droite BA.

DEMONSTRATION.

Le corps A ne pouvant surmonter le corps BD, toute sa force se consomme à comprimer son ressort, or ce ressort n'étant point brisé par la supposition, acquiert une force égale à celle qui le comprimait, donc il fait reprendre à la partie comprimée sa première figure, mais il ne peut faire cet effet en faisant reculer le corps BD, qui lui résiste invinciblement, donc il le fait en poussant le corps A selon la direction BA & avec la même vitesse; car il n'y a pas de raison de dire que la direction doive changer.

COROLLAIRE.

321. Si le corps BD étoit aussi élastique, la force du corps A comprimerait d'abord le corps B, lequel par sa réaction comprimerait aussi le corps A, après quoi le ressort du corps B ayant acquis une force égale à la force qui le comprimait, ferait reprendre sa première figure à sa partie comprimée, & par la même raison le ressort du corps A ferait reprendre à sa partie comprimée sa première figure; mais comme il ne pourroit faire cet effet du côté de B, où il trouveroit une résistance invincible, il le ferait en poussant A avec la même vitesse & avec la direction BA.

PROPOSITION CXIII.

322. Si un corps élastique A (Fig. 123.) choque selon une direction oblique AC un corps BD, qu'il ne peut ébranler, ce corps se réfléchira selon une direction CE, en sorte que l'angle de réflexion ECD sera égal à l'angle d'incidence ACR.

comme AC ; or quand il le choque obliquement selon la direction AC sa force est équivalente aux deux forces AB, AF, dont la seconde ne choque point du tout le corps BD, donc le choc n'est que comme AB, ainsi le choc perpendiculaire est au choc oblique comme AC est à AB, mais en prenant AC pour sinus total, la droite AB est le sinus de l'angle ACB d'incidence, donc le choc perpendiculaire est au choc oblique comme le sinus droit est au sinus de l'angle d'incidence.

PROPOSITION CXIV.

325. Si un corps élastique A choque directement un autre corps B élastique qui lui est égal & qui est en repos ; après le choc, A sera en repos, & B aura le même mouvement que A avoit avant le choc.

DEMONSTRATION.

Si les deux corps n'étoient point élastiques ils se mouvroient tous deux dans la même direction, & avec une vitesse égale à la moitié de la vitesse que A avoit avant le choc (N. 310) ; or le ressort de B agissant après la compression avec une vitesse égale à celle de la compression, & ne pouvant agir du côté de A parce que le ressort de A lui résiste, il pousse par conséquent B avec une demi-vitesse égale à la demi-vitesse que A a déjà communiqué à B, & par conséquent B se meut avec la vitesse entière que A avoit avant le choc ; au contraire le ressort de A agissant avec la même demi-vitesse, dont il a été comprimé par la réaction de B, & ne pouvant agir du côté de B qui lui résiste, il pousse le corps A selon une direction contraire, & comme le corps est encore poussé du côté de B avec une demi-vitesse, il s'ensuit que son mouvement cesse totalement puisque sa vitesse vers B est détruite par la demi-vitesse du ressort qui a une direction opposée.

COROLLAIRE.

326. Puisque A communique tout son mouvement à B, il est visible que si B choque directement un autre corps C qui lui soit égal, & qui soit en repos, il lui communiquera aussi tout son mouvement, & comme on peut dire la même chose d'un quatrième corps égal à A qui seroit en repos, d'un cinquième, d'un sixième, &c. il s'ensuit que si plusieurs corps égaux se touchent tous & qu'un corps A égal à chacun d'eux vienne à choquer directement le premier d'entr'eux, il n'y aura que le dernier qui

aura un mouvement égal au mouvement du corps A, & que tous les autres resteront en repos.

PROPOSITION CXV.

327. Si deux corps élastiques A, B égaux entr'eux, & qui se meuvent avec des directions contraires & des vitesses égales, viennent à s'entrechoquer directement, ils rebrousseront leur chemin avec les mêmes vitesses.

DEMONSTRATION.

Si les deux corps n'étoient point élastiques, ils demeureroient en repos après le choc (N. 308); ainsi les forces de ces deux corps se consomment à se comprimer mutuellement, après quoi leurs ressorts ayant acquis des forces égales à celles qui les comprimoient, & ne pouvant agir l'un contre l'autre, à cause qu'ils se résistent également, ils pressent les corps vers les côtés d'où ils sont venus & leur communiquent les mêmes vitesses.

PROPOSITION CXVI.

328. Si deux corps élastiques A, B, égaux entr'eux, mais qui se meuvent avec des vitesses inégales viennent à s'entrechoquer directement, ils rebrousseront chemin après le choc en faisant échange de leur vitesse.

DEMONSTRATION.

Si les deux corps se mouvoient avec une même vitesse V, ils rebrousseroient chemin avec la même vitesse (N. 327.) Si la vitesse de A étant $V+n$, celle de B est simplement V, & qu'ayant retranché V de part & d'autre, le corps A vienne à choquer avec son excès de vitesse n le corps B qui est en repos, le corps A après le choc restera en repos, & B se mouvra avec la vitesse n (N. 325.) ainsi si l'on redonne V de part & d'autre, il est évident qu'en ne considérant ces deux corps que comme ayant la même vitesse V, ils rebrousseront chemin avec la même vitesse, & qu'en faisant abstraction de cette vitesse, B recevra l'excès n , & A le perdra, donc après le choc la vitesse de B sera $V+n$, & celle de A sera V, & les deux corps rebrousseront chemin avec ces vitesses.

COROLLAIRE.

329. Donc les deux corps s'éloigneront l'un de l'autre avec la même vitesse totale avec laquelle ils s'étoient approchés.

PROPOSITION CXVII.

330. Si un corps élastique A choque directement un autre corps élastique B qui lui est égal & qui se meut plus lentement que lui dans la même direction. Après le choc les deux corps feront échange de leur vitesses , & continueront à suivre leur première direction.

DEMONSTRATION.

Soit $V+n$ la vitesse de A , & V la vitesse de B , il est évident qu'en ne considérant que la vitesse V de part & d'autre , il n'y a point de choc , & que A choquant B avec la vitesse n , le choque de même que s'il étoit en repos ; donc il communique à B la vitesse n en la perdant lui-même (N. 325.) & par conséquent la vitesse de A est V , & celle de B est $V+n$, & les deux corps suivent leur première direction.

COROLLAIRE.

331. Le corps B après le choc va plus vite que le corps A , de même que le corps A avant le choc alloit plus vite que le corps B , & comme l'excès de vitesse est égal avant & après le choc , il s'ensuit que les deux corps s'éloignent après le choc avec la même vitesse totale avec laquelle ils s'étoient approchés.

PROPOSITION CXVIII.

332. Si un corps A non élastique choque un autre corps B non élastique aussi qui se meut moins vite que lui selon la même direction , le choc est le même que celui que le corps A mû avec la différence des vitesses feroit sur le corps B qui seroit en repos.

DEMONSTRATION.

Je nomme M la masse de A , V sa vitesse , m la masse de B , & u sa vitesse ; donc la vitesse commune après le choc sera $\frac{MV+mu}{M+m}$ (N. 311.) la quantité de mouvement de M après le choc sera $\frac{M^2V+Mmu}{M+m}$, & comme la quantité de mouvement avant le

choc étoit MV , il est visible que la quantité qu'il aura perdue par le choc fera $MV - \frac{M^2V - Mmu}{M+m} = \frac{M^2V + MmV - M^2V - Mmu}{M+m} = \frac{MmV - Mmu}{M+m}$.

Supposons maintenant que B soit en repos, & que A le choque directement avec une vitesse $V - u$, la vitesse commune après le choc fera $\frac{MV - Mu}{M+m}$ (N. 310.) donc la quantité de mouvement de A après le choc fera $\frac{M^2V - M^2u}{M+m}$, & comme sa quantité de mouvement avant le choc étoit $MV - Mu$, la quantité qu'il aura perdue par le choc fera donc $\frac{M^2V - M^2u + MmV - Mmu - M^2V + M^2u}{M+m} = \frac{MmV - Mmu}{M+m}$, & cette quantité perdue est la même que la quantité perdue dans la première supposition; donc le choc est aussi le même dans l'une & l'autre supposition.

COROLLAIRE.

333. Si les deux corps A, B, sont élastiques, la force du ressort sera égale à la force du choc; ainsi en supposant que A se meuve plus vite que B, la force élastique agit sur ces corps dans le tems du choc avec la différence des vitesses que les corps avoient avant le choc.

PROPOSITION CXIX.

334. Si deux corps A, B, non élastiques s'entrechoquent directement, le choc est le même que celui que le corps A mû avec la somme des vitesses feroit sur le corps B qui seroit en repos.

DEMONSTRATION.

Nommant de même qu'auparavant M, m , les masses, V, u , les vitesses; la vitesse commune après le choc fera $\frac{MV - mu}{M+m}$ (N. 316.); donc la quantité de mouvement de A après le choc fera $\frac{M^2V - Mmu}{M+m}$, & comme sa quantité de mouvement avant le choc étoit MV , la quantité perdue par le choc fera $\frac{M^2V + MmV - M^2V + Mmu}{M+m} = \frac{MmV + Mmu}{M+m}$.

Supposons maintenant que B soit en repos, & que A le choque avec une vitesse $V + u$, la vitesse commune après le

choc fera $\frac{MV + Mu}{M + m}$ (N. 310.) ; donc la quantité de mouvement de A après le choc sera $\frac{M^2V + M^2u}{M + m}$, & comme la quantité de mouvement avant le choc étoit $MV + Mu$, la quantité perdue par le choc sera $\frac{M^2V + MmV + M^2u + Mmu - M^2VM^2u}{M + m} = \frac{MmV + Mmu}{M + m}$, & cette quantité perdue est la même que la quantité perdue dans la première supposition, donc le choc est aussi le même dans l'une & l'autre supposition.

COROLLAIRE.

335. Si les deux corps A, B, sont élastiques, la force du ressort est égale à la force du choc ; donc si A & B s'entrechoquent directement, la force élastique agit sur les deux corps avec une vitesse égale à la somme des vitesses.

PROPOSITION CXX.

336. Connoissant les vitesses de deux corps élastiques A, B, qui viennent à se choquer directement, connoître leur vitesses après le choc.

SOLUTION.

Si les corps A, B, avant le choc suivent une même direction, & que nous fassions abstraction du ressort, leur vitesse commune après le choc sera $\frac{MV + mu}{M + m}$ (N. 311.) ; or la force élastique agit sur ces corps avec une vitesse $V - u$, ainsi il ne s'agit plus que de sçavoir comment cette vitesse se distribue aux deux corps A, B.

Pour cela, supposons que la vitesse que le ressort donne à B soit x , il est sûr que le ressort de A ne pouvant vaincre le ressort de B, ni le ressort de B vaincre le ressort de A, les vitesses de ces ressorts doivent être réciproques aux masses A, B ; ainsi nous avons $M, m :: x, V - u - x$, d'où je tire $mx = MV - Mu - Mx$, ou $Mx + mx = MV - Mu$, donc $x = \frac{MV - Mu}{M + m}$, & par conséquent la vitesse que le ressort donne au corps A est $V - u - \frac{MV + Mu}{M + m} = \frac{MV + mV - Mu - mu - MV + Mu}{M + m} = \frac{mV - mu}{M + m}$; mais la vitesse $\frac{MV - Mu}{M + m}$ que le ressort donne au corps B n'étant pas contraire à sa direction doit être ajoutée à la vitesse $\frac{MV + mu}{M + m}$

que ce corps a reçu par le choc indépendamment du ressort ; donc la vitesse totale de B après le choc est $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$; au contraire la vitesse que le ressort donne au corps A étant contraire à sa direction doit être retranchée de la vitesse reçue par le choc indépendamment du ressort ; donc la vitesse totale de A après le choc est $\frac{MV + mu}{M + m} - \frac{mV + mu}{M + m} = \frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$.

Et il faut remarquer que si en mettant les valeurs des lettres M, m, V, u , dans la vitesse totale de A après le choc, il se trouve que cette vitesse est une grandeur négative, c'est une marque que la vitesse que le ressort lui communique est plus grande que la vitesse communiquée par le seul choc, & que par conséquent le corps A doit rebrousser chemin.

En second lieu, si les corps A, B, se choquent directement avec des directions contraires, leur vitesse commune après le choc & indépendamment du ressort est $\frac{MV - mu}{M + m}$ (N. 316.) ; or le ressort agit sur ces corps avec une vitesse $V + u$ (N. 335.) ; nommant donc $= x$ la partie de cette vitesse qui est communiquée à B, nous aurons $M, m :: x, V + u - x$, d'où je tire $mx = MV + Mu - Mx$, ou $Mx + Mx = MV + Mu$; donc $x = \frac{MV + Mu}{M + m}$, ainsi la vitesse communiquée à A est $V + u - \frac{MV + Mu}{M + m} = \frac{MV + Mu + mV + mu - MV - Mu}{M + m} = \frac{mV + mu}{M + m}$.

Supposant donc comme nous faisons que le corps B rebrousse chemin, la vitesse que le ressort lui donne n'étant pas contraire à sa nouvelle direction, doit être ajoutée à la vitesse que le choc lui communique, ainsi sa vitesse totale après le choc est $\frac{MV - mu + MV + Mu}{M + m} = \frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$, & au contraire la vitesse communiquée par le ressort au corps A étant contraire à sa direction, doit être retranchée de celle que le choc lui a communiquée, ainsi sa vitesse totale après le choc est $\frac{MV - mu - mV - mu}{M + m} = \frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$.

Et il faut remarquer que si MV est moindre que $mV - 2mu$, la vitesse totale de A devient négative, ce qui fait voir que la vitesse que le ressort a communiqué à A est plus grande que celle que le choc lui avoit donnée, & que par conséquent A doit rebrousser chemin.

Nota.

Nota. Que dans cette Proposition & les suivantes, nous supposons toujours la force du corps A plus grande que la force du corps B, c'est-à-dire MV plus grand que mu ; & si cela arrivoit autrement, il faudroit attribuer à B ce que nous attribuons à A, & attribuer à A ce que nous attribuons à B, en mettant partout m au lieu de M , & M au lieu de m , de même u au lieu de V , & V au lieu de u .

COROLLAIRE I.

337. Dans le premier cas de cette Proposition; nous avons pour la vitesse totale de A après le choc

$$\frac{MV - mV + 2mu}{M + m} = \frac{MV + mV - 2mV + 2mu}{M + m} = V - \frac{2mV + 2mu}{M + m} = V - \frac{2mV - 2mu}{M + m}.$$

Or la dernière partie de cette valeur, c'est-à-dire $\frac{2mV - 2mu}{M + m}$ donne cette analogie $M + m, 2m :: V - u, \frac{2mV - 2mu}{M + m}$, & par conséquent la somme des masses est au double de la seconde masse comme la différence des vitesses avant le choc est à un quatrième terme, lequel étant retranché de la vitesse de la première masse avant le choc, donne la vitesse de cette même première masse après le choc.

De même nous avons dans le même premier cas de cette Proposition la vitesse totale de B après le choc $\frac{2MV + mu - Mu}{M + m}$
 $= \frac{Mu + mu + 2MV - 2Mu}{M + m} = u + \frac{2MV - 2Mu}{M + m}$; or la dernière partie $\frac{2MV - 2Mu}{M + m}$ de cette valeur donne $M + m, 2M :: V - u, \frac{2MV - 2Mu}{M + m}$; donc la somme des masses est au double de la première masse comme la différence des vitesses avant le choc est à un quatrième terme, lequel étant ajouté à la vitesse de la seconde masse B avant le choc, donne la vitesse totale de cette masse B après le choc; ainsi on a deux règles pour trouver les vitesses de A & B après le choc dans le premier cas de cette Proposition.

COROLLAIRE II.

338. Dans le second cas de cette Proposition on a la vitesse totale de A après le choc

$$\frac{MV - mV - 2mu}{M + m} = \frac{MV + mV - 2mV - 2mu}{M + m} = V - \frac{2mV + 2mu}{M + m};$$

or la seconde partie de cette valeur donne $M + m$;

$2M :: V + u, \frac{2mV + 2mu}{M + m}$, donc la somme des masses est au double de la seconde masse B comme la somme des vitesses avant le choc est à un quatrième terme, lequel étant retranché de la vitesse de la première masse A avant le choc, donne la vitesse de cette même masse A après le choc.

De même la vitesse totale de B après le choc est $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$
 $= \frac{2MV + 2Mu - Mu - mu}{M + m} = \frac{2MV + 2Mu}{M + m} - u$; or la première partie de cette valeur donne $M + m, 2M :: V + u, \frac{2MV + 2Mu}{M + m}$, donc la somme des masses est au double de la première masse A comme la somme des vitesses avant le choc est à un quatrième terme duquel retranchant la vitesse de la seconde masse B avant le choc, le reste sera la vitesse de cette même masse B après le choc; ainsi voilà deux autres règles pour trouver les vitesses des corps A, B, après le choc dans le second cas de la Proposition.

COROLLAIRE III.

339. Si A & B, mis avec des directions contraires s'entrechoquent directement avec des vitesses proportionnelles aux masses, ils rebrousseront chemin après le choc avec les mêmes vitesses.

Après le choc la vitesse totale de A sera $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$; or par la supposition, on a $M, m :: u, V$; donc $MV = mu$; mettant donc dans la vitesse totale de A, $2MV$ au lieu de $2mu$, on aura pour sa vitesse totale après le choc $-\frac{MV - mV}{M + m} = -V$, c'est-à-dire que le corps A rebroussera chemin avec une vitesse V égale à la vitesse qu'il avoit avant le choc.

De même, la vitesse totale de B après le choc est $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$

& mettant $2mu$ au lieu de $2MV$, on a $\frac{Mu + mu}{M + m} = u$, c'est-à-dire le corps B rebroussera chemin avec une vitesse u égale à celle qu'il avoit avant le choc.

COROLLAIRE IV.

340. Si B est en repos avant le choc, la vitesse de A après le choc est à sa vitesse avant le choc comme la différence des masses est à leur somme, & la vitesse de B après le choc est à la vitesse de A avant le choc, comme le double de la masse A est à la somme des poids.

Si les corps A, B, étoient en mouvement, & qu'après le choc ils suivissent la même direction, la vitesse totale de A après le choc seroit $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ (N. 336.), mais par la supposition, B est en repos, donc $u = 0$, & $2mu = 0$; par conséquent la vitesse totale de A après le choc est $\frac{MV - mV}{M + m}$; or la vitesse de A avant le choc est V, ou $\frac{MV + mV}{M + m}$, donc la vitesse après le choc est à la vitesse avant le choc comme $MV - mV$ est à $MV + mV$, ou comme $M - m$ est à $M + m$.

De même la vitesse totale de B après le choc seroit $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$ (N. 336.) si les deux corps étoient en mouvement, & qu'après le choc ils suivissent la même direction; or B étant en repos par la supposition, on a $u = 0$, $mu = 0$, & $Mu = 0$, donc la vitesse de B après le choc est $\frac{2MV}{M + m}$, mais la vitesse de A avant le choc est V, ou $\frac{MV + mV}{M + m}$; donc la vitesse de B après le choc est à la vitesse de A avant le choc comme $2MV$ est à $MV + mV$, ou comme $2M$ est à $M + m$.

Et de là il suit que la vitesse de A après le choc est à la vitesse de B après le choc comme $M - m$ est à $2M$, c'est-à-dire comme la différence des masses est au double de la masse de A.

COROLLAIRE V.

341. Si les deux corps A, B, suivent la même direction avant & après le choc, la différence de leur vitesses après le choc est égale à la différence de leur vitesses avant le choc.

La vitesse totale de A après le choc est $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ (N. 336.) & celle de B est $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$; or après le choc le corps A va moins vite que B, à cause que le ressort a augmenté la vitesse que B a reçu par le choc, au lieu qu'il a diminuée la vitesse de A reçue par le choc, laquelle lui étoit commune avec B; donc retranchant la vitesse totale de A de la vitesse totale de B, le reste fera $\frac{2MV - Mu + mu - MV + mV - 2mu}{M + m} = \frac{MV + mV - Mu - mu}{M + m} = V - u$, c'est-à-dire la différence des vitesses après le choc est égale à leur différence avant le choc.

COROLLAIRE VI.

342. Si les deux corps A, B ont la même direction avant le choc, & des directions contraires après le choc, la somme des vitesses après le choc est égale à la différence des vitesses avant le choc.

Par l'hypothèse le corps A va plus vite que le corps B avant le choc, donc la différence des vitesses est $V - u$; or par la même hypothèse le corps A rebrousse chemin après le choc, donc la vitesse qu'il reçoit par le ressort est plus grande que la vitesse commune reçue par le choc, ainsi sa vitesse totale $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ devenant négative est $\frac{mV - 2mu - MV}{M + m}$; or la vitesse totale de B est $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$; ajoutant donc ensemble ces deux vitesses, leur somme est $\frac{MV + mV - Mu - mu}{M + m} = V - u$, c'est-à-dire la somme des vitesses après le choc est égale à la différence des vitesses avant le choc.

COROLLAIRE VII.

343. Si les deux corps A, B ont des directions contraires avant le choc, & qu'après le choc ils suivent la même direction, la somme des vitesses avant le choc est égale à la différence des vitesses après le choc.

La vitesse totale de A après le choc fera $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$ & celle de B $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$; or la vitesse de B sera plus grande que celle de A parce que la vitesse que le ressort lui donne augmente la vitesse reçue par le choc, au lieu que la vitesse que le ressort donne à A diminue la vitesse que A reçoit par le choc, laquelle lui est commune avec B, ôtant donc de la vitesse totale de B la vitesse totale de A, le reste fera $\frac{MV + mV + Mu + mu}{M + m} = V + u$; c'est-à-dire la différence des vitesses après le choc est égale à la somme des vitesses avant le choc.

COROLLAIRE VIII.

344. Si les deux corps A, B, ont des directions contraires avant & après le choc, la somme des vitesses est égale avant & après le choc.

retranchant donc la première quantité de la seconde, le reste sera $\frac{M^2V + MmV - Mmu - m^2u}{M + m} = MV - mu$; or $MV - mu$ est la différence des quantités de mouvement avant le choc, donc la différence des quantités après le choc est égale à la différence avant le choc.

COROLLAIRE XI.

347. Si les corps A, B ont la même direction avant le choc, & des directions contraires après le choc, la différence des quantités de mouvement après le choc, est égale à la somme des quantités de mouvement avant le choc.

Puisque A rebrousse chemin, sa vitesse totale $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ devient négative, & est $\frac{mV - 2mu - MV}{M + m}$; donc sa quantité de mouvement est $\frac{MmV - 2Mmu - M^2V}{M + m}$; de même la vitesse totale de B est $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$, & sa quantité de mouvement est $\frac{2MmV - Mmu + m^2u}{M + m}$; ôtant donc la première quantité de la seconde, le reste est $\frac{M^2V + MmV + Mmu + m^2u}{M + m} = MV + mu$; or $MV + mu$ est la somme des quantités de mouvement avant le choc; donc cette somme est égale à la différence des quantités après le choc.

COROLLAIRE XII.

348. Si les deux corps A, B ont des directions contraires avant le choc, & la même direction après le choc, la somme des quantités de mouvement après le choc est égale à la différence des quantités avant le choc.

La vitesse totale de A après le choc est $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$, & sa quantité de mouvement $\frac{M^2V - MmV - 2Mmu}{M + m}$; de même la vitesse totale de B est $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$, & sa quantité de mouvement $\frac{2MmV + Mmu - m^2u}{M + m}$; ajoutant donc ensemble ces deux quantités de mouvement, la somme est $\frac{M^2V + MmV - Mmu - m^2u}{M + m} = MV - mu$; or $MV - mu$ est la différence des quantités avant le choc, donc cette différence est égale à la somme des quantités après le choc.

349. On voit par les quatre derniers Corollaires que la somme des quantités de mouvement avant & après le choc, n'est la même que lorsque les corps A, B, que nous supposons inégaux d'inégales vitesses, & dont les vitesses ne sont pas reciproques aux masses, ont la même direction avant & après le choc; ainsi il semble qu'on pourroit condamner ceux qui disent qu'il y a toujours une égale quantité de mouvement avant & après le choc; mais il faut prendre garde que les Geomètres qui pensent ainsi, entendent par le mot de quantité de mouvement, ce que nous entendons par celui de différence de quantité de mouvement, lorsque les deux corps vont avec des directions contraires avant ou après le choc, c'est-à-dire, qu'ils ne prennent pour quantité de mouvement que celle qui est selon la direction qui avoit le plus de force avant le choc, en retranchant de cette quantité celle qui a une direction contraire. Or dans ce sens on ne sçauroit les condamner, puisque la différence entr'eux & nous ne consiste que dans les mors; après tout, leur façon de s'exprimer ne laisse pas que d'avoir son utilité, comme on le verra dans la suite.

COROLLAIRE XIII.

350. Si les corps A, B ont la même direction avant le choc & des directions contraires après le choc, la quantité de mouvement après le choc est plus grande qu'elle n'étoit auparavant.

Par le Corollaire XI. (N. 347.) la différence des quantités de mouvement après le choc est égale à la somme des quantités de mouvement avant le choc; or la différence des quantités de mouvement après le choc, est moindre que la somme de ces mêmes quantités; donc la somme des quantités après le choc est plus grande que la somme des quantités avant le choc.

COROLLAIRE XIV.

351. Si le corps A, B ont des directions contraires avant le choc, & la même direction après le choc, la quantité de mouvement est moindre après le choc qu'elle n'étoit auparavant.

Par le Corollaire XII. (N. 348.) la somme des quantités de mouvement après le choc est égale à la différence des quantités avant le choc; mais la somme des quantités avant le choc est plus grande que leur différence, donc la somme des quantités après le choc est moindre que la somme des quantités avant le choc.

des vitesses après le choc (N. 344), donc les deux corps s'éloignent aussi vite qu'ils s'étoient approchés.

COROLLAIRE I.

353. Donc dans des tems égaux avant & après le choc, les corps A, B se trouvent également éloignés, c'est-à-dire que s'il leur a fallu une minute pour se joindre lorsqu'ils étoient à la distance d'un pied, il leur faudra aussi une minute pour se trouver éloignés d'un pied, &c.

COROLLAIRE II.

354. La somme des vitesses lorsque les corps ont des directions contraires, ou la différence des vitesses lorsqu'ils ont une même direction est appelée par quelques Auteurs *vitesse respective*, ainsi on peut énoncer la Proposition que nous venons de démontrer, en disant, que *dans le choc de deux corps la vitesse respective est la même avant & après le choc.*

PROPOSITION CXXII.

355. Si deux corps élastiques A, B se choquent directement avec la même direction, ou avec des directions contraires, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses est la même avant ou après le choc.

DEMONSTRATION.

Si les corps A, B ont la même direction, la vitesse de A après le choc est $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$; donc son quarré est $\frac{M^2V^2 - 2MmV^2 + m^2V^2 + 4MmVu - 4m^2uV + 4m^2u^2}{M^2 + 2mM + mm}$, & multipliant ce quarré par la masse M, j'ai $\frac{M^3V^2 - 2M^2mV^2 + Mm^2V^2 + 4M^2mVu - 4Mm^2uV + 4Mm^2u^2}{M^2 + 2mM + mm}$; de même la vitesse de B après le choc est $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$, & son quarré est $\frac{4M^2V^2 - 4M^2uV + M^2u^2 + 4MVmu - 2Mmu^2 + m^2u^2}{M^2 + 2mM + mm}$, lequel multiplié par m donne $\frac{4M^2V^2m - 4M^2Vum + M^2u^2m + 4MVm^2u - 2Mm^2u^2 + m^3u^2}{M^2 + 2mM + mm}$, ajoutant donc ensemble ces deux produits de M & de m, mul-

$\frac{mz - Mz + 2MZ}{M + m}$, & mettant au lieu de z & Z leur valeur, j'aurai

$$\frac{2mMV - Mmu + m^2u - 2M^2V + M^2u - Mmu + 2M^2V - 2MmV + 4Mmu}{M^2 + 2Mm + mm}$$

$= \frac{M^2u + 2Mmu + m^2u}{M^2 + 2Mm + mm} = u$, donc la vitesse de B après le second choc est égale à la vitesse qu'il avoit avant le premier choc.

De même la vitesse de A après le second choc sera $\frac{2mz - mZ + MZ}{M + m}$, & mettant la valeur de z & Z , j'aurai

$$\frac{4mMV - 2mMu + 2m^2u - mMV + m^2V - 2m^2u + M^2V - MmV + 2Mmu}{M^2 + 2Mm + mm}$$

$= \frac{M^2V + 2MmV + m^2V}{M^2 + 2Mm + m^2} = u$, donc la vitesse de A après le second choc est la même que sa vitesse avant le premier choc.

Et on prouvera la même chose lorsque les corps A, B auront des directions contraires, &c.

PROPOSITION CXXIV.

357. Si deux corps élastiques A, B viennent à se choquer, leur centre de gravité commun est ou en repos, ou il se meut uniformément toujours vers le même côté, & dans des tems égaux avant & après le choc les deux corps se trouvent à même distance de ce centre.

DEMONSTRATION.

Dans des tems égaux pris avant & après le choc, les corps se trouvent à la même distance entr'eux (N. 353), donc la droite qui joint ces deux corps est la même; or le centre de gravité commun est sur cette droite, de façon que les distances des corps à ce centre sont reciproques aux masses, donc le centre de gravité est également distant de A après le choc qu'avant le choc, & il faut dire la même chose à l'égard de B; or il ne peut se faire que les deux corps avant & après le choc aient la même distance à l'égard de ce centre, à moins que ce centre ne reste en repos, ou qu'après le choc il ne se meuve en gardant toujours les mêmes distances, donc, &c.

Nous allons déterminer dans les Corollaires suivans les cas où le centre de gravité est en repos, & ceux où il se meut, & nous ferons voir en même tems que le mouvement du centre de gravité se fait du même côté avant & après le choc.

Qq ij

COROLLAIRE I.

358. Si les deux corps A, B se meuvent avant le choc avec des directions contraires & des vitesses reciproques aux masses, leur centre de gravité commun est toujours en repos.

Le mouvement des deux corps étant uniforme les espaces parcourus sont comme les vitesses, ainsi les espaces qu'ils parcourront dans une minute en s'approchant seront reciproques à leurs masses, or avant qu'ils fussent en mouvement les espaces qui se trouvoient entr'eux & le centre de gravité étant aussi reciproques à leurs masses, donc supposé qu'ils ne se soient pas joints dans une minute, les espaces qui resteront entr'eux & le centre de gravité seront encore reciproques à leurs masses, & par conséquent ce centre de gravité n'aura pas bougé. Supposons donc qu'ils se meuvent encore pendant une minute, les espaces qu'ils auront parcouru seront encore reciproques à leurs masses, donc si après cette minute ils ne se sont pas encore joints, les espaces qui resteront entr'eux & le centre de gravité seront encore reciproques à leurs masses, & par conséquent ce centre n'aura pas bougé; & continuant le même raisonnement, on trouvera qu'ils se choqueront dans leur centre commun de gravité, lequel aura toujours resté immobile.

Maintenant après le choc les deux corps rebrousseront chemin avec les memes vitesses (N. 339), donc les espaces qu'ils parcourront dans des tems égaux en s'éloignant du point du choc seront encore reciproques aux masses, & par conséquent le point du choc sera encore leur centre de gravité commun.

Comme deux corps élastiques de même masse & de même vitesse ont leurs vitesses reciproques aux masses, il s'ensuit que si ces deux corps ont des directions contraires avant le choc, leur centre de gravité sera en repos avant le choc, & après le choc aussi, parce que ces corps s'éloigneront de part & d'autre du point du choc avec des vitesses égales (N. 327).

COROLLAIRE II.

359. Si deux corps élastiques A, B, se choquent avec des vitesses qui ne soient pas reciproques aux masses, leur centre de gravité commun se mouvra uniformément avec eux, & toujours d'un même côté avant & après le choc.

Supposons en premier lieu que les corps A, B étant inégaux & leurs vitesses égales, ils s'approchent l'un de l'autre selon des directions contraires; il est sur que leur centre de gravité commun sera sur la ligne qu'on tireroit de l'un & l'autre, en sorte que les distances des corps à ces points seront reciproques aux masses; concevant donc que les corps venant à se mouvoir, ils aient parcouru dans une minute chacun l'espace d'un pied à cause des vitesses égales, il est encore évident que le pied parcouru par le corps A, sera plus grand par rapport au pied parcouru par le petit corps B, que le corps B par rapport au corps A; donc ces espaces ne seront pas reciproques aux masses, & par conséquent le reste de distance du corps A au point qui étoit le centre de gravité commun lorsque les corps étoient en repos, sera moindre par rapport au reste de distance du corps B à ce même point que le corps B, par rapport au corps A, ainsi ces restes de distances n'étant plus reciproques aux masses, le point qui étoit le centre de gravité commun ne le sera plus à présent, & il faudra en prendre un autre qui soit plus près du corps B.

Que si nous concevons que les corps A, B s'approchant d'avantage aient encore parcouru dans une autre minute chacun un pied, on trouvera par un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire, que le centre de gravité commun à la fin de cette minute doit s'approcher encore de B, & ainsi de suite jusqu'à ce que les deux corps se soient joints.

Maintenant après le choc la vitesse totale de A sera $\frac{MV - mV - 2mV}{M + m}$ ou $\frac{MV - mV - 2mV}{M + m} = \frac{MV - 3mV}{M + m}$, à cause que nous supposons les vitesses égales; or si $MV = 3mV$ le corps A sera en repos, puisque sa vitesse totale sera nulle, & comme B sera en mouvement, il est visible que le centre de gravité continuera à se mouvoir du même côté qu'il se mouvoit avant le choc; que si MV est plus grand que $3mV$, la vitesse du corps A sera positive, & par conséquent A se mouvra toujours dans la même direction; donc le centre de gravité commun se mouvra encore du même côté qu'auparavant, puisqu'il doit toujours se trouver entre les deux corps, enfin si MV est moindre que $3mV$, la vitesse totale de A étant négative, ce corps rebroussera chemin; or les deux corps reçoivent par le seul choc une vitesse égale que nous nommerons x , & par la force du ressort ils reçoivent des vitesses reciproques à leur masses (N. 336.) que nous nomme-

rons y, z ; ainsi la vitesse de B sera $x+z$, & la vitesse de A sera $y-x$, parce que la force y détruit la force x . Mais par la supposition $y, z :: B, A$, donc $y-x$ est moindre par rapport à $z+x$ que B par rapport à A. Concevant donc qu'après le choc les deux corps se meuvent, l'espace que A aura parcouru pendant une minute sera moindre par rapport à l'espace que B aura parcouru dans la même minute, que B par rapport à A, donc le point où s'est fait le choc ne sera plus le centre de gravité commun, ainsi qu'il l'étoit dans le moment du choc, mais il faudra l'avancer du côté de B, donc ce centre de gravité avance toujours du même côté avant & après le choc.

Supposons en second lieu que les vitesses soient inégales de même que les masses & que les directions soient contraires avant le choc, la vitesse du plus grand corps A n'étant pas à la vitesse du corps B réciproquement comme B est à A, sera par conséquent plus grande ou moindre qu'il ne faut. Supposons-là d'abord plus grande, l'espace parcouru par A dans une minute sera plus grand par rapport à l'espace parcouru par B dans le même tems, que B par rapport à A, donc le reste de distance du corps A au point qui étoit le centre commun de gravité avant le mouvement sera moindre par rapport au reste de distance du corps B à ce même point, que B par rapport à A, ainsi ce point ne sera plus le centre de gravité, mais il faudra l'approcher du côté de B, & par un semblable raisonnement on prouvera que ce centre avance toujours du côté de B jusqu'au moment du choc.

Après le choc le corps A sera ou en repos ou en mouvement selon la même direction, ou en mouvement selon la direction contraire. Or dans ces trois cas on prouvera comme ci-dessus que le centre de gravité avance du même côté qu'il avançoit avant le choc.

Maintenant supposons que la vitesse de A soit moindre par rapport à la vitesse de B, que B par rapport à A ; on prouvera facilement que le centre de gravité s'avancera du côté de A, jusqu'à ce que les deux corps se choquent.

Le mouvement de B avant le choc étant plus grand que le mouvement de A, puisque VA est moindre que VB ; par la supposition, il faut regarder le corps B comme le corps qui choque A, ainsi sa vitesse après le choc est $\frac{mV - mV - 2MV}{m+M}$ (N. 336.), donc si mV est plus grand que $mV + 2MV$, il continue à se mouvoir

du côté de A, si mu est égal à $mV + 2MV$, il reste en repos, & enfin si mu est moindre que $mV + 2MV$, il rebrousse chemin; or dans les deux premiers cas, il est visible que le centre de gravité doit se mouvoir encore du côté de A, de même qu'avant le choc, & dans le dernier cas, nommant x la vitesse commune que le choc donne aux deux corps, & y, z , les vitesses que le ressort leur donne, lesquelles sont réciproques aux corps, la vitesse de A sera $x + y$, & celle de B sera $z - x$; or puisque $z, y :: A, B$; donc $z - x$ est moindre par rapport à $x + y$, que A par rapport à B; donc si après le choc nous concevons que les deux corps se meuvent, les espaces parcourus par B seront moindres par rapport aux espaces parcourus par A dans le même tems que A par rapport à B; donc le point du choc ne sera plus le centre de gravité des deux corps, mais il faudra l'avancer du côté de A; ainsi ce centre avance encore du même côté qu'avant le choc.

On prouvera de même que le centre de gravité avance toujours d'un même côté avant ou après le choc, lorsque les vitesses ne sont pas réciproques aux masses dans les cas où les corps se choquent avec la même direction.

PROPOSITION CXXV.

360. Si deux corps élastiques A, B, se choquent avec des directions contraires, la vitesse que l'un d'eux perd est à la vitesse qu'il perdrait si l'autre corps étoit en repos avant le choc, comme la somme des deux vitesses avant le choc est à la vitesse avant le choc de celui qui choquerait l'autre qui seroit en repos.

DEMONSTRATION.

Si les deux corps sont en mouvement, la vitesse totale de A après le choc est $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$, donc la vitesse perdue par le choc est $V - \frac{MV - mV - 2mu}{M + m} = \frac{MV + mV - MV + mV + 2mu}{M + m} = \frac{2mV + 2mu}{M + m}$, maintenant si le corps B étoit en repos avant le choc, la vitesse totale de A après le choc seroit $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m} = \frac{MV - mV}{M + m}$, à cause de u égal à zero; donc la vitesse perdue par le choc seroit $V - \frac{MV - mV}{M + m} = \frac{VM + Vm - VM + Vm}{M + m} = \frac{2MV}{M + m}$; donc la vitesse perdue par le corps A quand les deux corps sont en mouvement, est à la

vitesse perdue par le même corps quand B est en repos, comme

$$\frac{2mV + 2mu}{M + m} \text{ est à } \frac{2mV}{M + m}, \text{ ou comme } V + u \text{ est à } V.$$

PROPOSITION CXXVI.

361. Si un corps élastique A choque un autre corps B qui se meut dans la même direction & avec moins de vitesse, la vitesse que A perd par le choc est à celle qu'il perdrait si B étoit en repos avant le choc, comme la différence des vitesses avant le choc est à la vitesse de A avant le choc.

DEMONSTRATION.

Quand les deux corps se meuvent, la vitesse de A après le choc est $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$ (N. 336.), donc la vitesse perdue par le

$$\text{choc est } V - \frac{MV - mV + 2mu}{M + m} = \frac{MV + mV - MV + mV - 2mu}{M + m} = \frac{2mV - 2mu}{M + m}.$$

Or si B étoit en repos, la vitesse de A après le choc seroit $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m} = \frac{MV - Mu}{M + m}$, à cause de $u = 0$; donc sa vitesse

$$\text{perdue par le choc seroit } V - \frac{MV - Mu}{M + m} = \frac{MV + mV - MV + mV}{M + m}$$

$$= \frac{2mV}{M + m}; \text{ \& par conséquent la vitesse perdue lorsque les deux}$$

corps sont en mouvement, est à la vitesse perdue lorsque B est en repos comme $\frac{2mV - 2mu}{M + m}$ est à $\frac{2mV}{M + m}$, ou comme $V - u$ est à V .

PROPOSITION CXXVII.

362. Si un corps élastique A choque un corps B qui est en repos; il lui communique une vitesse qui n'est pas tout-à-fait double de la vitesse qu'il avoit avant le choc.

DEMONSTRATION.

Si les deux corps se mouvoient avec la même direction, la vitesse de B après le choc est $\frac{2mV - Mu + mu}{M + m}$, & comme lorsque B est en repos, on a $u = 0$, il s'ensuit qu'en ce cas la vi-

tesse de B après le choc est $\frac{2mV}{M + m}$, & supposant que l'excès de

M sur m soit n, nous aurons $M = m + n$, c'est pourquoi met-

tant cette valeur de M dans la vitesse de B après le choc, nous

aurons $\frac{2mV + 2nV}{2m + n}$; ainsi cette vitesse sera à la vitesse V du corps

A

A avant le choc comme $\frac{2MV+2nV}{2m+n}$ est à V, ou $\frac{2mV+nV}{2mV+nV}$; ou comme $2mV+2nV$ est à $2mV+nV$, ou comme $2m+2n$ est à $2m+n$, ou comme 2 est à $1+\frac{m}{m+n}$, c'est-à-dire que la vitesse de B après le choc n'est pas tout-à-fait double de la vitesse de A avant le choc, car si elle étoit double, le rapport seroit comme 2 à 1, au lieu qu'il est comme 2 à 1 augmenté d'une fraction $\frac{m}{m+n}$; donc, &c.

PROPOSITION CXXVIII.

363. Si un corps élastique A choque un corps B moindre que lui, & qui est en repos, la vitesse du corps B après le choc sera égale à la somme des vitesses de A avant & après le choc.

DEMONSTRATION.

La vitesse du corps B après le choc sera par la Proposition précédente $\frac{2MV}{M+m}$. Or supposant $M=m+n$, cette vitesse sera $\frac{2mV+2nV}{2m+m} = V + \frac{nV}{2m+n}$. Or la vitesse du corps A après le choc est $\frac{MV-mV+2nu}{M+m} = \frac{MV-mV}{M+m}$ à cause de $u=0$; donc mettant au lieu de M sa valeur, nous aurons $\frac{mV+nV-mV}{2m+n} = \frac{nV}{2m+n}$; ainsi la vitesse de B après le choc étant $V + \frac{nV}{2m+n}$ est égale à la somme de la vitesse V du corps A avant le choc, & de la vitesse $\frac{nV}{2m+n}$ du même corps après le choc.

PROPOSITION CXXIX.

364. Si un corps élastique A choque un autre corps B moindre que lui, & qui est en repos avec une vitesse qui soit comme la somme des deux masses, le corps B après le choc aura une vitesse qui sera comme 2A, & le corps A aura perdu une vitesse qui sera comme 2B.

DEMONSTRATION.

La vitesse du corps A après le choc est $\frac{MV-mV}{M+m}$; or par la supposition, V est comme M+m, mettant donc cette valeur de V dans la vitesse du corps A après le choc, nous aurons

R 1

$\frac{M^2 + Mm - mM - m^2}{M + m} = \frac{M^2 - m^2}{M + m} = M - m$; de même la vitesse de B après le choc est $\frac{2MV}{M + m}$, & mettant la valeur de V, j'ai $\frac{2M^2 + 2Mm}{M + m} = 2M$; donc la vitesse du corps B après le choc est comme le double du corps A ; or la vitesse du corps A avant le choc étant $M + m$, & après le choc $M - m$, la différence des deux, c'est-à-dire, la vitesse perdue par le choc est $2m$ ou le double de B, donc, &c.

COROLLAIRE.

365. Si le corps A est moindre que B, la même chose subsiste encore comme il est aisé de le prouver par les mêmes raisonnemens.

PROPOSITION CXXX.

366. Si un corps élastique A choque un autre corps élastique B plus grand que lui & qui est en repos, le corps A rebrousse toujours chemin, & le corps B reçoit une vitesse moindre que la vitesse du corps A avant le choc.

DEMONSTRATION.

La vitesse du corps A après le choc est $\frac{MV - mV}{M + m}$, mais par la supposition m est plus grand que M ; donc la vitesse du corps A après le choc est négative, & ce corps rebrousse chemin.

La vitesse du corps B après le choc est $\frac{2MV}{M + m}$; or la vitesse du corps A avant le choc est $V = \frac{MV + mV}{M + m}$, mais à cause de m plus grand que M , j'ai $MV + mV$ plus grand que $2MV$, donc la vitesse du corps B après le choc, c'est-à-dire $\frac{2MV}{M + m}$ est moindre que la vitesse $\frac{MV + mV}{M + m}$ du corps A avant le choc.

COROLLAIRE.

367. La somme des vitesses des deux corps après le choc est égale à la vitesse du corps A avant le choc ; car la vitesse du corps A après le choc étant négative $\frac{mV - MV}{M + m}$, ainsi ajoutant cette vitesse à la vitesse $\frac{2MV}{M + m}$ du corps B, la somme est $\frac{MV + mV}{M + m} = V$.

PROPOSITION CXXXI.

368. Si un corps élastique A choque un corps élastique B plus grand que lui (Fig. 124.), & qui est en repos, & que celui-ci par la vitesse acquise choque un autre corps élastique C plus grand & qui est en repos, la vitesse de C après le choc sera plus grande que la vitesse qu'il auroit reçue si le corps A l'avoit choqué immédiatement.

DEMONSTRATION.

Je nomme M la masse du premier corps A, rM celle du second B, & sM celle du troisième C, les lettres r, s, sont des nombres au-dessus de l'unité, & s est plus grand que r, ce qui fait que rM est plus grand que M, & sM plus grand que rM, ainsi qu'il est porté par le Problème. Maintenant par le Corollaire IV^e. de la CXIX^e. Proposition (N. 336.) la somme des corps A, B, est au double du corps A comme la vitesse de A avant le choc est à la vitesse de B après le choc, donc $M + rM, 2M :: V, \frac{2MV}{M + rM} =$ vitesse de B après le choc.

Par la même raison, la somme B + C des corps B, C, est au double de B comme la vitesse de B avant de choquer C est à la vitesse de C après le choc de B; donc $rM + sM, 2rM :: \frac{2MV}{M + rM}, \frac{4rM^2V}{rM^2 + r^2M^2 + sM^2 + rM^2} = \frac{4rV}{r + r^2 + s + sr} =$ vitesse de C après le choc de B.

Par la même raison encore la somme des corps A, C, est au double de A comme la vitesse de A avant aucun choc est à la vitesse que C acquerroit si A le choquoit immédiatement, donc $M + sM, 2M :: V, \frac{2MV}{M + sM}, \frac{2V}{1 + s} =$ vitesse que C acquerroit par le choc immédiat de A.

Donc la vitesse que C acquiert par le choc de B est à celle qu'il acquerroit par le choc immédiat de A comme $\frac{4rV}{r + r^2 + s + sr}$ est à $\frac{2V}{1 + s}$, ou comme $\frac{2r}{r + r^2 + s + sr}$ est à $\frac{1}{1 + s}$, ou bien en réduisant tout au même dénominateur, & négligeant ce dénominateur, comme $2r + 2rs$ est à $r + r^2 + s + sr$, ou enfin en retranchant $r + sr$ de part & d'autre, comme $r + rs$ est à $r^2 + s$.

Or par la supposition s est plus grand que r, ainsi supposant $sr = s$, & mettant cette valeur dans le rapport que nous venons

de trouver, ce rapport sera $r + nr^2$, $r^2 + nr$, & divisant tout par r , nous aurons $1 + nr$, $r + n$; mais nr est plus grand que $n + r$, car le produit de deux grandeurs qui surpassent l'unité est plus grand que leur somme, donc à plus forte raison $1 + nr$ est plus grand que nr .

Puis donc que la vitesse de C après le choc de B est à la vitesse que C acquerroit s'il étoit choqué immédiatement par A comme $1 + nr$ est à $r + n$, & que $1 + nr$ est plus grand que $r + n$, il s'ensuit que la vitesse de C après le choc de B est plus grande que la vitesse que C acquerroit s'il étoit choqué immédiatement par A.

M. Huguens a démontré ceci autrement, & a fait voir que la même chose arriveroit si le corps B étoit moindre que A, & C moindre que B, ce qu'on peut démontrer aisément par la méthode que nous venons d'employer.

COROLLAIRE I.

369. Si le corps B plus grand que A se meut dans la même direction mais moins vite, & que le corps C plus grand que B soit en repos & soit choqué par B après que A a choqué B, la vitesse que C reçoit par le choc de B est plus grande que celle qu'il recevrait par le choc immédiat de A.

Je nomme comme auparavant M la masse de A, rM la masse de B, sM la masse de C; de plus je nomme V la vitesse de A, & qV la vitesse de B, la lettre q est un nombre rompu puisque nous supposons la vitesse de B moindre que celle de A.

Maintenant la vitesse de B après le choc sera $\frac{2MV - M_2V + rM_2V}{M + rM}$; or comme la somme des corps B, C est au double de B, ainsi la vitesse avec laquelle B choque C, est à la vitesse que C acquiert par le choc de B, donc $rM + sM$, $2rM :: \frac{2MV - M_2V + rM_2V}{M + rM}$, $\frac{4rM^2V - 2rM^2qV + r^2M^2qV}{rM^2 + r^2M^2 + sM^2 + rM^2} = \frac{4rV - 2rqV + r^2qV}{r + r^2 + s + rr}$ = vitesse de C acquise par le choc de B.

De même comme la somme des corps A, C est au double de A, ainsi la vitesse de A avant aucun choc est à la vitesse que C acquerroit si A le choquoit immédiatement; donc $M + sM$, $2M :: V$, $\frac{2MV}{M + sM} = \frac{2V}{1 + s}$ = vitesse acquise de C par le choc immédiat de A.

Donc la vitesse acquise de C par le choc de B est à la vitesse que C acquerroit par le choc immediat de A, comme $\frac{4rV - 2rqV + 2r^2qV}{r + r^2 + s + sr}$ est à $\frac{2V}{1+s}$, ou comme $\frac{2r - rq + r^2q}{r + r^2 + s + sr}$ est à $\frac{1}{1+s}$, ou bien en reduisant tout au même dénominateur, & négligeant ensuite ce dénominateur, comme $2r - rq + r^2q + 2sr - rsq + r^2sq$, est à $r + r^2 + s + sr$, & retranchant de part & d'autre $r + rs$, le rapport sera $r - rq + r^2q + sr - rsq + r^2sq$, $r^2 + s$.

Or s est plus grand que r par la supposition, donc faisant $nr = s$, & mettant cette valeur de s dans le rapport que nous venons de trouver, ce rapport sera $r - rq + r^2q + nr^2 - nr^2q + nr^3q$, $r^2 + nr$, & divisant par r nous aurons $1 - q + rq + nr - nrq + nr^2q$, $r + n$; or le premier terme de ce rapport est plus grand que le second, car le seul nr est plus grand que $n + r$, & il est visible que les grandeurs négatives qui se trouvent dans ce terme sont moindres que les autres grandeurs positives, puis donc que la vitesse de C acquise par le choc de B est à la vitesse que C acquerroit par le choc immediat de A, comme $1 - q + rq + nr - nrq + nr^2q$, est à $r + n$, il s'ensuit que la vitesse acquise par le choc de B est plus grande que ne seroit la vitesse acquise par le choc immediat de A.

COROLLAIRE II.

370. Les deux corps élastiques A, C étant donnés, & C étant en repos, si l'on veut trouver un autre corps élastique, lequel étant mis entre A & C & venant à être choqué par A, puis choquant à son tour C, produise dans C la plus grande vitesse qu'un corps interposé entre A & C, puisse lui communiquer, on resoudra la question en cette sorte.

Je nomme X le corps qu'on demande, & V la vitesse du corps A avant le choc, le corps X étant en repos avant le choc, sa vitesse après le choc sera $\frac{2AV}{A+X}$; or la somme des corps X, C est au double de X, comme la vitesse de X est à la vitesse de C acquise par le choc de X, donc $X + C$, $2X :: \frac{2AV}{A+X}$, $\frac{4AVX}{AX + XX + AC + CX} =$ vitesse de C acquise par le choc de X.

Maintenant par la supposition cette vitesse est un *plus grand*; donc selon la regle des *plus grandes & des moindres quantités*, je prens la différence de cette vitesse qui est

$$\frac{4A^2VX^2X + 4AVX^2dX + 4A^2VCdX + 4ACVX^2X - 4A^2VX^2X - 8AVX^2dX}{AX + XX + AC + CX^2}$$

$\frac{-4AVCX^2X}{AX + XX + AC + CX^2}$, je fais cette quantité égale à zero, & multipliant tout par le dénominateur, le numérateur est encore égal à zero; corrigeant donc son expression, j'ai $4A^2VCdX - 4AVX^2dX = 0$; & divisant par dX , puis donnant de part & d'autre $4AVX^2$, & enfin divisant par $4AV$, j'ai $AC = XX$ d'où je tire $A, X :: X, C$, c'est-à-dire, que pour produire l'effet requis, il faut prendre un corps X moyen proportionnel entre les deux corps donnés A, C .

PROPOSITION CXXXII.

371. Deux corps A, B (Fig. 125.) élastiques ou non élastiques qui se choquent obliquement en C étant donnés, déterminer leur mouvement après le choc.

SOLUTION.

Je décris des parallelogrammes AC, BC autour des directions AC, BC des deux corps, & supposant que AC marque la force du corps A , cette force équivaldra à deux forces exprimées par les côtés AD, AE du parallelogramme AC ; de même si BC marque la force du corps B , cette force équivaldra à deux forces exprimées par les côtés BF, BG du parallelogramme BC ; or les forces AD, BG étant paralleles ne contribuent rien au choc, donc il n'y a que les deux forces AE, BF ou DC, CG qui y contribuent; ainsi ce choc oblique est le même qui se feroit selon les directions directes DC, CG , & avec des forces exprimées par ces directions; par conséquent on déterminera le mouvement des deux corps après le choc en suivant les regles enseignées dans ce Chapitre.

Supposons par exemple que les deux corps soient élastiques; & qu'ils rebroussent chemin, le premier avec une force égale à CI , & l'autre avec une force égale à CH ; comme les forces AD, BG subsistent & agissent toujours, je fais $IL = AD$, & $HP = BG$, & achevant les parallelogrammes IM, HN , le corps A prendra la direction CL , & le corps B la direction CP , & ainsi des autres.

CHAPITRE XII.

De la Force Centrifuge & de la Force Centripete.

DEFINITIONS.

372. **O**N appelle *Force Centrifuge* d'un corps , la force qui fait que ce corps étant mû autour d'un centre de mouvement , tend à s'éloigner de ce centre.

Si on conçoit un polygone d'une infinité de côtés inscrit dans une courbe ABCDE (Fig. 126) , les petits côtés AB , BC , CD , &c. de ce polygone , ne différeront point des arcs qu'ils soutiennent , & par conséquent la courbe entière ne différera pas du polygone ; donc un corps qui se meut le long de la courbe parcourt les petits côtés AB , BC , CD , &c. & change à tout moment de direction ; or comme un corps qui est mû d'abord dans une direction , tend à se conserver dans la même direction , il s'ensuit que le corps A mû autour de la courbe tend à s'échapper à chaque instant le long de la tangente ; supposant donc qu'au lieu de parcourir le côté infiniment petit BC , il se meuve le long de la tangente , & menant du point C la droite IC perpendiculaire à la tangente , cette droite IC exprimera la force centrifuge ou la quantité dont le corps s'est éloigné de la courbe.

373. On appelle *Force Centripete* la force qui fait qu'un corps qui devrait marcher dans la même direction AH , est à tout moment rappelé vers un centre O ; si donc au lieu de parcourir la petite droite BI il parcourt l'arc infiniment petit BC , la perpendiculaire CI exprimera la force centripete ; d'où il suit que la force centripete est égale à la force centrifuge.

374. La *force centripete* & la *force centrifuge* s'appellent d'un nom commun , *forces centrales*.

PROPOSITION CXXXIII.

375. Si deux corps égaux A , B (Fig. 127.) parcourent dans des tems égaux avec des vitesses uniformes des circonferences inégales de cercles , leurs forces centrales sont entr'elles comme leurs diametres.

DEMONSTRATION.

Je suppose que AC soit un arc infiniment petit de la circonfé,

rence ACD, & que les circonférences ACD, BEH soient concentriques; je mene du point C le rayon OC, & les secteurs AOC, BOE sont semblables, à cause de l'angle AOC commun, donc l'arc AC est à l'arc BE, comme le rayon AO est au rayon BO, & par conséquent comme la circonférence ACD est à la circonférence BEH; puis donc que les tems que les corps A, B employent à parcourir leurs circonférences sont égaux, & que les mouvemens sont uniformes, il est sûr que les tems que les corps A, B emploieront à parcourir les arcs AC, BE feront entr'eux comme les tems employés à parcourir leurs circonférences, c'est-à-dire que ces tems seront égaux; car si AC étoit par exemple la dixième partie de la circonférence ACD; BC feroit aussi la dixième partie de la circonférence; ainsi A n'emploieroit à parcourir AC que la dixième partie du tems qu'il employoit à parcourir ACD, & par la même raison B n'emploieroit à parcourir BE que la dixième partie du tems qu'il employe à parcourir BEH; or les tems employés à parcourir les circonférences ACD, BEH sont égaux, donc les dixièmes de ces tems sont aussi égaux, &c.

Des points A, B, je mene les tangentes AG, BF, & des points C, E les droites CG, EF perpendiculaires sur ces tangentes, ainsi ces droites CG, EF expriment les forces centrifuges des corps A, B (N. 372); or à cause de la similitude des cercles & des arcs proportionnels AC, BE, les droites CG, EF semblablement posées sont entr'elles comme les arcs AC, BE, ou comme les rayons AO, BO, lesquels sont entr'eux comme les diametres, donc les forces centrifuges CG, EF sont entr'elles comme les diametres.

Mais les forces centripetes sont égales aux forces centrifuges (N. 373), donc les forces centrales sont entr'elles comme les diametres.

COROLLAIRE I.

376. Donc si les forces centrales de deux corps égaux qui se meuvent le long de deux circonférences de cercles inégaux, sont entr'elles comme les diametres, les tems employés à parcourir les deux circonférences sont égaux.

COROLLAIRE II.

377. *Les forces centrales des corps A, B sont comme les quarrés des*

GENERALE, LIVRE I.

21.

des arcs infiniment petits AC, BE divisés par les diametres AQ, BP.

Des points C, E je mene les droites CN, EM perpendiculaires aux diametres AQ, BP, & j'ai AN = CG, & BM = EF, or l'arc AC étant infiniment petit, n'est pas différent de sa corde & par la propriété du cercle j'ai AQ, AC :: AC, AN, donc $\frac{\overline{AC}^2}{AQ} = AN = CG$; par la même raison j'ai PB, BE :: BE, BM,

donc $\frac{\overline{BE}^2}{PB} = BM = EF$, & par conséquent CG, EF :: $\frac{\overline{AC}^2}{AQ}$, $\frac{\overline{BE}^2}{PB}$.

COROLLAIRE III.

378. Les forces centrales sont donc des différences du second genre. Car puisque AC est infiniment petit par rapport à AQ, & que nous avons AQ, AC :: AC, AN, il s'en suit que AN est aussi infiniment petit par rapport à AC, donc AC étant une différence du premier genre, AN ou CG est une différence du second genre.

COROLLAIRE IV.

379. Quand les deux corps A, B parcourent les circonférences ACD, BEH en des tems égaux, les forces centrales sont en raison composée de la raison directe des quarrés des vitesses, & de la raison inverse des diametres ou des rayons.

Par le Corollaire second nous avons CG, EF :: $\frac{\overline{AC}^2}{AQ}$, $\frac{\overline{BE}^2}{PB}$, donc CG, EF :: $\overline{AC}^2 \times PB$, $\overline{BE}^2 \times AQ$, c'est-à-dire les forces CG, EF, sont en raison composée de la raison \overline{AC}^2 , \overline{BE}^2 , & de la raison PB, AQ; mais les arcs AC, PB, étant parcourus en même tems, expriment les vitesses des corps A, B, donc la raison \overline{AC}^2 , \overline{BE}^2 , est la raison directe des quarrés des vitesses; or la raison PB, AQ est la raison inverse des diametres, donc, &c.

COROLLAIRE V.

380. Si les arcs AC, BE sont égaux, & qu'ils soient parcourus en même tems, les circonférences entieres seront par conséquent parcourues en des tems inégaux, & en ce cas les vitesses centrales seront entre elles reciproquement comme les diametres.

S s

Par le Corollaire précédent nous avons $CG, EF :: \overline{AC}^2 \times PB, \overline{BE}^2 \times AQ$, mais la raison $\overline{AC}^2, \overline{BE}^2$ est une raison d'égalité, c'est-à-dire $\overline{AC}^2 = \overline{BE}^2$ par la supposition, donc $CG, EF :: PB, AQ$.

COROLLAIRE VI.

381. Si les diamètres AQ, PB sont égaux, & les arcs AC, BE décrits en même tems par les corps A, B sont inégaux, les forces centrifuges seront comme les quarrés des vitesses.

$CG, EF :: \overline{AC}^2 \times PB, \overline{BE}^2 \times AQ$, mais par la supposition $PB = AQ$, donc, $CG, EF :: \overline{AC}^2, \overline{BE}^2$.

COROLLAIRE VII.

382 Si les diamètres étant inégaux les forces centrales sont égales; les diamètres seront entr'eux comme les quarrés des vitesses.

$CG, EF :: \overline{AC}^2 \times PB, \overline{BE}^2 \times AQ$, mais par la supposition $CG = EF$, donc $\overline{AC}^2 \times PB = \overline{BE}^2 \times AQ$, & par conséquent $AQ, PC :: \overline{AC}^2, \overline{BE}^2$.

PROPOSITION CXXXIV.

383. Si les forces centrales de deux corps A, B (Fig. 127.) qui parcourent des circonférences inégales, sont égales, les tems employés à parcourir les circonférences sont entr'eux comme les racines quarrées des diamètres.

DEMONSTRATION.

Nommons le diamètre D, d , les circonférences P, p , les tems employés à les parcourir T, t , & les vitesses uniformes des deux corps V, u , par le Corollaire 7 de la Proposition précédente nous avons $D, d :: V^2, u^2$, donc $\sqrt{D}, \sqrt{d} :: V, u$; or à cause de la similitude des cercles nous avons $D, d :: P, p$; divisant donc les termes de cette proportion par les termes de la précédente $\frac{D}{\sqrt{D}}, \frac{d}{\sqrt{d}} :: \frac{P}{V}, \frac{p}{u}$, ou $\sqrt{D}, \sqrt{d} :: \frac{P}{V}, \frac{p}{u}$; mais dans le mouvement uniforme les tems sont en raison composée de la raison directe des espaces, & de la raison reciproque des vitesses (N. 24); donc $T, t :: Pu, pV$, & divisant la dernière raison par

V, & ensuite par u , j'ai $T, t :: \frac{P}{V}, \frac{p}{u}$, donc $T, t :: \sqrt{D}, \sqrt{d}$.

COROLLAIRE I.

384. Puisque $T, t :: \sqrt{D}, \sqrt{d}$, donc $T^2, t^2 :: D, d$, c'est-à-dire les forces centrales étant égales, les diametres sont comme les quarrés des tems employés à parcourir les circonferences.

COROLLAIRE II.

385. Puisque $V^2, u^2 :: D, d$, & $T^2, t^2 :: D, d$, donc $V^2, u^2 :: T^2, t^2$, & $V, u :: T, t$, c'est-à-dire les forces centrales étant égales, les vitesses des corps sont comme les tems employés à parcourir les circonferences.

COROLLAIRE III.

386. Si les forces centrales sont inégales, elles sont entr'elles en raison composée de la raison directe des diametres, & de la reciproque des quarrés des tems employés à parcourir les circonferences.

Je nomme F, f les forces centrales, la force centrale de A est $\frac{AC^2}{AQ}$, & celle de B est $\frac{BE^2}{BP}$ (N. 377), donc $F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$; mais dans le mouvement uniforme les vitesses sont comme les espaces divisés par les tems (N. 21), donc $V, u :: \frac{P}{T}, \frac{p}{t}$, & mettant au lieu de P, p la raison D, d , qui est la même, j'ai $V, u :: \frac{D}{T}, \frac{d}{t}$, donc $V^2, u^2 :: \frac{D^2}{T^2}, \frac{d^2}{t^2}$ & $\frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d} :: \frac{D^2}{DT^2}, \frac{d^2}{dt^2} :: \frac{D}{T^2}, \frac{d}{t^2}$, puis donc que $F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$, donc $F, f :: \frac{D}{T^2}, \frac{d}{t^2} :: D T^2, d T^2$.

COROLLAIRE IV.

387. Si les forces centrales sont inégales, & que les tems employés à parcourir les circonferences soient entr'eux comme les diametres, les forces centrales sont entr'elles reciproquement comme les diametres.

Puisque $T, t :: D, d$, & par conséquent $T^2, t^2 :: D^2, d^2$, & que par le Corollaire précédent $F, f :: \frac{D}{T^2}, \frac{d}{t^2}$, donc $F, f :: \frac{D}{D^2}, \frac{d}{d^2} :: \frac{1}{D}, \frac{1}{d} :: d^2 D, D^2 d :: d, D$.

388. Dans le cas du Corollaire précédent les vitesses sont égales; car puisque $F, f :: d, D$, & que par le Corollaire 3^e on a $F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$, donc $\frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d} :: d, D$, & par conséquent $V^2, u^2 :: dD, dD :: 1, 1$.

REMARQUE.

389. La force centrale du corps A est $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AQ}}$; or ce corps étant mû avec une vitesse uniforme, parcourt des arcs égaux dans des tems égaux; donc la force centrifuge est toujours $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AQ}}$, c'est-à-dire constante, ce qui n'arrive pas dans les autres courbes.

PROPOSITION. CXXXV.

390. Si les deux corps A, B (Fig. 127.) parcourent d'un mouvement uniforme deux circonférences, & que leurs vitesses soient entr'elles reciproquement comme les racines quarrées des diametres ou des rayons, leurs forces centrifuges seront reciproquement comme les quarrés des rayons ou des distances aux centres.

DEMONSTRATION.

$F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$ (N. 386), & par la supposition $V, u :: \sqrt{d}, \sqrt{D}$; donc $V^2, u^2 :: d, D$, & par conséquent $F, f :: \frac{d}{D}, \frac{D}{d} :: dd, DD :: \frac{1}{4}dd, \frac{1}{4}DD$.

COROLLAIRE I.

391. Si les vitesses sont reciproquement comme les diametres, les forces centrales seront reciproquement comme les cubes des rayons.

$F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$ (N. 386); mais par la supposition $V, u :: d, D$, donc $V^2, u^2 :: d^2, D^2$, & par conséquent $F, f :: \frac{d^2}{D}, \frac{D^2}{d} :: d^3, D^3$.

COROLLAIRE II.

392. Si les vitesses sont reciproquement comme les quarrés des dia-

metres, les forces centrifuges seront reciproquement comme les cinquièmes puissances des rayons.

$F, f :: \frac{V^2}{D}, \frac{u^2}{d}$ (N. 386); mais par la supposition $V, u :: d^2, D^2$, donc $V^2, u^2 :: d^4, D^4$, & par conséquent $F, f :: \frac{d^4}{D}, \frac{D^4}{d} :: d^5, D^5$.

Et il est facile de trouver les rapports des forces centrales si les vitesses étoient reciproquement comme quelques puissances plus élevées des diametres.

PROPOSITION CXXXVI.

393. Si les vitesses des deux corps A, B sont reciproquement comme les racines quarrées des diametres, les quarrés des tems employés à parcourir les circonferences, sont comme les cubes des rayons.

DEMONSTRATION

Le mouvement étant uniforme, les tems sont en raison composée de la raison directe des espaces & de la reciproque des vitesses (N. 24), donc $T, t :: Pu, pV :: \frac{P}{V}, \frac{p}{u}$, & mettant au lieu de P, p la raison D, d qui lui est égale, j'ai $T, t :: \frac{D}{V}, \frac{d}{u}$, mais par la supposition $V, u :: \sqrt{d}, \sqrt{D}$, donc $T, t :: \frac{D}{\sqrt{d}}, \frac{d}{\sqrt{D}}$, & par conséquent $T^2, t^2 :: \frac{D^3}{d}, \frac{d^3}{D} :: D^3, d^3$.

COROLLAIRE.

394 Si les vitesses sont reciproquement comme les diametres, les tems sont comme les quarrés des rayons.

$T, t :: \frac{D}{V}, \frac{d}{u}$ (N. 393); mais par la supposition $V, u :: d, D$, donc $T, t :: \frac{D}{d}, \frac{d}{D} :: D^2, d^2$.

PROPOSITION CXXXVII.

395. Si un corps A (Fig. 128.) parcourt d'un mouvement uniforme une circonferéce de cercle, avec une vitesse égale à celle qu'il auroit acquise en descendant librement le long de la droite HA perpendiculaire à l'horizon, la force centrale de ce corps est à sa pesanteur comme le double de HA est au rayon OA.

DEMONSTRATION.

Le mouvement le long de HA étant uniformément accéléré, le corps A auroit parcouru dans le même-tems un espace double de HA s'il s'étoit mû d'un mouvement uniforme avec une vitesse égale acquise à la fin de HA (N. 63.), & comme le mouvement le long de AC est aussi uniforme, & avec la même vitesse que le mouvement le long de 2HA, il s'ensuit que le tems employé à parcourir uniformément AC est au tems employé à parcourir uniformément 2HA comme AC, 2HA.

Maintenant pour connoître l'espace que la pesanteur de A lui feroit parcourir dans le même-tems qu'il parcourt AC, en supposant que le corps commençât à descendre au point A, il faut observer que le mouvement pendant l'espace demandé étant accéléré de même que le mouvement pendant l'espace AH, ces espaces sont comme les quarrés des tems, c'est-à-dire comme les quarrés de AC & de 2HA, car les tems sont comme AC, 2HA ainsi qu'on vient de voir; donc on dira $4\overline{HA}^2, \overline{AC}^2 :: HA,$
 $\frac{\overline{AC}^2 \times HA}{4\overline{HA}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{4HA}$; ainsi $\frac{\overline{AC}^2}{4HA}$ fera l'espace que la pesanteur feroit parcourir au corps A dans le tems qu'il parcourt AC; or l'espace que la force centrale lui fait parcourir dans le même-tems est $CG = \frac{\overline{AC}^2}{AQ}$ (N. 377.); & par conséquent la vitesse causée par la pesanteur est à la vitesse causée par la force centrifuge comme $\frac{\overline{AC}^2}{4HA}$ est à $\frac{\overline{AC}^2}{AQ}$, mais la masse étant égale de part & d'autre, les forces sont comme les vitesses, donc la pesanteur est à la force centrale comme $\frac{\overline{AC}^2}{4HA}$ est à $\frac{\overline{AC}^2}{QA}$, ou comme $\overline{AC}^2 \times QA$ est à $\overline{AC}^2 \times 4HA$, ou comme QA est à 4HA, ou enfin comme $\frac{1}{4}QA, 2HA$, & par conséquent la force centrale est à la pesanteur comme 2HA ou le double de HA est à $\frac{1}{4}QA$, ou à OA, c'est-à-dire au rayon.

COROLLAIRE I.

396. Si on nomme G la pesanteur, on aura $OA, 2HA :: G;$
 $\frac{2HA \times G}{OA}$, & ce fera la valeur de la force centrale.

COROLLAIRE II.

397. Si AH est égal à la moitié du rayon OA, la force centrale est égale à la pesanteur ; car on aura OA, 2HA, ou OA :: G, $\frac{OA \times G}{OA} = G$.

COROLLAIRE III.

398. Si la force centrale est égale à la pesanteur, le tems employé à parcourir la circonférence entière est au tems de la descente du corps A le long de la moitié du rayon, comme la circonférence est au rayon.

Le mouvement le long de la moitié du rayon étant un mouvement accéléré, le corps A parcourroit dans un même-tems avec un mouvement uniforme & une vitesse égale à la vitesse acquise à la fin de $\frac{1}{2}$ AO un espace égal à AO.

Ainsi le mouvement le long de AO étant uniforme de même que le mouvement le long de la circonférence, & les vitesses étant égales par la supposition, puisque ces vitesses sont comme les forces à cause des masses égales, il s'ensuit que les tems employés à parcourir la circonférence avec une vitesse uniforme, & le demi-rayon avec une vitesse accélérée, sont comme la circonférence est au rayon.

PROPOSITION CXXXVIII.

399. Si tandis qu'un corps A (Fig. 129.) se meut le long d'une courbe ABCD concave du côté de C, les droites tirées d'un point O qui est dans le plan de la courbe aux extrémités des petits arcs AB, BC, CD, décrivent dans des tems infiniment petits & égaux entr'eux forment des aires ABO, BCO, CDO égales entr'elles, le corps A est poussé vers O par une force centripète.

DEMONSTRATION.

Si le corps A ayant décrit le petit arc AB qu'on peut prendre pour une ligne droite à cause de son infinie petitesse étoit abandonné à lui-même, il suivroit la même direction, & décriroit dans le second moment égal au premier une droite BE égale à l'arc AB; tirant donc du point E au point O la droite EO, les triangles ABO, BEO ayant les bases égales & le sommet O commun, feroient égaux; or par la supposition, le triangle BCO.

est égal au triangle ABO ; donc le triangle BCO est aussi égal au triangle BEO, mais ces deux triangles BCO, BEO ayant la base BO commune & étant égaux entr'eux, ils doivent avoir les hauteurs égales, ou ce qui revient au même, ils doivent se trouver entre mêmes parallèles ; donc joignant les sommets par la droite EC, cette droite doit être parallèle à la base BO ; ainsi menant CH parallèle à BE, on voit que la force qui a poussé A de B en C, est équivalente à deux forces BE, BH, dont l'une pousse selon la direction BE, & l'autre la direction BH.

De même, si le corps étant en C étoit abandonné à lui-même, il suivroit sa direction, & parcourroit la droite CF égale à CB dans un instant égal à celui pendant lequel il a parcouru CB ; donc tirant FO le triangle, FOC seroit égal au triangle CBO, mais par la supposition le triangle CDO est égal au triangle COB ; donc les triangles CFO, CDO sont égaux, & comme ils ont la base CO commune, il faut nécessairement que la droite FD qui joint leur sommets soit parallèle à la base CO ; donc menant du point D la droite DR parallèle à FC, on voit que la force qui pousse A de C en D est équivalente à deux forces CF, CR, dont l'une pousse selon la direction CF, & l'autre selon la direction CR, & ainsi de suite.

Or puisque pendant le mouvement le long de la courbe, le corps A est toujours empêché de suivre sa direction par des forces dont les directions BH, CR, &c. tendent au centre O, il s'en suit que le corps est toujours poussé par une force centripète vers le centre O.

COROLLAIRE I.

400. Si du sommet A de la courbe on mène la tangente AT & du point B la droite BT perpendiculaire sur cette tangente, la droite BT ou AV sera la force centripète correspondante à l'arc BA ; & les droites BH, CR, &c. seront les forces centripètes correspondantes aux autres arcs BC, CD, &c.

COROLLAIRE II.

401. Les droites BE, CF, &c. le long desquelles le corps s'échapperoit à chaque instant s'il étoit livré à lui-même, sont tangentes de la courbe, puisqu'elles sont les prolongemens de ses petits arcs ; donc elles sont perpendiculaires aux rayons BO, CO, &c.

fi

si la courbe est un cercle dont le centre soit le point O, & par conséquent les triangles ABO, BCO, &c. sont rectangles, ce qui n'arrive que dans le cercle.

COROLLAIRE III.

402. Les aires ou triangles ABO, BCO, étant rectangles dans le cercle, il s'ensuit à cause de leur égalité que leurs hauteurs BA, CB, &c. sont entr'elles reciproquement comme les bases BO, CO, mais les bases sont égales puisqu'elles sont rayons d'un même cercle, donc les hauteurs, c'est-à-dire les petits arcs décrits dans des tems égaux sont égaux, ce qui n'arrive encore que dans le cercle.

COROLLAIRE IV.

403. Les diagonales BA, BC, CD, &c. étant égales entr'elles dans le cercle, les côtés AT, BE, CF des parallelogrammes TV, EN, FQ, &c. sont aussi égaux entr'eux & aux diagonales; car par la construction $EB = BA$, or BA, BC, donc $EB = BC$, & ainsi des autres, mais les angles de ces parallelogrammes sont déterminés, puisqu'ils sont tous des angles droits, donc ces parallelogrammes sont tous semblables & égaux entr'eux, & par conséquent les côtés AV, BH, CR, &c. sont égaux, c'est-à-dire la force centripete est constante, ainsi que nous l'avons déjà remarqué plus haut, & ceci n'arrive encore que dans le cercle.

Au reste, il ne faut pas objecter que les parallelogrammes ayant un côté égal à la diagonale ne scauroient être rectangles; car quoique cela soit vrai à l'égard des rectangles dont tous les côtés sont des grandeurs assignables, il n'en est pas de même à l'égard des parallelogrammes qui ont un côté infiniment petit par rapport à l'autre; car supposé, comme nous l'avons démontré (N. 378.) que le côté AV qui marque la force centrale du cercle soit infiniment petit par rapport à AB, l'angle ABV sera infiniment petit, or l'angle BVA est droit, donc l'angle BAV plus l'angle ABV valent un angle droit, & comme ABV est infiniment petit, il s'ensuit que BAV ne différant de l'angle droit que d'un infiniment petit, peut être regardé comme droit.

COROLLAIRE V.

404. Dans les autres courbes, les arcs AB, BC, étant infiniment petits, on peut regarder AB comme un arc de cercle dé-

crit par le rayon OA, l'arc BC comme un arc de cercle décrit par le rayon BO, & ainsi des autres; donc la force centrale par rapport à AB sera la même que la force centrale par rapport à un cercle dont le rayon seroit OA, de même la force centrale BH par rapport à l'arc BC sera la même que la force centrale par rapport à un cercle dont le rayon seroit BO, & ainsi des autres. Mais les forces centrales des cercles sont infiniment petites par rapport aux arcs infiniment petits de ces cercles (N. 378.), donc les forces centrales par rapport aux arcs AB, BC, CD, &c. des courbes différentes du cercle, sont infiniment petites par rapport à ces arcs.

COROLLAIRE VI.

405. Le Corollaire précédent fournit la réponse à une difficulté qu'on pourroit faire touchant la Proposition que nous venons d'établir. J'ai dit dans la Demonstration de cette Proposition que si le corps A après avoir parcouru l'arc AB étoit livré à lui-même, il parcourroit la droite BE dans un tems égal à celui qu'il a employé à parcourir AB; or là-dessus on peut m'objecter que la force de la direction AB étant équivalente aux deux forces AT, AV dont la première donne une vitesse uniforme, & la seconde une vitesse qui peut être accélérée ou retardée selon que les forces centrales de la courbe vont en augmentant ou en diminuant, il arrivera que le corps A étant en B, aura une vitesse qui lui fera parcourir dans le second instant un espace BE plus grand ou moindre que l'espace AB parcouru dans le premier; mais à cela je répons 1°. que la force AV étant infiniment petite par rapport à la force AT qui donne une vitesse uniforme l'augmentation ou la diminution de vitesse que la force AV donne lorsque le corps A est en B est un infiniment petit par rapport à la vitesse uniforme que donne la force AT. 2°. Que l'espace AB étant infiniment petit, la vitesse accélérée ou retardée que donne la force AV, devroit être regardée comme uniforme pendant le mouvement le long de AB quand même cette vitesse ne seroit pas infiniment petite par rapport à la force AT, & par conséquent de l'un & l'autre de ces deux chefs, il s'ensuit que l'espace BE parcouru dans le second instant doit être égal à l'espace AB parcouru dans le premier, puisque la différence qui peut s'y trouver ne peut être qu'une différence du second genre, laquelle n'empêche pas plus l'égalité entre deux grandeurs qui sont de

différences du premier genre, qu'une différence du premier genre ne l'empêche entre deux grandeurs qui sont finies & assignables.

COROLLAIRE VII.

406. Si un corps A est mis uniformément selon une droite AB, & qu'en même-tems il soit attiré vers un centre O par une force centripète, je dis qu'il décrira une courbe ABCD concave du côté de C, & que si des extrémités des espaces parcourus à la fin des tems égaux, on mène des rayons BO, CO, DO, &c. au centre O, les aires ABO, BCO, CDO, &c. seront égales.

Ce Corollaire est l'inverse de la Proposition que nous venons d'établir, car il est visible que si le corps A a parcouru dans un instant la petite droite AB, il parcourroit dans le second instant la petite droite BE s'il étoit livré à lui-même; mais comme la force centripète est BH, il se mouvra selon la direction BC, & par conséquent les deux AB, BC, feront un angle du côté de C, & comme cela arrivera partout, la courbe décrite sera concave du côté de C.

En second lieu, le triangle BEO sera égal au triangle ABO; mais à cause du parallélogramme EH des forces BE, BH, équivalentes à la force BC, la droite EC sera parallèle à la droite BH; donc les triangles BCO, BEO seront égaux; mais le triangle BEO est égal au triangle BAO, donc BCO est aussi égal au triangle BAO, & on prouvera la même chose à l'égard des aires suivantes; donc, &c.

COROLLAIRE VIII.

407. Lorsque la courbe n'est pas un cercle, les vitesses dont les arcs AB, BC sont décrits, sont réciproquement comme les perpendiculaires menées du centre O sur ces arcs prolongés s'il le faut.

Les triangles ABO, BCO sont égaux, donc leurs bases AB, BC, sont entr'elles réciproquement comme leurs hauteurs, ou comme les perpendiculaires tirées du sommet commun O sur leurs bases, mais les bases AB, BC, étant parcourues dans des tems égaux, expriment les vitesses; donc les vitesses sont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées sur les bases.

COROLLAIRE IX.

408. Si la force centripète est la même partout, nous avons

T i ij

déjà dit que la courbe est un cercle ; donc si la force centripète va en diminuant, la courbe est moins courbe que le cercle, & si elle va en augmentant, elle est plus courbe que le cercle.

R E M A R Q U E.

409. Quoique nous ayons pris pour la force centrale, la droite CG (Fig. 127.) perpendiculaire à la tangente AG, on peut prendre aussi pour la même force la droite CV qui est le prolongement du rayon ; car les droites CG, CV étant des infiniment petits du second genre, leur différence est un infiniment petit du troisième genre auquel il ne faut pas avoir égard, ainsi ces deux lignes CG, CV peuvent passer pour égales & être prises l'une pour l'autre.

D E F I N I T I O N.

410. On appelle *centre des forces* le point O (Fig. 130.) auquel la force centripète ramène continuellement un corps qui se meut le long d'une courbe AMB, & cette courbe se nomme *orbite*, ou *courbe du trajet*.

La droite MO tirée d'un point quelconque de la courbe au centre O se nomme *rayon vecteur*, & si après avoir mené deux rayons vecteurs infiniment proches Mo, mO, on élève aux points M, m, des perpendiculaires à la courbe MC, mC, qui se rencontrent en C, chacune des droites MC, mC, s'appellera *rayon de la développée*, parce que selon ce que nous avons enseigné dans le *Calcul Differential & Integral* toute courbe AMB peut être regardée comme étant la ligne de développement d'une autre courbe, en sorte que les perpendiculaires MC à la ligne de développement sont tangentes de la développée.

L E M M E.

411. Si deux grandeurs a, b , sont réciproques à deux autres grandeurs m, n , c'est-à-dire, si $a, b :: n, m$, ces deux grandeurs seront entr'elles comme deux fractions dont les numérateurs seront l'unité, & dont les dénominateurs seront les grandeurs m, n , prises directement.

D E M O N S T R A T I O N.

Par la supposition $a, b :: n, m$, donc divisant la seconde raison

par n , j'ai $a, b :: 1, \frac{m}{n}$, & divisant encore la seconde raison par m , j'ai $a, b :: \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$; donc, &c.

PROPOSITION CXXXIX.

412. Dans toute courbe (Fig. 130.) les forces centrales correspondantes à leurs arcs infiniment petits, sont entr'elles en raison composée de la raison directe des rayons vecteurs, de la raison reciproque des rayons de la développée, & de la reciproque des cubes des perpendiculaires tirées sur les tangentes du centre O .

DEMONSTRATION.

L'arc Mm de la courbe étant infiniment petit peut être pris pour un arc de cercle décrit par le rayon CM ; donc la force centrale considérée comme agissant vers le centre C est comme mR (N. 409.), & cette force centrale considérée comme agissant vers le centre O des forces est mN .

Le rayon de la développée MC étant perpendiculaire à la courbe, l'angle CMR est droit; or à cause de l'arc infiniment petit Mm l'angle MCR est infiniment petit, donc l'angle MRC qui ne diffère de l'angle droit CMR que de l'angle MCR , n'en diffère que d'un infiniment petit, & par conséquent les deux angles CMR, MRC peuvent passer pour égaux, & l'angle MRC peut être pris pour un angle droit; donc si du point O je mene OP perpendiculaire à la tangente PN , les triangles POM, RmN pourront être regardés comme semblables; car l'angle PMO ne diffère aussi de l'angle RNm que d'un infiniment petit, puisque l'angle PMO est égal à l'angle RNm plus l'angle MON qui est infiniment petit; donc j'ai $mR, mN :: PO, OM$, c'est-à-dire, la force centripète vers le centre du rayon de la développée est à la force centripète vers le centre des forces comme PO est à MO . Si j'appelle donc V la vitesse dont le corps parcourt l'arc infiniment petit Mm , la force centripète vers C sera comme $\frac{Mm^2}{MC}$ (N. 379.), & comme Mm exprime la vitesse, cette force sera $\frac{V^2}{MC}$; or les arcs parcourus Mm en tems égaux, sont réciproquement comme les perpendiculaires menées du centre des forces sur ces arcs (N. 407.), donc l'arc Mm sera comme $\frac{1}{PO}$ (N. 411.); mais les arcs sont comme les vitesses, donc V

$= \frac{V^2}{r}$, & mettez cette valeur de V dans la force centripète $\frac{V^2}{MC}$,
 j'ai $\frac{V^2}{r^2} \times MC$: or la force centripète vers C est à la force cen-
 tripète vers O comme PO est à MO , ainsi qu'on vient de voir;
 donc la $PO, MO :: \frac{V^2}{PO^2} \times MC, \frac{V^2}{PO^2} \times \frac{MO}{MC}$, force centripète
 vers O .

Si nous avions donné un autre rayon vecteur que nous euf-
 sions nommé mr , un autre rayon de la développée que nous euf-
 sions nommé mr , & un autre perpendiculaire sur la tangente
 correspondant que nous eussions nommé po , nous aurions pour
 la force centripète vers O $\frac{mv^2}{p^2 \times mr}$; donc les deux forces cen-
 tripètes seroient comme $\frac{MO}{PO^2 \times MC}, \frac{mr}{p^2 \times mr}$, ou comme MO
 $\times p^2 \times mr, mr \times PO^2 \times MC$, c'est-à-dire en raison composée de
 la même droite MO , mr , des rayons vecteurs, de la réciproque
 des rayons mr, MC , de la développée, & de la réciproque des
 cubes des perpendiculaires menées du centre des
 forces sur les tangentes correspondantes.

COROLLAIRE I.

413. Si la courbe est un cercle (Fig. 131), & que le centre O
 des forces soit le centre du cercle, les forces centrifuges sont entr'elles
 réciproquement comme les carrés des longueurs des rayons vecteurs
 OM .

Les rayons de la développée sont tous égaux entr'eux dans le
 cercle, puisque toutes les perpendiculaires menées à un point
 quelconque de la circonférence se rencontrent toutes dans le
 centre; cela posé, je prolonge le rayon MC en N , & je mene
 la droite ON , les droites OP, NM étant perpendiculaires à
 PR sont par conséquent parallèles entr'elles; donc l'angle POM
 est égal à son alterne OMN ; or l'angle OPM est droit de mê-
 me que l'angle MON , donc les triangles OPM, MON sont
 semblables, ainsi $MN, MO :: MO, OP$, d'où je tire $OP =$
 $\frac{MO^2}{MN}$, & $OP^2 = \frac{MO^3}{MN}$; mais par la Proposition présente la force
 centripète au point M est $\frac{MO}{OP^2 \times MC}$, mettant donc la valeur de OP^2 la

force centripete sera $\frac{MO \times \overline{MN}^3}{MO \times MC} = \frac{\overline{MN}^3}{MO \times MC}$; mais MN, MC sont toujours les mêmes à l'égard de tous les points M de la circonférence, donc les forces centripetes sont entr'elles comme $\frac{\overline{MN}^3}{MO \times MC}$ est à $\frac{\overline{MN}^3}{mo \times MC}$ ou comme $\frac{1}{MO}$ est à $\frac{1}{mo}$.

COROLLAIRE II.

414. Si la courbe est un cercle & que le centre O des forces (Fig. 132.) soit dans l'aire hors du centre du cercle, les forces centripetes sont entr'elles en raison composée de la raison inverse des quarrés des rayons vecteurs OM, &c. & de la raison inverse des cubes des cordes MA, c'est-à-dire des rayons vecteurs prolongés jusqu'à la circonférence.

Du centre des forces O je mene OP perpendiculaire à la tangente RP; je prolonge le rayon vecteur en A d'où je mene le diametre AB, & du point B la corde BM; l'angle OPM est droit de même que l'angle AMB par la construction, de plus l'angle AMP du segment est égal à l'angle ABM dont le sommet est à la circonférence, donc les deux triangles rectangles MOP, BAM sont semblables, ainsi AB, AM :: MO, OP, d'où je tire $OP = \frac{AM \times MO}{AB}$ & $\overline{OP}^3 = \frac{\overline{AM}^3 \times \overline{MO}^3}{\overline{AB}^3}$; mais par la Proposition

présente la force centripete en M est $\frac{MC}{\overline{OP}^3 \times MC}$; mettant donc la

valeur de \overline{OP}^3 , la force centripete sera $\frac{MO \times \overline{AB}^3}{\overline{AM}^3 \times \overline{MO}^3 \times MC} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{AM}^3 \times \overline{MO}^3 \times MC}$;

mais AB & MC sont toujours les mêmes à l'égard de quelque point M que ce soit, donc les forces centripetes sont entr'elles

comme $\frac{\overline{AB}^3}{\overline{AM}^3 \times \overline{MO}^3 \times MC}$ est à $\frac{\overline{AB}^3}{am \times mo \times MC}$ ou comme $\frac{1}{\overline{AM}^3 \times \overline{MO}^3}$ est à $\frac{1}{am \times mo}$.

LEMME.

415. Dans toute section conique (Fig. 133), dont la droite TM est tangente, a droite MC perpendiculaire à la courbe, & la droite

OC est menée du foyer au point d'atouchement, si du point C on mène CS perpendiculaire à OM, la partie MS que cette perpendiculaire coupe est égale à la moitié du parametre.

Demonstration pour la Parabole.

Du point M je mène l'ordonnée MQ, & du point O la droite OP perpendiculaire à la tangente; je nomme le parametre a , & l'abscisse $AQ = x$, donc par les propriétés de la parabole que nous avons expliquées dans la *Theorie & la Pratique du Geomètre*, j'ai $OM = x + \frac{1}{2}a$, $QC = \frac{1}{2}a$, & $QT = 2x$, & par conséquent $TO = TA + AO = x + \frac{1}{2}a = OM$.

Le triangle TOM étant isoscèle, & la droite OP perpendiculaire sur TM, j'ai $TP = PM$; or le triangle rectangle TQM donne $\overline{TM}^2 = \overline{TQ}^2 + \overline{QM}^2$, donc $\overline{TM}^2 = 4x^2 + ax$, & $\overline{PM}^2 = x^2 + \frac{1}{4}ax$; de même le triangle rectangle POM donne $\overline{PO}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{PM}^2$, donc $\overline{PO}^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}aa - x^2 - \frac{1}{4}ax = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ax$.

Maintenant les droites OP, MC étant perpendiculaires à la tangente, les angles POM, OMC alternes sont égaux, donc les triangles rectangles OMP, CMS sont semblables, & par conséquent $OM, OP :: MC, MS$, & $\overline{OM}^2, \overline{OP}^2 :: \overline{MC}^2, \overline{MS}^2$, mais à cause du triangle rectangle MQC, j'ai $\overline{MC}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QC}^2 = ax + \frac{1}{4}aa$, mettant donc les valeurs analytiques dans $\overline{OM}^2, \overline{OP}^2 :: \overline{MC}^2, \overline{MS}^2$, j'ai $x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2, \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ax :: ax + \frac{1}{4}a^2, \overline{MS}^2$, & divisant la premiere raison par $x + \frac{1}{4}a$, j'ai $x + \frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a :: ax + \frac{1}{4}a^2, \overline{MS}^2$, & divisant les deux antecedens par $x + \frac{1}{4}a$, j'ai $1, \frac{1}{4}a :: a, \overline{MS}^2$, d'où je tire $\overline{MS}^2 = \frac{1}{4}a^2$, donc $MS = \frac{1}{2}a$.

Demonstration pour l'Ellipse.

Je nomme l'axe $AB = b$ (Fig. 134), le parametre $= a$, la distance $OR = c$, & l'abscisse $AQ = x$, donc $QR = AR - AQ = \frac{1}{2}b - x$, & $OQ = OR - QR = c - \frac{1}{2}b + x$, & $AO \times OB = \overline{AR}^2 - \overline{OR}^2 = \frac{1}{4}b^2 - c^2$; or par la propriété de l'ellipse le rectangle

tangle $AO \times OB$ est égal au quarré du demi-petit axe RH , & d'autre part l'on a $\overline{AR}^2, \overline{RH}^2 :: AQ \times QB, \overline{QM}^2$; mettant donc les valeurs analytiques, j'ai $\frac{1}{4}b^2, \frac{1}{4}b^2 - c^2 :: bx - xx, \overline{QM}^2$, donc $\overline{QM}^2 = bx - xx - \frac{4c^2x}{b} + \frac{4c^2x^2}{bb}$; or $\overline{QO}^2 = c^2 - bc + \frac{1}{4}bb + 2cx - bx + xx$, donc $\overline{OM}^2 = \overline{QO}^2 + \overline{QM}^2 = c^2 - bc + \frac{1}{4}bb + 2cx - bx + xx + bx - xx - \frac{4c^2x}{b} + \frac{4c^2x^2}{bb} = c^2 - bc + \frac{1}{4}bb + 2cx - \frac{4c^2x}{b} + \frac{4c^2x^2}{bb}$.

Maintenant en suivant les regles du Calcul Différentiel, nous trouverons que la soutangente $TQ = \frac{2bx - 2x^2}{b - 2x}$, & par conséquent $TA = TQ - AQ = \frac{2bx - 2x^2}{b - 2x} - x = \frac{2bx - 2x^2 - bx + x^2}{b - 2x} = \frac{bx}{b - 2x} = \frac{\frac{1}{2}bx}{\frac{1}{2}b - x}$; & que la souperpendiculaire $QC = \frac{ba - 2ax}{2b} = \frac{\frac{1}{2}ba - ax}{b}$, d'où il suit que $TO = TA + AO = TA + AR - OR = \frac{\frac{1}{2}bx}{\frac{1}{2}b - x} + \frac{1}{2}b - c = \frac{\frac{1}{2}bb - bc + 2cx}{b - 2x}$.

Les triangles rectangles TMQ, MCQ sont semblables, à cause que le triangle TMC est rectangle, mais les triangles rectangles TMQ, TPO sont aussi semblables à cause de l'angle aigu T qui leur est commun, donc $MC, CQ :: TO, OP$, & par conséquent $OP = \frac{CQ \times TO}{MC}$; mais les triangles rectangles MOP, MCS sont aussi semblables, à cause de l'angle aigu MOP égal à son alterne SMC , donc $OM, OP :: MC, MS$ ou $OM, \frac{CQ \times TO}{MC} :: MC, MS$; donc $MS = \frac{CQ \times TO}{OM}$, & par conséquent $OM, CQ :: TO, MS$, donc $\frac{1}{2}b - c + \frac{2cx}{b}, \frac{ba - 2ax}{2b} :: \frac{\frac{1}{2}bb - bc + 2cx}{b - 2x} MS$, & multipliant la premiere raison par $2b$, j'ai $bb - 2bc + 4cx, ba - 2ax :: \frac{\frac{1}{2}bb - bc + 2cx}{b - 2x} MS$, & divisant la premiere raison par $b - 2x$, j'ai $\frac{bb, 2bc + 4cx}{b - 2x}, a :: \frac{\frac{1}{2}bb - bc + 2cx}{b - 2x} MS$, mais le premier antecédent est double du second antecédent, donc le premier conséquent a est double du second conséquent MS , donc $MS = \frac{1}{2}a$.

Démonstration pour l'Hyperbole.

Nommant le parametre $= a$, le diametre $VA = b$ (Fig. 135), l'abscisse $AQ = x$, la distance $RO = c$, j'ai $QR = \frac{1}{2}b + x$, $OQ = QR - RO = \frac{1}{2}b + x - c$, & $VO \times AR = \overline{RO}^2 - \overline{RA}^2 = c^2 - \frac{1}{4}bb$, mais par la propriété de l'hyperbole le rectangle $VO \times AR$ est égal au quarré du demi-petit axe RH , & de plus l'on a $\overline{RA}^2, \overline{RH}^2 :: VQ \times QA, \overline{QM}^2$, donc $\frac{1}{4}bb, c^2 - \frac{1}{4}bb :: bx + xx, \overline{QM}^2$, donc $\overline{QM}^2 = -bx - xx + \frac{c^2x}{4b} + \frac{c^2xx}{4bb}$, donc $\overline{OM}^2 = \overline{QM}^2 + \overline{QO}^2 = -bx - xx + \frac{c^2x}{4b} + \frac{c^2x^2}{4bb} + \frac{1}{4}bb + bx + xx - bc - 2cx + cc = \frac{1}{4}bb - bc + cc - 2cx + \frac{c^2x}{4b} + \frac{c^2x^2}{4bb}$, d'où je tire $OM = c - \frac{1}{2}b + \frac{2cx}{b}$.

Selon les regles du Calcul Différentiel la sous-tangente $TQ = \frac{2bx + 2x^2}{b + 2x}$, & la sous-perpendiculaire $QC = \frac{ba + 2ax}{2b}$, donc $TA = TQ - AQ = \frac{2bx + 2x^2}{b + 2x} - x = \frac{2bx + 2x^2 - bx - 2x^2}{b + 2x} = \frac{bx}{b + 2x}$ & $TO = TA - RA + RO = \frac{bx}{b + 2x} - \frac{1}{2}b + c = b \frac{bx - \frac{1}{2}bb + bc - bx + 2cx}{b + 2x} = \frac{2cx + bc - \frac{1}{2}bb}{b + 2x}$.

Maintenant les triangles rectangles QMC , TPO étant semblables, j'ai $MC, CQ :: TO, OP$, donc $OF = \frac{CQ \times TO}{MC}$; & à cause des triangles semblables POM, CMS , j'ai $OM, OP :: MC, MS$, ou $OM, \frac{CQ \times TO}{MC} :: MC, MS$, & par conséquent $MS = \frac{CQ \times TO}{OM} ::$ d'où je tire $OM, CQ :: TO, MS$, & mettant les valeurs analytiques, j'ai $c - \frac{1}{2}b + \frac{2cx}{b}, \frac{ba + 2ax}{2b} :: \frac{2cx + bc - \frac{1}{2}bb}{b + 2x}, MS$; & multipliant la première raison par $2b$, j'ai $2bc - bb + 4cx, ba + 2ax :: \frac{2cx + bc - \frac{1}{2}bb}{b + 2x}, MS$, & divisant la première raison par $b + 2x$, j'ai $\frac{2bc - bb + 4cx}{b + 2x}, a :: \frac{bc - \frac{1}{2}bb + 2cx}{b + 2x}, MS$; mais le premier antécédent est double du second, donc a est double de MS , & par conséquent $MS = \frac{1}{2}a$.

COROLLAIRE III.

416. Dans toute section conique (Fig. 133, 134, 135.) si le centre O des forces est le foyer, les forces centripetes sont entr'elles en raison reciproque des quarrés des rayons vecteurs.

Les triangles semblables MOP, MCS donnent MO, OP :: MC, MS, donc $OP = \frac{MO \times MS}{MC}$; or par le Lemme précédent

$MS = \frac{1}{2}a$; donc $OP = \frac{MO \times \frac{1}{2}a}{MC}$, & $OP^2 = \frac{MO^2 \times \frac{1}{4}a^2}{MC^2}$; mais par la

Proposition précédente la force centripete en M est $\frac{MO}{PO^2 \times MC}$; met-

tant donc la valeur de PO^2 la force centripete sera $\frac{MO \times MC^3}{MC \times MO^2 \times \frac{1}{4}a^2}$.

$= \frac{8MO \times MC^3}{MC \times MO^2 \times a^2} = \frac{4MC^3 \times 2MO}{a^2 \times a \times MC \times MO}$; or selon ce que nous avons en-

seigné dans le *Calcul Différentiel & Integral*, le rayon MC de la développée est $\frac{4MC^3}{a^2}$; mettant donc cette valeur de MC dans le

dénominateur de l'expression de la force centripete que nous venons de trouver, cette force sera $\frac{4MC^3 \times 2MO \times a^2}{a^2 \times 4MC^3 \times MO^2} = \frac{2}{a \times MO}$; donc

les forces centripetes sont comme $\frac{2}{a \times MO}$, est à $\frac{2}{a \times mo}$; or la rai-

son $\frac{2}{a}$ est toujours la même, donc les forces centripetes sont comme $\frac{1}{MO}$, est à $\frac{1}{mo}$, & par conséquent reciproquement com-

me mo est à MO ou reciproquement comme les quarrés des rayons vecteurs.

L E M M E.

417. Trouver les équations des trois sections coniques j'en prenant le foyer pour l'origine des abscisses.

Solution pour la Parabole.

Soit la parabole AM (Fig. 136), dont le foyer est O, je nomme le parametre = a , l'abscisse OP = x , & l'ordonnée PM

V v ij

$=y$; par la propriété de la parabole j'ai $AO = \frac{1}{4}a$; donc $AP = \frac{1}{4}a + x$; or par la nature de la même courbe j'ai $y^2 = AP \times a$, donc j'ai $y^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax$ qui est l'équation demandée.

Solution pour l'Ellipse.

Soit l'Ellipse ACB (Fig. 137.) dont l'un des foyers est O; je nomme $AB = b$, $2TC = d$, & le parametre $= a$, ce qui donne $AT = \frac{1}{2}b$ & $TC = \frac{1}{2}d$; je nomme aussi l'abscisse $OP = x$, & l'ordonnée $PM = y$, par la propriété de l'ellipse j'ai $AB, 2CT :: 2CT, a$, donc $AT, TC :: TC, \frac{1}{2}a$, ou $:: \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}a$; donc $\frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}cc$.

Je mene la droite OC, laquelle par la nature de l'ellipse est égale à $AT = \frac{1}{2}b$; or le triangle rectangle OCT donne $\overline{OT}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{TC}^2$, donc $\overline{OT}^2 = \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc = \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab$, mais $AO = AT - OT = \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab}$, & $AP = AT - OT - OP = \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab} - x$, & $PB = TB + OT + OP = \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab} + x$, d'où il suit que $AP \times PB = \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}ab - 2x\sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab} - xx = \frac{1}{4}ab - 2x\sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab} - x^2$.

Or par la propriété de l'ellipse, j'ai $PM, AP \times PB :: a, b$, donc $y^2, \frac{1}{4}ab - 2x\sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab} - x^2 :: a, b$, d'où je tire $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{2ax\sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab}}{b} - \frac{ax^2}{b}$ & c'est l'équation demandée.

Solution pour l'Hyperbole.

Soit l'hyperbole AM dont l'un des foyers est O (Fig. 138), le premier axe est BA, & le second $2TC$, je nomme le parametre $= a$, l'axe $BA = b$, l'axe $2TC = d$, l'abscisse $OP = x$, & l'ordonnée $PM = y$; par la formation de l'hyperbole, j'ai $:: b, d, a$, donc $:: \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}d, \frac{1}{2}a$, & par conséquent $\frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}dd$.

Par la même formation j'ai le rectangle $BO \times OA = \overline{TC}^2 = \frac{1}{4}ab$; or par la propriété de l'hyperbole, j'ai $\overline{HO}^2, BO \times OA :: \overline{TC}^2, \overline{TA}^2$, donc $\overline{HO}^2, \frac{1}{4}ab :: \frac{1}{4}ab, \frac{1}{4}bb$, d'où je tire $\overline{HO}^2 = \frac{a^2bb}{4bb} = \frac{1}{4}a^2$; or si je nomme $AO = z$, j'ai $BO \times OA = bz + zz$, & par conséquent puisque j'ai $\overline{HO}^2, BO \times OA :: \overline{TC}^2, \overline{TA}^2 :: a, b$, j'ai aussi $\frac{1}{4}a^2, bz + zz :: a, b$, donc $\frac{1}{4}a^2b = abz + azz$, ou $\frac{1}{4}ab = bz + az$.

$-xz$, & ajoutant de part & d'autre $\frac{1}{4}bb$, j'ai $zz + bz + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}ab$, tirant donc la racine quarrée, j'ai $z + \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}ab}$ & $z = \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}ab} - \frac{1}{2}b = AO$, donc $AP = AO + OP = \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}ab} - \frac{1}{2}b + x$, & $BP = BA + AO + OP = \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}ab} + \frac{1}{2}b + x$, d'où je tire $BP \times AP = \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}ab - \frac{1}{4}bb + 2x\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}ab} + xx = \frac{1}{4}ab + 2x\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}ab} + x^2$; or par la propriété de l'hyperbole j'ai \overline{MP}^2 , $BP \times PA :: a, b$, donc $y^2, \frac{1}{4}ab + 2x\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}ab} + x^2 :: a, b$, d'où je tire $y^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{2ax\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}ab}}{b} + \frac{ax^2}{b}$, & c'est l'équation demandée.

PROPOSITION CXL.

418. Connoître la courbe qu'un corps parcourt avec des forces centrifuges qui suivent telle loi que l'on voudra d'accélération ou de retardement.

Soit la courbe AC (Fig. 139.) parcourue par le corps A, son axe AO, d'un point quelconque B de la courbe soit décrit l'arc BP dont le centre est en O; du même centre & avec le rayon OA soit décrit l'arc LA, enfin soit mené un autre rayon vecteur infiniment proche Ob, & du point b soit décrit un autre arc bp qui sera infiniment proche de BP, il est visible que si l'on prolonge les rayons vecteurs jusqu'à l'arc AL, les secteurs L/O, bNO seront semblables, de même que les secteurs LOA, BOP.

Je nomme $AO = b$, $OP = x$, & $AL = z$; donc $Pp = dx$ & $Ll = dz$; or à cause des secteurs semblables LOl, NOb, j'ai $lO, Ll :: NO, Nb$, donc $b, dz :: x, \frac{x dz}{b} = bN$.

Je nomme u la vitesse du corps au point B, & f la force centripète au même point, laquelle est la même chose que la sollicitation au mouvement; donc en suivant le raisonnement de la Proposition 28 (N. 84.) nous aurons $\frac{1}{2}mu^2 = \int f dx$, ou comme la masse est toujours la même, nous aurons $\frac{1}{2}u^2 = \int f dx$, c'est-à-dire les moitiés des quarrés des vitesses dans les différens endroits de la courbe, seront entr'eux comme les $\int f dx$ correspondans; or comme les forces centripètes peuvent aller ou en diminuant ou en augmentant, & par conséquent les vitesses aussi, il s'ensuit que les différences des vitesses seront négatives si ces vitesses vont en diminuant, & par conséquent nous aurons $-u du = f dx$ &

$-\frac{1}{2}u^2 = \int f dx$, ou $-u^2 = \int f dx$; car la fraction $\frac{1}{2}$ ne fait rien, à cause que ne s'agissant que des rapports, il est visible que les quarrés des vitesses sont en même raison que leurs moitiés; supposant donc que les vitesses aillent en diminuant, nous avons, comme on vient de voir, $-u^2 = \int f dx$, ou $u^2 = -\int f dx$, mais comme $-\int f dx$ étant un quarré négatif seroit une valeur imaginaire de u^2 , ce qui ne sçauroit être, parce que u^2 est une valeur réelle, il s'ensuit que l'intégrale $-\int f dx$ n'est pas complète, & qu'il faut lui ajouter une quantité constante selon les loix du Calcul Integral; & comme cette grandeur peut ici être prise à discrétion, parce que nous n'avons rien qui la détermine, nous ajouterons le plan cb afin de rendre tous les termes homogenes ou d'un même nombre de dimensions, ainsi nous aurons $u^2 = cb - \int f dx$, & $u = \sqrt{cb - \int f dx}$.

Le mouvement du corps A le long de l'arc infiniment petit Bb pouvant être regardé comme uniforme, l'espace Bb sera $u dt$ (N. 17), & mettant la valeur de u nous aurons $Bb = dt \sqrt{cb - \int f dx}$, mais les tems étant proportionnels aux aires décrites par le rayon vecteur pendant ces tems (N. 406), nous aurons $dt = BO \times bN$; or $BO = x$, & $bN = \frac{x dz}{b}$; donc $dt = \frac{x^2 dz}{b}$, & mettant cette valeur de dt dans celle de Bb, nous aurons $\overline{Bb} = \frac{x^2 dz \sqrt{cb - \int f dx}}{b}$, donc $\overline{Bb}^2 = \frac{x^4 dz^2 \times cb - \int f dx}{b^2}$.

Or $\overline{BN}^2 = dx^2$, & $\overline{bN}^2 = \frac{x^2 dz^2}{b^2}$, donc à cause du triangle rectangle bBN qui donne $\overline{bB}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{bN}^2$, nous avons $bB = dx^2 + \frac{x^2 dz^2}{b^2} = \frac{b^2 dx^2 + x^2 dz^2}{b^2}$. Comparant donc ensemble les deux valeurs de \overline{bB}^2 , nous aurons

$$\frac{b^2 dx^2 + x^2 dz^2}{b^2} = \frac{x^4 dz^2 \times cb - \int f dx}{b^2}$$

Et multipliant d'abord par b^2 , puis prenant une quantité e , en sorte que $b^2 e^2$ soit égal à 1, & multipliant le premier membre par $b^2 e^2$, ce qui ne gâtera rien, & rendra cependant tous les termes homogenes, nous aurons

$$b^4e^2dx^2 + x^2b^2e^2dz^2 = x^4dz^2 \times cb - \int f dx$$

$$\text{ou } b^4e^2dx^2 = x^4dz^2 \times cb - \int f dx - b^2e^2x^2dz^2$$

$$\text{D'où je tire } dz^2 = \frac{b^4e^2dx^2}{x^4 \times cb - \int f dx - b^2e^2x^2}$$

$$\& dz = \frac{b^2edx}{\sqrt{cbx^4 - x^4 \int f dx - b^2e^2x^6}}$$

$$\text{donc } z = \int \frac{b^2edx}{\sqrt{cbx^4 - x^4 \int f dx - b^2e^2x^6}}$$

Et c'est l'équation generale de la courbe quelque loi d'accélération ou de mouvement qu'on veuille supposer pour le déterminer aux cas particuliers, il n'y a qu'à mettre au lieu de f l'expression particuliere de chaque cas selon la loi donnée.

Supposons, par exemple, que les forces centripetes soient entr'elles réciproquement comme les quarrés des rayons vecteurs, nous aurons $f = \frac{1}{x^2}$, & prenant une grandeur g telle que nous ayons $b^2g = 1$, nous aurons $f = \frac{b^2g}{x^2}$, ce que nous faisons pour rendre les termes toujours homogenes. Mettant donc cette valeur de f dans l'équation nous aurons

$$dz = \frac{b^2edx}{\sqrt{cbx^4 - x^4 \int \frac{b^2gdx}{x^2} - b^2e^2x^6}}$$

Or $\int \frac{b^2gdx}{x^2} = \int b^2gx^{-2}dx = -b^2gx^{-1}$, mettant donc cette valeur, & tirant x^2 hors du signe, nous aurons

$$dz = \frac{b^2edx}{x\sqrt{cbx^2 + b^2gx - b^2e^2}}$$

Et c'est l'expression de l'Element de l'arc AL; or comme cette expression n'est point sous une forme qui nous fasse connoître ni le rayon ni le sinus de cet arc, il faut pour le réduire à une forme plus commode, avoir recours à des indéterminées en cette sorte.

Prenons l'indéterminée y , & faisons $x = \frac{b^2}{y}$, donc $dx = -\frac{b^2dy}{y^2}$, & $x^2 = \frac{b^4}{y^2}$, mettant donc ces valeurs dans celle de dz , nous aurons

$$dz = - \frac{b^4 e dy}{y b^2 \sqrt{\frac{cb^3}{y^2} + \frac{b^4 g}{y} - b^2 e^2}}$$

Et faisant passer y sous le signe, & retirant b^2 hors du signe; nous aurons

$$dz = - \frac{b^4 e dy}{b^3 \sqrt{cb^3 + b^2 gy - e^2 y^2}} = - \frac{b e dy}{\sqrt{cb^3 + b^2 gy - e^2 y^2}}$$

Cette expression de l'élément dz ayant encore le même défaut que la précédente, supposons $y = \frac{b^2 g}{e^2} - t$, la lettre t est encore une indéterminée; donc $dy = - dt$, & $y^2 = \frac{b^4 g^2}{e^4} - \frac{b^2 g t}{e^2} + t^2$; & mettant ces valeurs dans celle de dz , nous aurons

$$dz = \frac{b e dt}{\sqrt{cb^3 + \frac{b^4 g^2}{e^2} - e^2 t^2}}$$

Enfin cette expression de dz ayant encore les mêmes défauts que les précédentes, je prends l'indéterminée r , & je fais $cb^3 + \frac{b^4 g^2}{e^2} = e^2 r^2$, & mettant cette valeur dans celle de dz ,

$$\text{j'ai} \quad dz = \frac{b e dt}{\sqrt{e^2 r^2 - e^2 t^2}} = \frac{b e dt}{e \sqrt{r^2 - t^2}} = \frac{b dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}$$

$$\text{d'où je tire } \frac{dz}{b} = \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \frac{r dt}{r \sqrt{r^2 - t^2}}$$

Or $\frac{r dt}{r \sqrt{r^2 - t^2}}$ est l'élément d'un arc de cercle dont le rayon est r , & le sinus $= t$, lequel élément est divisé par r ; car si nous nommons $2r$ le diamètre AB (Fig. 140.), x l'abscisse BP , & t l'ordonnée PM , ce qui donne $Pp = dx$, & $Rm = dt$, la propriété du cercle nous donnera $2rx - xx = tt$, donc $2r dx - 2x dx = 2t dt$, ou $r dx - x dx = t dt$, d'où je tire $dx = \frac{r dt}{r - x}$, & $dx^2 = \frac{r^2 dt^2}{r^2 - 2rx + xx}$, ou $\frac{r^2 dt^2}{r^2 - t^2}$; donc $dx^2 + dt^2 = \frac{r^2 dt^2}{r^2 - t^2} + dt^2 = \frac{r^2 dt^2 + r^2 dt^2 - t^2 dt^2}{r^2 - t^2} = \frac{r^2 dt^2}{r^2 - t^2}$, & par conséquent $\sqrt{dx^2 + dt^2} = \frac{r dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}$; or $\sqrt{dx^2 + dt^2}$ est l'élément Mm de l'arc de cercle MB , donc $\frac{r dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}$ est l'élément du même arc; & $\frac{r dt}{r \sqrt{r^2 - t^2}}$ est le même élément divisé par le rayon.

Or

Or $\frac{dz}{b}$ est l'élément Ll (Fig. 39.) divisé par le rayon OA , & comme l'arc & le rayon étant connus, l'expression $\frac{dz}{b}$ peut exprimer l'angle LOl , & $\int \frac{dz}{b}$ l'angle LOA ; mais $\frac{dz}{b} = \frac{rds}{r\sqrt{r^2 - t^2}}$, donc $\frac{rds}{r\sqrt{r^2 - t^2}}$ exprime un angle égal à l'angle LOl , & $\int \frac{rds}{r\sqrt{r^2 - t^2}}$ exprime un angle égal à LOA .

Pour construire donc la courbe, il faut prendre un rayon à volonté $OT = r$, & décrire un arc $TV = \frac{rds}{\sqrt{r^2 - t^2}}$, d'où menant l'ordonnée VZ , on aura $VZ = t$, & pour trouver l'abscisse x correspondante, voici comme on fera.

Nous avons $y = \frac{b^2g}{2e^2} - t = \frac{b^2g - 2e^2t}{2e^2}$, de plus nous avons $x = \frac{b^2}{y}$, donc $x = \frac{2b^2e^2}{b^2g - 2e^2t} = \frac{2e^2}{g - \frac{2e^2t}{b^2}}$, d'où l'on tire les

analogies suivantes;

$$b, e :: \frac{2e^2}{b}; b, \frac{2e^2}{b} :: t, \frac{2e^2t}{b^2}$$

Et enfin $g - \frac{2e^2t}{b^2}, e :: 2e, \frac{2e^2}{g - \frac{2e^2t}{b^2}}$, & le rayon $OP = x$

étant trouvé par ce moyen, on décrira l'arc BP , & le point B où il coupera le rayon OV prolongé sera un point de la courbe cherchée.

Ce qui embarrasse ici, c'est de déterminer les indéterminées; cependant dès qu'on peut prendre telle rayon r que l'on veut, t se trouve déterminé, b est connu, & par conséquent l'on connoît e , puisqu'on a $bbee = 1$, & g est aussi connu, puisque nous avons fait $b^2g = 1$, ce qui donne $g = \frac{1}{b^2}$; ainsi la construction peut se faire aisément comme il vient d'être enseigné.

Pour trouver l'équation de cette courbe qui marque le rapport des ordonnées aux abscisses dont l'origine soit en O , & pour sçavoir en même tems à laquelle des trois sections coniques cette courbe appartient, car il est sûr par la supposition que nous avons faite, & le Corollaire III. de la Proposition 138. (N. 416.) que cette courbe est une des trois sections, on agira ainsi.

Comme nous avons fait $y = \frac{b^2g}{2e^2} - t$, prenons une droite OM

X x

$= \frac{b^2 g}{2c^2}$ (Fig. 141.), & sur cette droite une partie $OP = t$, donc $PM = OM - QP = \frac{b^2 g}{2c^2} - t = y$, du centre O , & d'un rayon $= r$ décrivons le demi-cercle TVK, du point P élevons la perpendiculaire PV , & de O par le point V menons OB que nous ferons égal à $x = \frac{b^2}{y}$; enfin décrivant l'arc de cercle CBA , concevons que la courbe aye son sommet sur la droite Oa , ce qui ne change rien, pourvu que la distance Oa soit égale à la distance OA de la figure 130. & qu'on fasse l'angle BOM (Fig. 141.) égal à l'angle AOL (Fig. 139.).

Cela fait comme les lettres x, y, t , que nous avons employées jusqu'ici, ne paroîtront plus dans le calcul; je nomme t la droite OP , x , la droite Bb , ou OF , & y la droite Ob ou FB , sans leur donner pour cela les valeurs que ces lettres avoient auparavant, les triangles semblables OPV, OFB , donnent $OP, OV :: OF, OB$, donc $t, r :: x, \frac{r^2}{t} = OB$, mais nous avons trouvé ci-dessus $OB = \frac{2b^2 c^2}{b^2 g - 2c^2 t}$; car OB alors étoit la lettre x laquelle avoit cette valeur. Comparant donc ensemble les deux valeurs de OB nous aurons l'équation qu'on voit ici.

Et réduisant tout à un dénominateur commun que je neglige, puis donnant de part & d'autre $2c^2 rxt$, enfin divisant par les grandeurs qui multiplient t , je trouve $t = \frac{b^2 grx}{2b^2 c^2 + 2c^2 rx}$

$$\begin{aligned} \frac{rx}{t} &= \frac{2b^2 c^2}{b^2 g - 2c^2 t} \\ b^2 grx - 2c^2 rxt &= 2b^2 c^2 t \\ b^2 grx &= 2b^2 c^2 t + 2c^2 rxt \\ t &= \frac{b^2 grx}{2b^2 c^2 + 2c^2 rx} \end{aligned}$$

Or les mêmes triangles semblables OPV, OFB , donnent $OP, PV :: OF, FB$; donc $t, \sqrt{r^2 - t^2} :: x, y$, donc $ty = x\sqrt{r^2 - t^2}$, & élevant tout au quarré, puis transposant à l'ordinaire, je trouve $t^2 = \frac{x^2 r^2}{y^2 + x^2}$.

$$\begin{aligned} ty &= x\sqrt{r^2 - t^2} \\ t^2 y^2 &= x^2 r^2 - x^2 t^2 \\ t^2 y^2 + x^2 t^2 &= x^2 r^2 \\ t^2 &= \frac{x^2 r^2}{y^2 + x^2} \end{aligned}$$

Et élevant au quarré la valeur de t que nous avons trouvé auparavant, & comparant ces deux

$$\begin{aligned} \frac{x^2 r^2}{y^2 + x^2} &= \frac{b^4 g^2 r^2 x^2}{4b^4 c^4 + 8b^2 c^4 rx + 4c^4 r^2 x^2} \\ \frac{1}{y^2 + x^2} &= \frac{b^4 g^2}{4b^4 c^4 + b^2 c^4 rx + 4c^4 r^2 x^2} \\ 4b^4 c^4 + 8b^2 c^4 rx + 4c^4 r^2 x^2 &= b^4 g^2 y^2 + b^4 g^2 x^2 \\ y^2 &= \frac{4c^4}{g^2} + \frac{8c^4 rx}{b^2 g^2} + \frac{4c^4 r^2 x^2}{b^4 g^2} - x^2 \end{aligned}$$

valeurs, puis divisant par $x^2 r^2$, ensuite réduisant tout au même dénominateur que je neglige; enfin transposant à l'ordinaire, j'ai une équation de la courbe qui exprime le rapport des ordonnées aux abscisses.

Maintenant pour voir à quelle section conique cette courbe appartient, il n'y a qu'à comparer ses termes avec ceux des équations des sections coniques que nous avons trouvées dans le Lemme précédent; ainsi l'équation à la parabole étant $y^2 = \frac{1}{4}aa + ax$, je vois qu'il n'y a point de termes où x soit au second degré, c'est pourquoi les termes de la courbe $\frac{4e^4 r^2 x^2}{b^4 g^2} - x^2 = 0$; donc $\frac{4e^4 r^2}{b^4 g^2} - 1 = 0$, d'où je tire $4e^4 r^2 = b^4 g^2$, & $r^2 = \frac{b^4 g^2}{4e^4}$, donc $r = \frac{b^2 g}{2e^2}$, mais par la construction que nous venons de faire, nous avons $OM = \frac{b^2 g}{2e^2}$, & OK , ou $OV = r = \frac{b^2 g}{2e^2}$; donc quand la courbe est une parabole, on a $OM = OK$.

Or dans le calcul que nous avons fait pour la courbe, nous avons trouvé $r = \sqrt{\frac{cb^3}{e^2} + \frac{b^4 g^2}{4e^4}}$, donc $\frac{cb^3}{e^2} = 0$, & par conséquent $c = 0$.

La comparaison des termes ax , $\frac{8e^4 rx}{b^2 g^2}$, où x se trouve au premier degré, donne $a = \frac{8e^4 r}{b^2 g^2}$, & mettant la valeur de r , j'ai $a = \frac{8e^4 b^2 g}{2e^2 b^2 g^2} = \frac{4e^2}{g}$.

De même, la comparaison des termes tous connus $\frac{1}{4}aa$, $\frac{4e^4}{g^2}$, donne $aa = \frac{16e^4}{g^2}$, & $a = \frac{4e^2}{g}$ de même qu'auparavant.

L'équation à l'ellipse est $y^2 = \frac{1}{4}ax - \frac{2ax\sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}ab}}{b} - \frac{xxa}{b}$, mais pour ne pas nous tromper sur la lettre b qui se trouve aussi dans l'équation de la courbe, nous mettrons à sa place la lettre n , ce qui donne $y^2 = \frac{1}{4}ax - \frac{2ax\sqrt{\frac{1}{4}nn - \frac{1}{4}an}}{n} - \frac{xxa}{n}$.

La comparaison des termes connus $\frac{1}{4}aa$, $\frac{4e^4}{g^2}$ donne $a^2 = \frac{16e^4}{g^2}$, donc $a = \frac{4e^2}{g}$ de même que dans la parabole, ainsi le parametre est le même.

La comparaison des termes où x^2 se trouve donne $-\frac{a}{n}$
X x ij

$= \frac{4e^4 r^2}{b^4 g^2} - 1$, ou $1 - \frac{a}{n} = \frac{4e^4 r^2}{b^4 g^2}$, & mettant la valeur de a , j'ai $1 - \frac{4e^2}{gn} = \frac{4e^4 r^2}{b^4 g^2}$, & multipliant tout par $b^4 g^2$, j'ai $b^4 g^2 - \frac{4b^4 e^2 g}{n} = 4e^4 r^2$, d'où je tire $r^2 = \frac{b^4 g^2}{4e^4} - \frac{b^4 g}{e^2 n}$ & $r = \sqrt{\frac{b^4 g^2}{4e^4} - \frac{b^4 g}{e^2 n}}$, donc r est moindre que $\frac{b^2 g}{2e^2}$, ainsi dans l'ellipse CK est moindre que CM, & quand cela arrive, l'équation de la courbe est une ellipse.

L'équation à l'hyperbole en mettant n au lieu de b , est $y^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{2ax\sqrt{\frac{1}{4}nn - \frac{1}{4}an}}{n} + \frac{aax}{n}$; or la comparaison des termes entièrement connus donne $\frac{1}{4}aa = \frac{4e^4}{g^2}$ ou $a^2 = \frac{16e^4}{g^2}$; & $a = \frac{4e^2}{g}$, de même que dans l'ellipse & la parabole.

La comparaison des termes où se trouve x^2 donne $\frac{a}{n} = \frac{4e^4 r^2}{b^4 g^2} - 1$, ou $1 + \frac{a}{n} = \frac{4e^4 r^2}{b^4 g^2}$, & multipliant tout par $b^4 g^2$, on a $b^4 g^2 + \frac{ab^4 g^2}{n} = 4e^4 r^2$, & mettant la valeur de a on a $b^4 g^2 + \frac{4e^2 b^4 g}{n} = 4e^4 r^2$, d'où je tire $r^2 = \frac{b^4 g^2}{4e^4} + \frac{b^4 g}{e^2 n}$, & $r = \sqrt{\frac{b^4 g^2}{4e^4} + \frac{b^4 g}{e^2 n}}$, donc r est plus grand que $\frac{b^2 g}{2e^2}$, c'est-à-dire, CK est plus grand que CM, & quand cela arrive la courbe est une hyperbole.

Pour trouver dans l'ellipse la valeur de n , la comparaison des termes où x se trouve, donne $-\frac{2a}{n}\sqrt{\frac{1}{4}nn - \frac{1}{4}an} = \frac{8e^4 r}{b^2 g^2}$, & mettant la valeur de a , on aura $-\frac{8e^2}{gn}\sqrt{\frac{1}{4}nn - \frac{1}{4}an} = \frac{8e^4 r}{b^2 g^2}$, & mettant aussi cette valeur dans la racine, on aura $-\frac{8e^2}{gn}\sqrt{\frac{1}{4}nn - \frac{e^2 n}{g}} = \frac{8e^4 r}{b^2 g^2}$, & multipliant tout par gn , on aura $-8e^2\sqrt{\frac{1}{4}nn - \frac{e^2 n}{g}} = \frac{8e^4 nr}{b^2 g}$, & divisant tout par $8e^2$, on aura $-\sqrt{\frac{1}{4}nn - \frac{e^2 n}{g}} = \frac{e^2 nr}{b^2 g}$, & élevant tout au quarré on aura $\frac{1}{4}nn - \frac{e^2 n}{g} = \frac{n^2 r^2 e^4}{b^4 g^2}$, & divisant tout par n , on aura $\frac{1}{4}n - \frac{e^2}{g} = \frac{nr^2 e^4}{b^4 g^2}$, & mettant la valeur de r^2 , on aura $\frac{1}{4}n - \frac{e^2}{g} = \frac{n}{4} - \frac{e^2}{g}$, ce qui fait voir qu'on

ne ſçauroit déterminer ni r ni n de cette façon.

Pour le déterminer donc il faut comparer la valeur $r^2 = \frac{b^4 g^2}{4e^4}$ — $\frac{b^4 g}{e^2 n}$ avec ſa valeur $r^2 = \frac{cb^3}{e^2} + \frac{b^4 g^2}{4e^4}$, ce qui donne $\frac{b^4 g^2}{4e^4} - \frac{b^4 g}{e^2 n} = \frac{cb^3}{e^2} + \frac{b^4 g^2}{4e^4}$, & multipliant tout par $4e^4$, on aura $b^4 g^2 - \frac{4b^4 e^2 g}{n} = 4cb^3 e^2 + b^4 g^2$, ou — $\frac{4b^4 e^2 g}{n} = 4cb^3 e^2$, ou — $\frac{bg}{n} = c$, ou $en = -bg$, ou enfin $n = -\frac{bg}{c}$, ce qui fait voir que la quantité c n'eſt pas zero lorsque la courbe eſt une ellipse, & que ſi $b = g$, c doit être différente de b , car ſi elle étoit égale à b , on auroit $n = -\frac{bg}{c} = -\frac{bb}{b} = -b$, c'eſt-à-dire l'axe égal à la diſtance du foyer au ſommet, ce qui eſt impoſſible; pour l'hyperbole on aura $n = \frac{bg}{c}$.

Pour déterminer les grandeurs r , g , c , e , & avoir leurs valeurs en a , b , n , qui ſont des grandeurs connues en ſuppoſant que l'on ait trois ſections décrites avec un même parametre a , ce qui ſervira à décrire la courbe propoſée plus aiſément, commençons par la parabole.

Nous avons d'abord trouvé $a = \frac{4e^2}{g}$ donc $g = \frac{4e^2}{a}$; or e eſt une grandeur arbitraire; ainſi l'ayant déterminée, on trouvera g en faiſant $a, 2e :: 2e, \frac{4e^2}{a} = g$, nous avons auſſi trouvé $r = \frac{b^2 g}{2e^2}$, ainſi mettant la valeur de g , nous aurons $r = \frac{4b^2}{2a}$, ce qui donne $2a, 2b :: 2b, \frac{4b^2}{2a} = r$; quant à c par rapport à la parabole nous avons trouvé $c = 0$, & pour ce qui eſt de r , il ſeroit inutile de le chercher, parce que c'eſt une grandeur variante de même que x & y .

Pour conſtruire donc la courbe la grandeur b étant donnée; c'eſt-à-dire la droite OA (Fig. 139); comme nous ſçavons que le point O doit être le foyer, il n'y a qu'à ſuppoſer que le parametre a de la parabole que vous aurez décrit auparavant ſoit égal à $4b$, & dès-lors $r = \frac{4b^2}{8b} = \frac{1}{2}b$, ainſi vous n'avez qu'à décrire du point O pris pour centre un arc de cercle avec le rayon r , & achever le reſte comme ci-deſſus; mais cela n'eſt pas néceſſaire, car il n'y a qu'à conſtruire la parabole avec un parametre quadruple de b , & l'on aura la courbe cherchée.

Pour l'ellipse, nous avons de même que pour la parabole $g = \frac{4c^2}{a}$, ainsi on le déterminera de la même façon ; or $g^2 = \frac{16c^4}{a^2}$, ainsi ayant trouvé $r^2 = \frac{b^4 g^2}{4c^4} - \frac{b^4 g}{nc^2}$, mettant la valeur de g^2 & de g , nous aurons $r^2 = \frac{16b^4}{4a^2} - \frac{4b^2}{na} = \frac{4nb^4 - 4ab^4}{na^2}$, donc $r = \frac{2b^2}{a} \sqrt{1 - \frac{a}{n}}$.

Pour construire donc la courbe demandée, il n'y a qu'à supposer que dans l'ellipse déjà construite, la distance du foyer au sommet est égale à $b = OA$, & décrire avec un rayon $= r$ un cercle, & achever le reste ; mais cela n'est pas nécessaire, car il n'y a qu'à décrire l'ellipse avec le paramètre, & l'axe de l'ellipse trouvés par la comparaison des équations.

Et la même chose se fera pour l'hyperbole.

REMARQUE.

419. A proprement parler la force centripète des corps projetés n'est autre chose que leur pesanteur, qui dans des tems infiniment petits & égaux leur donne des vitesses vers un centre qui sont accélérées ou retardées selon une loi quelconque ; par exemple, si un corps projeté dans un milieu non résistant décrit une courbe, en sorte que dans des tems égaux ses vitesses vers un centre soient entr'elles reciproquement comme les quarrés des distances du corps à ce centre, la force qui lui donne ces vitesses est sa force centripète laquelle ne diffère point de sa pesanteur, puisque ce mouvement vers le centre n'étant point communiqué au corps par le mouvement de projection, lequel de lui-même va toujours en ligne droite, on ne peut l'attribuer qu'à la pesanteur ou gravité du corps ; il y a cependant certains Problèmes qu'on peut résoudre en y appliquant les principes que nous avons appliqués dans ce Chapitre, quoique la pesanteur dans les cas de ces Problèmes ne soit pas la même que la force centripète, & c'est ce que nous allons voir.

PROPOSITION CXLI.

420. Trouver quelle est la courbe le long de laquelle un corps mis d'un mouvement accéléré doit descendre, en sorte qu'il la presse toujours avec une force égale à sa pesanteur absolue.

SOLUTION.

Soit AH l'axe de la courbe (Fig. 143), AB la hauteur d'où le corps étant descendu auroit acquis une vitesse égale à celle avec laquelle il commence à se mouvoir le long de la courbe BMK; je mene l'ordonnée PM, l'infiniment proche pm , & le rayon CM de la développée, lequel est perpendiculaire à la courbe BMK; Je prolonge PM en N, & supposant que MN exprime la pesanteur absolue de ce corps; je mene du point N sur CN prolongé la perpendiculaire NO, & par conséquent la droite MO exprime la partie de la pesanteur absolue du corps que la courbe soutient, car achevant le parallelogramme MONV, la pesanteur absolue MN équivaut aux deux forces MO, MV; mais la courbe ne s'oppose point à la force MV, & au contraire elle s'oppose à la force MO & la détruit, donc MO exprime la partie de la pesanteur que la courbe soutient.

Or supposant qu'à chaque instant il y ait un fil CM que le corps tient tendu, ce fil n'est pas seulement pressé par la partie MO de la pesanteur, mais encore par la force centrifuge le long de l'arc de cercle infiniment petit Mm que ce fil décrit; considérant donc le mouvement le long de l'arc infiniment petit Mm comme uniforme, la vitesse en M sera égale à la vitesse que le corps auroit acquise en descendant le long de PM (N. 197); ainsi la force centrale le long du petit arc de cercle Mm est à la pesanteur absolue du corps, comme le double de la hauteur PM est au rayon CM (N. 395); nommant donc la force centrale V, nous aurons V, MN :: 2PM, CM, & par conséquent $V = \frac{MN \times 2PM}{CM}$, donc la partie de la pesanteur que le fil supporte le long du petit arc de cercle Mm est $\frac{MN \times 2PM}{CM} + MO$; mais la partie de la pesanteur que le fil soutient est la même chose que la force dont le corps presse le petit arc Mm, & par la supposition cette force doit être égale à la pesanteur absolue MN, donc $MN = \frac{MN \times 2PM}{CM} + MO$.

Je nomme $MN = a$, parce que c'est une grandeur constante $AP = x$, $PM = y$, l'arc $BM = u$, $Pp = MR = dx$, $Rm = dy$, $Mm = du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; l'angle PMR est droit, de même que l'angle CMm, étant donc de part & d'autre l'angle commun CMR, il reste l'angle aigu RMm égal à l'angle aigu CMP;

donc les triangles rectangles MRm , PMC sont semblables, & par conséquent CM , $MP :: Mm$, MR , ou CM , $y :: du$, dx , d'où je tire $CM = \frac{ydu}{dx}$; or CM pendant le mouvement de l'arc Mm est constant, donc sa différence est nulle; de plus comme on suppose que dans tous les petits arcs Mm de la courbe le corps presse également la courbe, tous ces petits arcs doivent être pris égaux, & par conséquent du est une grandeur constante; prenant donc la différence de $CM = \frac{ydu}{dx}$, en supposant du constante nous aurons $\frac{dydu dx - ydu ddx}{dx^2} = 0$, & multipliant par dx^2 , puis donnant de part & d'autre $ydu ddx$, nous aurons $dydu dx = ydu ddx$, d'où je tire $y = \frac{dydx}{dax}$, & mettant cette valeur de y dans $CM = \frac{ydu}{dx}$ nous aurons $CM = \frac{dydu dx}{dx ddx} = \frac{dydu}{dax}$.

Les triangles CMP , NMO sont semblables à cause de l'angle aigu CMP égal à l'angle aigu NMO qui lui est opposé au sommet, or le triangle CMP est semblable au triangle MmR , donc le triangle NMO est aussi semblable au triangle mMR , & par conséquent nous avons mM , $MR :: MN$, MO , ou du , $dx :: a$; $\frac{adx}{du} = MO$; or nous avons $V = \frac{MN + PM}{MC}$; mettant donc les valeurs analytiques, nous aurons $V = \frac{2ayddx}{dydu}$, & mettant les valeurs analytiques dans $MN = \frac{MN \times PM}{2MC} + MO$, que nous avons trouvé ci-dessus, nous aurons $a = \frac{2ayddx}{ayuu} + \frac{adx}{du} = \frac{2ayddx + adydx}{dydu}$, d'où je tire $adydu = 2ayddx + adydx$, ou $dydu = 2yddx + dydx$.

Or si dans le second membre le coefficient 2 manquoit, l'intégrale de ce second membre seroit ydx , & celle du premier seroit ydu ; ainsi pour ôter l'obstacle du coefficient, nous diviserons de part & d'autre par $2\sqrt{y}$, ce qui donne $\frac{dydu}{2\sqrt{y}} = \frac{2yddx + dydx}{2\sqrt{y}}$, donc l'intégrale est $du\sqrt{y} = dx\sqrt{y}$, car le second membre $\frac{2yddx + dydx}{2\sqrt{y}}$, peut avoir cette expression $ddx\sqrt{y} + \frac{dydx}{2\sqrt{y}}$, donc l'intégrale est visiblement $dx\sqrt{y}$.

Mais l'intégrale $du\sqrt{y} = dx\sqrt{y}$ n'est pas complete, car du étant plus grand que dx , il manque nécessairement quelque chose dans le second membre de l'équation $du\sqrt{y} = dx\sqrt{y}$, ainsi pour la compléter

completer, nous retrancherons du premier membre la quantité constante $du\sqrt{a}$, ce qui donne $du\sqrt{y} - du\sqrt{a} = dx\sqrt{y}$, & élevant tout au quarré j'ai $ydu^2 - 2du^2\sqrt{y}\sqrt{a} + adu^2 = ydx^2$, or $du^2 = dx^2 + dy^2$; mettant donc cette valeur, j'ai l'équation qu'on voit ici.

$$ydx^2 = ydx^2 + ydy^2 - 2dx^2\sqrt{ay} - 2dy^2\sqrt{ay} + adx^2 + ady^2.$$

$$2dx^2\sqrt{ay} - adx^2 = ydy^2 - 2dy^2 + ady^2$$

$$dx\sqrt{2\sqrt{ay}-a} = dy\sqrt{y-2\sqrt{ay}+a} = dy \times \sqrt{y-\sqrt{a}}$$

$$dx = \frac{dy \times \sqrt{y-\sqrt{a}}}{\sqrt{2\sqrt{ay}-a}}$$

Et corrigeant l'expression, puis donnant de part & d'autre $2dx^2\sqrt{ay}$, & retranchant adx^2 , puis tirant la racine quarrée, enfin transposant, je trouve $dx = \frac{dy \times \sqrt{y-\sqrt{a}}}{\sqrt{2\sqrt{ay}-a}}$.

Je prens une indéterminée z , que je suppose égale à $2\sqrt{ay} - a$, ce qui me donne l'équation $z = 2\sqrt{ay} - a$, dont la différence est $dz = \frac{d\sqrt{ay}}{\sqrt{y}}$, d'où je tire $dy = \frac{dz\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$.

Or de $z = 2\sqrt{ay} - a = 2\sqrt{a}\sqrt{y} - a$, je tire $\frac{z}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{a}$, & $\frac{z}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y}$, ou enfin $\frac{z+a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y}$, & $\frac{z+a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$.

Substituant donc ces valeurs dans $dx = \frac{dy \times \sqrt{y-\sqrt{a}}}{\sqrt{2\sqrt{ay}-a}}$, j'ai $dx = \frac{dz \times \sqrt{z+a} \times \sqrt{z-a}}{4a\sqrt{az}}$, $= \frac{dz \times z^2 - a^2}{4a\sqrt{az}}$, d'où je tire $4adx\sqrt{a} = \frac{dz \times z^2 - a^2}{\sqrt{z}} = z^{\frac{3}{2}}dz - a^2z^{-\frac{1}{2}}dz$; & tirant l'integrale, j'ai $4ax\sqrt{a} = \frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}} - 2a^2z^{\frac{1}{2}}$ ou $2ax\sqrt{a} = \frac{z^2 - 5a^2 \times \sqrt{z}}{5}$.

Or $z^2 = 4ay - 4a\sqrt{ay} + a^2$, & $\sqrt{z} = \sqrt{2\sqrt{ay} - a}$; mettant donc ces valeurs dans l'integrale que je viens de trouver, laquelle je multiplie auparavant par 5; j'ai $10ax\sqrt{a} = 4ay - 4a\sqrt{ay} - 4a^2 \times \sqrt{2\sqrt{ay} - a}$, ou $5ax\sqrt{a} = 2ay - 2a\sqrt{ay} - 2a^2 \times \sqrt{2\sqrt{ay} - a}$, d'où je tire $5ax = 2y - 2\sqrt{ay} - 2a \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - a^2}$, & c'est l'équation de la courbe qu'on demande.

Pour construire cette courbe je suppose $x=0$, donc $2y - 2\sqrt{ay} - 2a \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - a^2} = 0$, & divisant par $\sqrt{2a\sqrt{ay} - a^2}$, j'ai $2y - 2\sqrt{ay} - 2a = 0$; donc $y - \sqrt{ay} = a$, ou $y - \sqrt{a}\sqrt{y} = a$,
Y y

& ajoutant le quarré $\frac{1}{4}a$ de la moitié $\frac{1}{2}\sqrt{a}$ du coefficient du second terme, j'ai $y - \sqrt{ay} + \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$; & tirant la racine quarrée j'ai $\sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}a}$, d'où je tire $\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{5a}$, & élevant tout au quarré j'ai $y = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$, ce qui me fait voir que quand l'abscisse x est égale à zero, l'ordonnée AB est $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$.

Je suppose $y = 0$, ce qui donne $5ax = -2a\sqrt{a^3} = -2a^2$, & $x = -\frac{2a^2}{5a} = -\frac{2}{5}a$, ce qui fait voir que quand $y = 0$ l'abscisse x est négative, & que par conséquent il faut prolonger l'axe HA du côté de A & faire $AZ = \frac{2}{5}a$.

Pour trouver les autres points de la courbe, je fais $a = 1$, & ensuite je fais successivement $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, &c. $y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, &c. & mettant successivement ces valeurs dans l'équation, je détermine les x correspondans à ces divers y , en suivant les regles ordinaires, &c.

PROPOSITION CXLII.

421. Trouver qu'elle est la courbe le long de laquelle un corps mis d'un mouvement accéléré, doit descendre, en sorte que ses pressions sur tous les points de la courbe soient à une puissance ou une racine des hauteurs PM (Fig. 143.) correspondantes à ces points, comme la pesanteur totale MN est à la même puissance ou racine de cette pesanteur, ou ce qui est la même chose, que les pressions soient entr'elles comme des puissances ou racines des hauteurs PM.

SOLUTION.

Nommant les mêmes grandeurs des mêmes lettres que dans la Proposition précédente, z la pression au point M, & n l'exposant de la puissance ou de la racine de PM, nous avons par la supposition $z, \overline{PM} :: MN, \overline{MN}$, ou $z, y^n :: a, a^n$; d'où je tire $z = \frac{y^n}{a^n} = \frac{y^n}{a^{n-1}}$; or par la Proposition précédente nous avons $z = \frac{MN \times 2PM}{MC} + MO = \frac{2ayddx + a dydz}{aydu}$ donc $\frac{2ayddx + a^2ddv}{aydu} = \frac{y^n}{a^n}$; & multipliant tout par $dydu$, puis divisant par $2\sqrt{y}$ pour les raisons que nous avons dites dans la Proposition précédente, puis tirant l'intégrale, ensuite multipliant par $2n+1 \times a^n$, & élevant tout au quarré, puis mettant au lieu de du sa valeur $dx^2 + dy^2$, puis

retranchant de part & d'autre $y^{2n}dx^2$, puis tirant la racine quarrée, & enfin divisant, j'ai une dernière équation qu'on voit ici, & qui est l'équation de la courbe cherchée.

Maintenant supposant $n = 1$, nous aurons $dx =$

$\frac{ydy}{\sqrt{ga^2 - y^2}}$, & tirant l'intégrale nous aurons $x = -$

$\sqrt{ga^2 - y^2}$; or pour voir si l'intégrale est complète,

je fais $y = 0$, selon les loix

du Calcul Integral, & il

reste $\sqrt{ga^2} = 3a$, ainsi x

$= 3a - \sqrt{ga^2 - y^2}$ est l'intégrale complète, d'où je

tire $3a - x = \sqrt{ga^2 - y^2}$,

& quarrant chaque mem-

bre, j'ai $ga^2 - 6ax + xx = ga^2 - y^2$, ou $y^2 = 6ax - xx$.

Or cette équation est l'équation d'un cercle ABCD (Fig. 142),

dont le diamètre est $6a$, car nommant $PD = x$ on a $PB = 6a$

$- x$, & $PB \times PD = 6ax - xx = \overline{PM}^2 = y^2$, donc quand les

pressions sont entr'elles comme les hauteurs PM la courbe de-

mandée est un cercle.

Si le corps commence à descendre de l'extrémité D du dia-

mètre BD parallèle à l'horison, les pressions sont comme les si-

nus droits PM des arcs parcourus, puisque ces sinus sont les hau-

teurs; mais si le corps commence à descendre de l'extrémité A

du diamètre perpendiculaire à l'horison, les pressions seront com-

me les sinus versés AQ des arcs parcourus AO .

De même supposons $n = \frac{1}{2}$, nous aurons $dx = \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{4a - y}}$, donc

$dx^2 = \frac{ydy^2}{4a - y}$, & $dx^2 + dy^2 = du^2 = \frac{ydy^2}{4a - y} + dy^2 = \frac{ydy^2 + 4ady^2 - ydy^2}{4a - y}$

$= \frac{4ady^2}{4a - y}$, & tirant la racine quarrée, j'ai $du = \frac{2dy\sqrt{a}}{\sqrt{4a - y}}$, & multi-

pliant le numérateur & le dénominateur du second membre par

Y y ij

$$\frac{2y ddx + dy dx}{dy du} = \frac{y^2}{a^2} = y^n a^{-n}$$

$$2y ddx + dy dx = y^n a^{-n} dy du$$

$$\frac{2y ddx + dy dx}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} y^{n-\frac{1}{2}} a^{-n} dy du$$

$$dx \sqrt{y} = \frac{y^{n+\frac{1}{2}} du}{2n+1 \times a^n} = \frac{y^n du \sqrt{y}}{2n+1 \times a^n}$$

$$\frac{dx \sqrt{y}}{2n+1 \times a^n} = y^n du$$

$$\frac{dx \sqrt{y}}{2n+1 \times a^n} dx^2 = y^{2n} du^2$$

$$\frac{dx \sqrt{y}}{2n+1 \times a^n} dx^2 = y^{2n} dx^2 + y^{2n} dy^2$$

$$\frac{dx \sqrt{y}}{2n+1 \times a^n} dx^2 - y^{2n} dx^2 = y^{2n} dy^2$$

$$dx \times \sqrt{2n+1 \times a^{2n}} - y^{2n} = y^n dy$$

$$dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{2n+1 \times a^{2n} - y^{2n}}}$$

\sqrt{a} , j'ai $du = \frac{2ady}{\sqrt{4a^2 - ay}}$ dont l'intégrale est $u = -4\sqrt{4a^2 - ay}$.

Pour voir si cette intégrale est complète, je suppose $y = 0$, & il reste $4\sqrt{4a^2} = 8a$; donc $u = 8a - 4\sqrt{4a^2 - ay}$ est l'intégrale complète.

Pour construire cette courbe, je décris un demi-cercle autour d'un diamètre $AB = 4a$ (Fig. 144.), je nomme l'abscisse $AC = y$, donc $CB = 4a - y$, & $\overline{CB} = 16a^2 - 8ay + y^2$, & $\overline{CP} = AC \times CB = 4ay - y^2$.

Je mene la corde BP , & par la propriété du cercle, j'ai $CB, BP :: BP, BA$; donc $\overline{BP} = CB \times BA = 16a^2 - 4ay$; donc $BP = \sqrt{16a^2 - 4ay} = 2\sqrt{4a^2 - ay}$, & $2BP = 4\sqrt{4a^2 - ay}$. Si je décris donc une demi-cycloïde RMB , j'aurai l'arc $MB = 4\sqrt{4a^2 - ay}$; car par la propriété de cette courbe, on a $MB = 2BP$; or $2AB = 8a$, & par la propriété de la cycloïde l'arc $BMR = 2AB$, donc $BMR = 8a$, & par conséquent $BMR - BM = 8a - 4\sqrt{4a^2 - ay} = u$, c'est à-dire $MR = u$.

Donc si les pressions du corps sont comme les racines quadrées des hauteurs, la courbe demandée est une cycloïde.

Puisqu'en nommant le diamètre $AB = 4a$, l'ordonnée $SM = y$,

& l'abscisse $SR = x$, nous avons $dx = \frac{\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{4a^2 - y}}$ pour l'équation de la courbe qui est en ce cas une cycloïde, il s'ensuit qu'en

nommant le diamètre $AB = a$, nous aurons $dx = \frac{\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{a^2 - y}}$
 $= \frac{ydy}{\sqrt{ay - yy}}$ pour l'équation de la cycloïde; or l'élément de cette cycloïde est $SMms = ydx$, & mettant la valeur de dx , cet élément est $\frac{y^2dy}{\sqrt{ay - yy}}$, & par conséquent l'intégrale ou l'aire de la cycloïde est $\int \frac{y^2dy}{\sqrt{ay - yy}}$, ce qui peut servir pour trouver les intégrales des expressions semblables à $\frac{y^2dy}{\sqrt{ay - yy^2}}$.

CHAPITRE XIII.

De la Résistance du Milieu à travers lequel les Corps en mouvement passent.

422. **T**OUT le monde est convaincu que le Corps étant de lui-même indifférent au mouvement & au repos, & par conséquent incapable de se procurer l'un ou l'autre, il doit nécessairement rester en repos si nulle cause ne le meut, & continuer de se mouvoir s'il a reçu du mouvement, à moins que quelque cause étrangère ne l'oblige de repasser dans l'état du repos. Or nous éprouvons tous les jours que les corps qui se meuvent dans l'air ou dans les autres fluides, perdent peu à peu de leur mouvement; donc il faut que l'air & les autres fluides ayent une résistance qui s'oppose à ce mouvement. C'est donc de cette résistance dont nous allons parler dans ce Chapitre, & je n'ai différé jusqu'ici de traiter cette matière, qu'afin que l'on jugeât mieux de ce qui appartient au mouvement des corps pris en lui-même & de l'altération que la résistance du milieu peut lui causer. Mais comme l'objet de cette première partie que j'enseigne dans ce premier Livre ne comprend que les corps qui se meuvent dans l'air, je ne parlerai aussi que de la résistance de l'air, me réservant à parler de la résistance des autres fluides dans les Livres suivans.

Wallis célèbre Anglois est le premier qui a entrepris de réduire au Calcul la résistance de l'air au mouvement des corps. Avant lui on ne s'imaginoit point qu'on pût soumettre à la Géométrie une matière qui dépend plus de l'expérience que de la raison, mais après tout on avoit tort, & rien n'empêche de raisonner aussi géométriquement sur une hypothèse qu'on le feroit sur le principe le plus assuré. Or entre grand nombre d'hypothèses qu'on peut faire sur ce sujet, l'Auteur en a choisi deux qu'il a cru pouvoir être admises également; la première est que *les Résistances de l'air à la fin de chaque instant, sont comme les vitesses*, & la raison qu'il en donne est que si la vitesse est double d'une autre dans un même-tems, elle doit aussi surmonter une double masse d'air; si elle est triple, elle doit surmonter une triple masse,

&c. La seconde hypotèse est que les Résistances de l'air sont comme les quarrés des vitesses, à cause que l'air étant un fluide, une double masse d'air qu'un corps est obligé de vaincre a une double résistance, & que par conséquent l'obstacle que le corps trouve est quadruple ; qu'une triple masse a une triple résistance, & que par conséquent le corps trouve un obstacle noncuple, & ainsi des autres. L'Auteur semble donner la préférence à la première de ces hypotèses, mais M. Newton & la plupart des Geometres après lui ont embrassé la seconde par la raison que les fluides choquent ou résistent dans la raison des quarrés des vitesses, comme il sera expliqué dans les Livres suivans. Nous allons examiner l'une & l'autre dans ce Chapitre en l'appliquant d'abord au mouvement uniforme, & ensuite au mouvement accéléré.

PROPOSITION CXLIII.

423. La vitesse d'un corps qui se meut uniformement étant connue, connoître la courbe dont les ordonnées expriment les vitesses que la résistance de l'air fait perdre au corps à chaque instant, en supposant les résistances proportionnelles aux vitesses restantes.

SOLUTION.

Supposons que AB (Fig. 145.) représente la vitesse uniforme du corps, que les droites AP, PE, EC, &c. représentent des tems égaux du mouvement, en sorte que les droites AP, AE, AC, &c. soient les tems arithmetiquement proportionnels, à commencer toujours depuis le premier instant du mouvement ; enfin soit la courbe ANFO dont les ordonnées PN, EF, CO, &c. représentent les vitesses totales perdues à la fin de chaque instant par les résistances, il est clair que les droites NM, FG, OD, &c. seront les vitesses restantes à la fin de chaque instant.

Nommons maintenant $AB = a$, la vitesse PN perdue à la fin du premier instant $= X$, la vitesse EF perdue à la fin du second $= x$, la vitesse NM qui reste à la fin du premier instant $= V$, la vitesse FG qui reste à la fin du second $= u$; je mène les ordonnées infiniment proches pm , eg , & les perpendiculaires NR, nr , FH, fh , & il est visible que les différences Rn , Hf , des vitesses perdues sont égales aux différences Nr , Fh , des vitesses restantes ; donc $dX = -dV$, & $dx = -du$; je mets

— dX , — du , parce qu'il est clair que les vitesses restantes vont en diminuant, au lieu que les vitesses perdues vont en augmentant.

Si je divise les différences — dV , — du , par elles-mêmes, ou par des grandeurs Z, z qui soient entr'elles comme ces différences, les quotients — $\frac{dV}{Z}$, — $\frac{du}{z}$ seront des grandeurs constantes & égales entr'elles, ce qui est trop évident pour avoir besoin de Demonstration. De même, les différences Pp , Ee , des tems étant égales entr'elles selon la supposition, sont des grandeurs constantes, & si je les divise par une même grandeur a , les quotients seront des grandeurs constantes & égales; appelant donc $AP = Y$, $AF = y$, j'ai $\frac{dY}{a} = \frac{dy}{a}$; donc $\frac{dY}{a}$, — $\frac{dV}{Z}$:: $\frac{dy}{a}$, — $\frac{du}{z}$.

Par l'hypothèse, les résistances de l'air sont comme les vitesses restantes, c'est-à-dire, les vitesses Rn , Hf , perdues pendant les petits instans Pp , Ee , sont comme les vitesses NM , FG , restantes au commencement de ces instans; mais par la construction les grandeurs Z, z , sont en même raison que les vitesses restantes NM , FG ; donc $Z, z :: V, u$; supposant donc $Z = V$, & $z = u$, & mettant ces valeurs dans la proportion $\frac{dY}{a} = \frac{dV}{Z}$:: $\frac{dy}{a} = \frac{du}{u}$, nous aurons $\frac{dY}{a} = \frac{dV}{V} :: \frac{dy}{a} = \frac{du}{u}$, d'où je tire dY , — $\frac{adV}{V} :: dy$, — $\frac{adu}{u}$, ou dY , — $\frac{adV}{Z} :: dy$, — $\frac{adu}{z}$, ou bien VdY , — $adV :: udy$, — adu , & divisant la premiere raison par — dV , & la seconde par — du , j'ai — $\frac{VdY}{dV}$, $a :: -\frac{udy}{du}$, a , & par conséquent — $\frac{VdY}{dV} = -\frac{udy}{du}$, ou $\frac{VdY}{dV} = \frac{udy}{du}$.

Or si au point N je tire la tangente NT , les triangles semblables nrN , TMN , donnent — Nr , $rn :: NM$, MT ; donc — $dV, dY :: V, -\frac{VdY}{dV}$, & par la même raison si je mene en F la tangente FS , je trouverai $GS = \frac{udy}{du}$; donc la courbe AND dont les ordonnées AB , NM , FG , &c. marquent les vitesses restantes à chaque moment, est de telle nature que ses soutangentes MT , GS , &c. à tous les points sont toutes égales entr'elles, & a une grandeur constante a ; & par conséquent cette courbe est une *Logarithmique*, ainsi que nous l'avons fait voir dans le Calcul Differential & Integral.

COROLLAIRE I.

424. Les vitesses AB, NM, FG, &c. étant les ordonnées de la logarithmique dont les abscisses BM, BG, &c. sont en progression arithmétique, elles sont par conséquent en progression géométrique par la propriété de cette courbe; d'où il suit que les vitesses du corps au commencement des instans égaux BM, MG, GD, &c. sont en progression géométrique.

COROLLAIRE II.

425. Les ordonnées de la logarithmique étant en progression géométrique, leur différences sont aussi en progression géométrique, comme il est aisé de le prouver; donc les vitesses perdues à la fin des tems égaux sont en progression géométrique, c'est-à-dire, que si les tems AP, PE, EC, &c. sont égaux, les vitesses PN, ZF, &c. perdues à la fin de ces tems sont en progression géométrique, & par conséquent comme les vitesses restantes au commencement de ces tems.

COROLLAIRE III.

426. Les espaces parcourus pendant les petits tems égaux sont comme les vitesses perdues à la fin de ces tems, & les espaces parcourus à la fin des tems 1, 2, 3, 4, &c. à compter toujours depuis le premier, sont aussi entr'eux comme les vitesses perdues à la fin de ces tems.

Je nomme S l'espace parcouru pendant le tems AP, & s l'espace parcouru pendant le tems AE; donc l'espace parcouru pendant le petit tems Pp sera dS, & l'espace parcouru pendant le petit tems Ee sera ds; or les espaces dS, ds, sont comme les produits des tems Pp, Ee, par les vitesses NM, FG; donc $dS, ds :: VdY, udy$, mais $VdY, -adV :: ndy, -adu$; donc $dS, ds :: -adV, -adu$; or $-dV = dX$, & $-du = dx$; donc $dS, ds :: adX, adx :: dX, dx$; c'est-à-dire les espaces parcourus pendant les petits tems égaux Pp, Ee, sont entr'eux comme les vitesses Rn, Hf, perdues pendant ces petits tems.

Puisque $dS, ds :: dX, dx$; donc en tirant l'intégrale, nous avons $S, s :: X, x$, c'est-à-dire, les espaces parcourus pendant les tems AP, AE, sont comme les vitesses PN, FP perdues à la fin de ces tems.

COROLLAIRE

COROLLAIRE IV.

427. Les espaces qui restent à parcourir pendant des petits tems égaux Pp , Ee , sont entr'eux comme les vitesses restantes NM , FG , & les espaces totaux qui restent à parcourir à la fin des tems AP , AE , sont aussi comme les vitesses restantes.

Je nomme H l'espace total qui reste à parcourir après le tems AP & h , l'espace total qui reste à parcourir après le tems AE ; donc dH sera l'espace qui reste à parcourir pendant le petit tems Pp , & dh celui qui reste à parcourir pendant le petit tems Ee ; or les espaces dH , dh , sont entr'eux comme les produits des vitesses NM , FG , par les tems dY , dy ; donc dH , $dh :: VdY$, udy , mais VDY , — $adV :: udy$, — adu ; donc dH , $dh :: -adV$, — $adu :: -dV$, — du , mais — dV , — $du :: V$, u , donc dH , $dh :: V$, u .

De même, dH , $dh :: -dV$, — du ; donc tirant l'intégrale, j'ai H , $h :: V$, u .

COROLLAIRE V.

428. Si les espaces totaux qui restent à parcourir après les tems AP , AE , &c. sont entr'eux comme des nombres, les tems employés aux espaces déjà parcourus sont comme les logarithmes des espaces à parcourir.

Les espaces totaux qui restent à parcourir sont comme les ordonnées NM , FG , de la logarithmique, & les tems AP , AE , ou BM , BG , sont comme les abscisses, mais dans la logarithmique, les abscisses sont les logarithmes des ordonnées, donc, &c.

COROLLAIRE VI.

429. La vitesse totale AB ne s'éteint entièrement qu'après un tems infini, car la droite BS étant l'asymptote de la logarithmique, les ordonnées NM , FG , &c. iront toujours en diminuant, & ce ne sera qu'à l'infini que l'ordonnée sera égale à zero; donc ce ne sera aussi qu'à l'infini que la vitesse perdue CO sera égale à la vitesse AB ; donc, &c.

REMARQUE.

430. L'expérience est constamment contraire à ce dernier Corollaire, mais on doit dire qu'à la fin d'un certain tems les

vitesse restantes sont si petites que le mouvement ne nous est plus sensible, quoiqu'il subsiste toujours. Au reste, l'autre hypothèse que nous examinerons bientôt & que M. Newton a suivie préférentiellement à celle-ci, est sujette au même inconvénient, & l'on doit y répondre de la même façon.

COROLLAIRE. VII.

431. Si l'on prolonge SB en d , & qu'ayant décrit avec les asymptotes AB , Bd , une hyperbole équilatère abc , on mène des points N , F , &c. des droites Nb , Fc , &c. parallèles à Sd , les droites BA , BQ , BT , &c. seront en progression géométrique; car elles seront égales aux ordonnées BA , MN , GF , &c. de la logarithmique, lesquelles sont en progression géométrique à cause que leurs abscisses BM , BG , &c. sont en progression arithmétique, car c'est-là une des propriétés de la logarithmique.

Or les différences AQ , QT , &c. des droites BA , BQ , BT , étant aussi en progression géométrique, les espaces hyperboliques $AabQ$, $QbcT$, &c. seront égaux entr'eux selon la propriété de l'hyperbole; ainsi concevant que les tems AP , PE , &c. soient infiniment proches, l'espace hyperbolique $AabcdB$ sera rempli d'autant de petits espaces tous égaux, qu'il y aura de petits tems égaux dans AC , ainsi ces espaces pourront représenter les tems; par exemple, le tems pendant lequel la vitesse PN s'est perdue pourra être représenté par l'espace hyperbolique $AabQ$, & ainsi des autres, parce que cet espace contient autant de petits espaces que la droite AP contient de petits tems.

PROPOSITION CXLIV.

432. La vitesse uniforme d'un corps étant connue, trouver une courbe qui exprime les vitesses que la résistance de l'air fait perdre à chaque instant, & les vitesses restantes en supposant que les résistances sont entr'elles comme les quarrés des vitesses restantes.

Soit la vitesse donnée $AB = a$ (Fig. 146.), & supposons que les droites AP , PE , &c. expriment des tems égaux, les droites PN , EF , &c. les vitesses perdues à la fin des tems AP , AE , &c. arithmétiquement proportionnels, les droites NM , FG , &c. les vitesses restantes.

Nommons le tems $AP = Y$, le tems $AE = y$, la vitesse perdue $PN = X$, la vitesse perdue $EF = x$, la vitesse restante

NM = V, & la vitesse restante FG = u; donc Pp = dY, Ee = dy, Rn = dX, Hf = dx, Nr = -dV, & Fh = -du; & il est visible que dX = -dV, & dx = -du.

Si je divise les différences -dV, -du, par des grandeurs Z, z, qui leur soient égales, ou qui soient en même raison qu'elles, les quotients $-\frac{dV}{Z}$, $-\frac{du}{z}$ seront des quantités constantes & égales entr'elles; de même les différences dY, dy, étant égales entr'elles, si je les divise par a, les quotients $\frac{dY}{a}$, $\frac{dy}{a}$, seront encore égaux entr'eux; donc $-\frac{dV}{Z}$, $\frac{dY}{a} :: -\frac{du}{z}$, $\frac{dy}{a}$, d'où je tire -adV, dYZ :: -adu, dyz.

Or par la supposition les résistances sont comme les quarrés des vitesses, c'est-à-dire, les vitesses Rn, Hf, perdues à la fin des instans Pp, Ee, sont comme les quarrés des vitesses NM, EG, au commencement de ces instans; ainsi supposant que les grandeurs Z, z, soient égales aux vitesses perdues Rn, Hf, nous aurons Z, z :: V², u² :: $\frac{V^2}{a}$, $\frac{u^2}{a}$, & mettant ces valeurs de Z, z, dans l'équation précédente, nous aurons -adV, $\frac{V^2 dY}{a} :: -adu$, $\frac{u^2 dy}{a}$, ou $-\frac{aV}{V^2}$, $\frac{dY}{a^2} :: -\frac{du}{u^2}$, $\frac{dy}{a^2}$; mais à cause de dY = dy, les deux conséquents sont égaux entr'eux; donc les deux antécédens le sont aussi; de plus, les deux conséquents sont deux tems égaux dY, dy, divisés par une même grandeur, & deux tems égaux peuvent s'exprimer par deux grandeurs quelconques égales entr'elles; donc nous pouvons faire $-\frac{dV}{V^2} = \frac{dY}{a^2}$, & $-\frac{du}{u^2} = \frac{dy}{a^2}$.

Prenons l'intégrale de la seconde de ces équations, & ce qui arrivera touchant celle-ci, se dira de même de l'autre, nous aurons donc $u^{-1} = \frac{y}{a^2}$, ou bien si l'on veut ajouter une grandeur constante b, ce que l'on peut faire, à cause que l'intégrale u⁻¹ peut n'être pas complete, nous aurons $\frac{1}{u} + b = \frac{y}{a^2}$; or au point B le tems est égal à zero, & la vitesse est = a; faisant donc y = 0 dans l'équation que nous venons de trouver, nous aurons $\frac{1}{a} + b = 0$, & b = - $\frac{1}{a}$; mettant donc cette valeur de b dans $\frac{1}{u} + b = \frac{y}{a^2}$, nous aurons $\frac{1}{u} - \frac{1}{a} = \frac{y}{a^2}$,
Z z ij

d'où je tire $\frac{a^2}{u}$, $-\frac{a^2}{u} = y$, & $a^2 - au = yu$, & $a^2 = yu + au$; nous avons donc par le point F de la courbe $a^2 = yu + au$, & pour le point N nous aurons aussi $a^2 = YV + aV$, & ainsi des autres.

Prenant donc $BO = AB = a$, nous aurons $OB + BG = OG = a + y$, & $OM = OB + BM = a + Y$; ainsi nous aurons $\overline{AB} = a^2 = OG \times GF = \overline{a + y} \times u = au + uy$, & $\overline{AB} = a^2 = OM \times MN = \overline{a + Y} \times V = aV + VY$, c'est-à-dire les rectangles $OM \times MN$, $OG \times GF$ sont égaux entr'eux & au carré de la droite AB ; or comme cela arrivera partout, il s'ensuit que la courbe demandée est une hyperbole entre ses asymptotes dont les y , c'est-à-dire les abscisses changeantes commencent au point B, & sont toutes augmentées d'une grandeur constante OB égale à la racine de la puissance \overline{AB} de l'hyperbole.

COROLLAIRE I.

433. La droite OG étant l'asymptote de l'hyperbole, l'ordonnée FG ne deviendra infiniment petite qu'à l'infini, & par conséquent la droite EF ne deviendra égale à AB qu'à l'infini, c'est-à-dire que la vitesse perdue ne sera égale à la vitesse totale qu'après un tems infini, & par conséquent le corps ne perdra jamais son mouvement, ce que l'on doit entendre d'un mouvement insensible; car l'expérience nous fait assez voir que le mouvement sensible se perd après un tems limité.

COROLLAIRE II.

434. Les vitesses restantes sont aux vitesses perdues comme la racine de la puissance de l'hyperbole, ou comme la vitesse primitive est aux tems correspondans exprimés par les abscisses.

L'équation de la courbe est $a^2 = au + uy$, donc $a^2 - au = uy$, d'où je tire $a, y :: u, a - u$, or u est la vitesse restante FG à la fin du tems BG , & $a - u = AB - FG = EG - FG = EF$ est la vitesse perdue à la fin du même tems, donc la vitesse restante est à la vitesse perdue comme a , ou comme la vitesse primitive AB est à y , ou au tems correspondant à ces vitesses; or la même chose arrivera par tout, donc, &c.

COROLLAIRE III.

435. Les espaces parcourus à la fin des tems BM, BG sont entr'eux comme les logarithmes des fractions qui ont pour numérateur la vitesse initiale AB, & pour dénominateur les vitesses restantes NM, FG, à la fin des mêmes tems.

Le mouvement pendant les petits tems Mm, Gg pouvant passer pour uniforme, les espaces parcourus pendant ces petits tems sont entr'eux comme les produits des vitesses par les tems, ainsi nommant S l'espace parcouru pendant le tems BM, & s l'espace parcouru pendant le tems BG, nous aurons $dS, ds :: VdY, udy$.

Or nous avons trouvé ci-dessus (N. 432) $\frac{dY}{a^2} = -\frac{dV}{V^2}$, donc $dY = -\frac{a^2 dV}{V^2}$, & par la même raison nous aurons $dy = -\frac{a^2 du}{u^2}$, mettant donc ces valeurs de dY & dy , nous aurons $dS, ds :: -\frac{a^2 dV}{V^2}, -\frac{a^2 du}{u^2}$, donc $S, s :: \int -\frac{a^2 dV}{V^2}, \int -\frac{a^2 du}{u^2} :: \int -\frac{adV}{V}, \int -\frac{adu}{u}$.

Je construis une hyperbole entre ses asymptotes (Fig. 147.) égale & semblable à l'hyperbole précédente; je prens AB, AC égales aux vitesses restantes; ainsi $AB = V$ & $AC = u$; or par la propriété de l'hyperbole j'ai $AB \times BE = aa$, ou $V \times BE = aa$, donc $BE = \frac{aa}{V}$; je mene l'ordonnée be infiniment proche de BE , ce qui donne $bB = dV$, & par conséquent $\frac{a^2 dV}{V}$ est l'élément de l'hyperbole, & $\int \frac{a^2 dV}{V}$ est l'espace hyperbolique BESXA, de même $\int \frac{a^2 du}{u}$ est l'espace hyperbolique CDSXA, je divise les deux espaces hyperboliques par a , ce qui donne $\int \frac{adV}{V}, \int \frac{adu}{u}$.

Je construis une logarithmique dans laquelle la grandeur H/ égale à l'unité, est égale à la racine de la puissance a^2 de l'hyperbole; & prenant le point H pour l'origine des abscisses, je prens les abscisses positives de H en A, & les négatives de H en X, & je prens deux abscisses négatives HM, HN, qui soient entr'elles comme $\int \frac{adV}{V}, \int \frac{adu}{u}$; ainsi j'ai $HM, HN :: \int -\frac{adV}{V}, \int -\frac{adu}{u} :: S, s$.

Or on sçait que les abscisses positives sont les logarithmes de

leurs ordonnées, de même que les négatives sont les logarithmes des ordonnées qui sont de leur côté, & que les ordonnées des logarithmes positifs sont comme des nombres entiers, au lieu que les ordonnées des logarithmes négatifs sont comme des fractions qui ont l'unité pour numérateur, & pour dénominateur les nombres des logarithmes positifs correspondans, d'où il suit que les nombres des logarithmes positifs sont reciproques aux nombres des logarithmes négatifs; donc il ne s'agit que de prouver que si les abscisses HM, HN avoient été prises de l'autre côté, c'est-à-dire, si elles étoient comme $\int \frac{a^2 dV}{V}$, $\int \frac{a^2 du}{u}$, leurs ordonnées seroient comme V, u, car dès-lors il s'ensuivra qu'en les prenant sur HX elles sont reciproques aux précédentes, c'est-à-dire :: u, V, ou comme $\frac{1}{V}$, $\frac{1}{u}$, ou enfin comme $\frac{a}{V}$, $\frac{a}{u}$, ainsi que nous avons entrepris de le prouver.

Si nous prenons les abscisses HM, HN du côté de HA, & que nous nommions la première X, & la seconde x, nous aurons $X = \int \frac{a dV}{V}$; donc $dX = \frac{a dV}{V}$, d'où je tire $\frac{V dX}{a} = 1$; or $\frac{V dX}{a}$ est l'expression de la sous-tangente selon les regles du Calcul Différentiel, & dans cette expression la grandeur V marque l'ordonnée, donc l'ordonnée de $\int \frac{a dV}{V}$ est V, & de la même façon on trouvera que l'ordonnée de $\int \frac{a du}{u}$ est u; donc si nous prenons HM, HN négatifs, c'est-à-dire $\int -\frac{a dV}{V}$, $\int -\frac{a du}{u}$, les ordonnées correspondantes seront $\frac{1}{V}$, $\frac{1}{u}$; mais nous avons trouvé S, s :: $\int -\frac{a dV}{V}$, $\int -\frac{a du}{u}$, donc les espaces S, s sont comme les logarithmes de $\frac{1}{V}$, $\frac{1}{u}$ ou de $\frac{a}{V}$, $\frac{a}{u}$ en faisant $a = 1$.

COROLLAIRE IV.

436. Les espaces parcourus pendant les tems BM, BG (Fig. 146.) sont entr'eux comme les espaces hyperboliques ABMN, ABGF.

Nommant S l'espace parcouru pendant le tems BM & s l'espace parcouru pendant le tems BG, nous aurons dS pour l'espace parcouru pendant le tems Mm, & ds pour l'espace parcouru pendant le tems Gg; or le mouvement pendant les tems Mm,

Gg pouvant être pris pour uniforme les espaces dS , ds sont comme les produits des tems par les vitesses, donc $dS, ds :: VdY, udy$, & par conséquent $S, s :: \int VdY, \int udy$, mais il est visible que les deux derniers termes sont les espaces hyperboliques ABMN, ABGF, donc, &c.

COROLLAIRE V.

437. Les espaces parcourus avec un mouvement uniforme & sans aucune résistance du côté de l'air, pendant les tems BM, BG sont aux espaces parcourus pendant les mêmes tems avec la résistance de l'air, comme les rectangles BP, BE sont aux espaces hyperboliques ABMN, ABGF.

Si l'air ne résistoit point, les espaces parcourus seroient comme les produits des tems par les vitesses (N. 17), donc ils seroient comme les rectangles BP, BE; or quand l'air, résiste les espaces parcourus sont comme ABMN, ABGF, donc, &c.

COROLLAIRE VI.

438. Si l'on décrit deux logarithmiques AON, KBR (Fig. 148.) dans chacune desquelles la droite AB égale à la vitesse primitive soit la grandeur prise pour l'unité, laquelle comme on sçait est toujours égale à la soutangente, & que la première ait pour asymptote la droite BC & l'autre la droite TS; je dis que si l'on mène une ordonnée HM à la logarithmique KBR, & que la partie PM de cette ordonnée exprime un tems, la partie OP de cette même ordonnée exprimera la vitesse restante à la fin de ce tems, & la partie HO la vitesse perdue.

Je nomme $OP = x$, $PM = y$, donc $HM = AB + PM = a - y$; l'abscisse BP de la logarithmique AN est négative parce que l'origine des abscisses étant en B ces abscisses sont prises du côté où les ordonnées vont en diminuant, ainsi nous l'appellerons $-x$, donc $Pp = -dx$ & $OQ = du$; je mène en O la tangente OC, & les triangles rectangles semblables OQo , OPC donnent $OQ, Qo :: PO, PC$, ou $du, -dx :: u, -\frac{udx}{du} = PC$ soutangente; or cette soutangente par la propriété de la logarithmique est égale à a , donc $a = -\frac{udx}{du}$, d'où je tire $\frac{dx}{a} = -\frac{du}{u}$.

Dans la logarithmique MBR l'abscisse AH est positive parce qu'elle est du côté où les ordonnées vont en augmentant & comme $AH = BP$, nous la nommerons $= x$, donc $Hh = dx$, &c.

$qm = dy$, parce qu'il est la différence de $HM = a + y$; ainsi menant la tangente M_2 les triangles rectangles semblables mqM , MH_2 donnent $dy, dx :: a + y, \frac{a + y \times dx}{dy} = \text{soutangente } H_2 = a$, d'où je tire $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{a + y}$; mais nous avons $\frac{dx}{a} = -\frac{du}{u}$, donc $-\frac{du}{u} = \frac{dy}{a + y}$.

Maintenant si ce que nous prétendons est vrai, il faut qu'en prenant la différence de l'équation $a^2 = yu + au$ laquelle exprime véritablement le rapport de y & u (N. 432.) nous retrouvions $-\frac{du}{u} = \frac{dy}{a + y}$; or la différence de $a^2 = yu + au$ est $0 = ydu + udy + adu$, d'où je tire $-adu - ydu = udy$, & divisant tout par $a + y$, j'ai $-du = \frac{udy}{a + y}$, & divisant encore par u , j'ai enfin $-\frac{du}{u} = \frac{dy}{a + y}$ de même que ci-dessus.

Donc puisque les deux logarithmiques me donnent la même équation que l'hyperbole (Fig. 146.) il s'ensuit que le rapport de y à u dans les deux logarithmiques, est le même que le rapport de y à u dans l'hyperbole, donc, &c.

COROLLAIRE VII.

439. Si les HM (infiniment proches) sont en progression géométrique, leurs abscisses AH seront en progression arithmétique; or les abscisses BP de la logarithmique AN étant égales aux HM seront aussi en progression arithmétique, donc les ordonnées OP seront en progression géométrique; mais les HM ou les $PM + PH$ marquent des tems augmentés d'une grandeur AB & qui vont en augmentant, & les OP les vitesses restantes lesquelles vont en diminuant, donc *les vitesses restantes décroissent en progression géométrique lorsque les tems augmentés de l'unité croissent dans la même progression.*

COROLLAIRE VIII.

440. Si l'on prend les tems BM, MG, GH (Fig. 149.) en progression géométrique, en sorte que BM soit infiniment petit, & l'exposant de la progression aussi infiniment petit, les espaces parcourus pendant les tems BM, MG, GH , &c. seront tous égaux.

Nous avons démontré (N. 436.) que les espaces parcourus pendant les tems BM, BG, BH sont comme les espaces hyperboliques

liques AM, AG, AH, & par conséquent les espaces parcourus pendant les tems BM, MG, GH, &c. seront comme les espaces AM, Mg, gH, &c. qui sont les différences des précédens & il ne reste plus qu'à faire voir que ces espaces sont égaux, ce que nous allons démontrer ici, quoique nous l'ayons déjà fait dans le Calcul Différentiel & Integral.

Supposons qu'on ait commencé à diviser OB en parties infiniment petites, en sorte que les abscisses O₁, O₂, O₃, &c. soient cependant en progression géométrique, & qu'on ait ensuite continué la progression, en sorte que OB, OM, OG, &c. soient dans la même progression, il est évident que les différences de toutes ces abscisses seront encore en progression géométrique, & que par conséquent les tems BM, MG, GH, &c. le seront aussi.

Nommons OM = X, & OG = x, dont la différence MG de OM sera dX, & la différence GH de OG sera = dx, & comme les abscisses étant en progression géométrique, leurs différences sont dans la même progression, nous aurons X, x :: dX, dx, donc Xdx = xdX, d'où je tire $\frac{dx}{x} = \frac{dX}{X}$.

Or par la nature de l'hyperbole OM × mM = aa, donc mMX = aa, & par conséquent mM = $\frac{aa}{X}$ & mM × GM = $\frac{aadx}{X}$ égal à l'élément mM Gg, de même OG × Gg = aa, donc Gg × x = aa, & Gg = $\frac{aa}{x}$, donc Gg × GH = $\frac{aadx}{x}$ égal à l'élément gGHh, ainsi les élémens mM Gg, gGHh, sont entr'eux comme $\frac{aadX}{X}$, $\frac{aadx}{x}$, ou comme $\frac{dX}{X}$, $\frac{dx}{x}$, mais nous venons de trouver $\frac{dX}{X} = \frac{dx}{x}$, donc l'élément mM Gg est égal à l'élément gGHh, & on prouvera la même chose des autres, donc, &c.

COROLLAIRE IX.

441. Les diminutions Nr, Fh (Fig. 146.) des vitesses pendant les tems infiniment petits Mm, Gg sont en raison composée des vitesses restantes NM, FG, & des espaces parcourus pendant ces petits tems.

Nous avons trouvé (N. 432.) $-adV$, $-adu :: \frac{V^2 dY}{a}$, $\frac{u^2 dy}{a}$, donc $-dV$, $-du :: \frac{V^2 dY}{a^2}$, $\frac{u^2 dy}{a^2} :: V^2 dY$, $u^2 dy :: V \times V dY$, $u \times u dy$; or nous avons aussi trouvé (N. 435.) dS , $ds :: V dY$,
A a a

$u dy$, donc $-dV$, $-du :: V \times dS$, $u \times ds$, donc, &c.

PROPOSITION CXLV.

442. Un corps grave A (Fig. 150.) descendant librement le long de la ligne AL, & supposant que l'air lui résiste dans la raison des vitesses restantes à la fin de chaque tems, trouver la courbe qui exprime les vitesses restantes & les vitesses perdues.

SOLUTION.

Concevons que la ligne AL soit divisée en une infinité de parties égales qui exprimeront les petits tems égaux qui composent le tems total, les abscisses de cette ligne, à commencer depuis A, seront en progression arithmétique, & représenteront des tems qui seront comme 1, 2, 3, 4, &c. Supposons que l'un de ces tems soit AP, j'éleve en P la perpendiculaire PM, que je fais égale à AP, & par conséquent égale à la vitesse acquise à la fin du tems AP si l'air ne résistait point; car dans le mouvement uniformément accéléré les vitesses acquises à la fin des tems sont comme les tems (N. 49). Par les points A, M, je mene la droite AMZ, & concevant que de tous les points de division de AL soient menées des parallèles à PM, ces parallèles seront entr'elles comme les abscisses AP, ou comme les tems 1, 2, 3, 4, &c. & par conséquent elles représenteront les vitesses acquises à la fin de ces tems.

Supposons que PN représente la vitesse perdue à la fin du tems AP par la résistance de l'air, la droite NM sera la vitesse restante, & la petite droite Rn sera la vitesse perdue à la fin des petits tems Pp; prenons PQ = NM, & faisant la même chose à l'égard de tous les NM correspondans à tous les AP nous aurons une courbe AQT qui sera la courbe des vitesses restantes à la fin des tems AP, de même que la courbe ANV est la courbe des vitesses perdues à la fin de ces mêmes tems; menons AB parallèle à PQ & d'une grandeur indéterminée; enfin par B concevons BC parallèle à AL.

Je nomme les abscisses AP = y , les ordonnées PQ égales aux NM = u , les vitesses perdues PN = x , donc Pp = Oo = RN = dy , Rn = dx , & PM = AP = y .

NM = PM - PN = $y - x$; mais NM = u , donc $u = y - x$, & $x = y - u$, donc $dx = dy - du$.

Si je divise tous les dx par des grandeurs z qui soient entr'elles

en même raison que les dx , les quotiens $\frac{dx}{z}$ seront tous égaux entr'eux ; de même tous les rm ou les dy étant égaux parce qu'ils représentent les vitesses acquises à la fin des petits tems égaux Pp , lesquelles vitesses sont égales dans le mouvement uniformement accéléré, si je les divise par une grandeur constante $a = AB$ les quotiens $\frac{dy}{a}$ seront égaux entr'eux ; donc tous les $\frac{dx}{z}$ seront entr'eux comme tous les $\frac{dy}{a}$, & comme tous les dy representent des tems égaux qui peuvent être exprimés par des lignes égales quelconques, nous pouvons supposer les $\frac{dx}{z}$ égaux aux $\frac{dy}{a}$, donc $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{a}$, d'où je tire $dx = \frac{zdy}{a}$, & mettant cette valeur de dx dans $dx = dy - du$, j'ai $\frac{zdy}{a} = dy - du$, d'où je tire $zdy = ady - adu$.

Or selon la supposition les resistances de l'air sont comme les vitesses restantes, c'est-à-dire les vitesses Rn ou dx perdues à la fin de chaque petit instant Pp , sont comme les vitesses NM ou PQ , ou u restantes aux commencemens de ces instans, & les z sont comme les dx , dont les z sont comme les u ; faisant donc $z = u$, & mettant cette valeur dans $zdy = ady - adu$, j'ai $udy = ady - adu$, d'où je tire $adu = ady - udy$, & $a = \frac{ady - udy}{du}$ qui est l'équation de la courbe AQT des vitesses restantes, à cause qu'elle contient le rapport des abscisses AP ou de leurs différences dy , & des ordonnées u ou de leurs différences du .

Je suppose $a - u = r$, donc $u = a - r$, $du = -dr$, & mettant cette valeur de $a - u$, & celle de du dans l'équation, j'ai $\frac{ady - udy}{du} = -\frac{r dy}{dr} = a$, d'où je tire $-dr, +dy :: r, a$, mais $OQ = OP - QP = BA - QR = a - u$, donc $OQ = r$, & la différence $HQ = -dr$, à cause que les OQ vont en diminuant ; or si je mène une tangente QC en Q les triangles semblables QqH , QCO donnent $HQ, Hq :: QO, OC$, donc $-dr, dy :: r, \frac{r dy}{-dr} = OC$, donc la sous-tangente de la courbe AHT est constante & égale à la grandeur $a = AB$, & par conséquent cette courbe est une logarithmique dont les ordonnées OQ sont égales aux différences de la sous-tangente AB & des vitesses restantes PQ .

Donc si l'on décrit avec une grandeur arbitraire AB une logarithmique dont AB soit l'unité, & BC l'asymptote, & que du

A a a ij

point A l'on mene AL parallèle à BC, les droites QP qui seront les prolongemens des ordonnées OQ de la logarithmique seront comme les vitesses restantes à la fin des tems exprimés par les abscisses BO ou AP; c'est pourquoi faisant en A l'angle LAZ demi-droit, puis prolongeant les OP en M, les PM représenteront les vitesses acquises à la fin des tems AP si l'air ne résistoit point, ainsi portant les QP sur les PM de M en N, les PN exprimeront les vitesses perdues à la fin des tems AP.

COROLLAIRE I.

443. Les vitesses restantes vont en augmentant, ce qui est visible par la seule construction, & la plus grande vitesse restante que le corps puisse avoir est exprimée par AB, car à cause que BC est l'asymptote de la logarithmique, ce ne sera qu'à l'infini que QP sera égal à BA.

COROLLAIRE II.

444. Les espaces parcourus à la fin des tems AP sont comme les vitesses perdues à la fin de ces tems.

Je nomme s les espaces; or le tems Pp étant infiniment petit le mouvement pendant ce tems pourra être regardé comme uniforme, donc l'espace parcouru pendant ce tems sera comme le produit de la vitesse PQ par le tems Pp (N. 17); & par conséquent $ds = udy$; or nous avons trouvé ci-dessus $udy = ady - adu$ (N. 442), donc $ds = ady - adu$, & $s = ay - au$, c'est-à-dire les espaces s parcourus pendant les tems AP sont comme les $ay - au$, ou comme les $y - u$; mais les $y - u$ sont les $PM - MN$, c'est-à-dire les PN ou les vitesses perdues, donc, &c.

COROLLAIRE III.

445. Les PM ou les BO étant pris arithmetiquement proportionnels sont les logarithmes des OQ par la propriété de la logarithmique; mais les OQ sont les complemens de vitesses restantes PQ à la plus grande vitesse restante BA que le corps puisse avoir; donc les tems PM sont les logarithmes des complemens des vitesses restantes à la plus grande que le corps puisse acquérir.

COROLLAIRE. IV.

446. Le corps ne parvient jamais à acquérir la plus grande vitesse qu'il puisse acquérir : car pour cela il faudroit que QP devint égal à AB, & que par conséquent la logarithmique rencontrât son asymptote ; or comme cela n'arrive que lorsque son asymptote est infinie, le corps ne peut parvenir à acquérir sa plus grande vitesse que lorsque le tems représenté par l'asymptote sera infini, d'où il suit qu'il ne l'acquerra jamais.

COROLLAIRE V.

447. Les tems AP étant en progression arithmétique ascendante, les différences HO de la plus grande vitesse AB aux vitesses restantes QP sont en progression géométrique descendante, ce qui n'a pas besoin de démonstration après ce que nous venons de dire.

COROLLAIRE VI.

448. Si le mouvement du corps duroit pendant un tems infini ; l'espace parcouru à la fin de ce tems seroit infini, car il seroit comme PN (N. 444.) lequel seroit infini, à cause que les PN vont en augmentant, & que l'abscisse AP seroit infinie, mais la vitesse acquise à la fin de ce tems seroit finie, car elle seroit comme BA.

COROLLAIRE VII.

449. Si avec un parametre égal à $2BA$ on décrit une demi-parabole dont le diametre soit aK ; l'espace parcouru à la fin du tems AP en supposant la résistance de l'air, est à l'espace que le corps auroit parcouru si l'air ne résistoit point, comme l'ordonnée PN de la courbe ANV est à l'ordonnée extérieure PE à la parabole.

Les espaces parcourus à la fin des tems AP en supposant la résistance de l'air, sont comme les PN (N. 444), or sans cette résistance les espaces seroient comme les quarrés des PM ou des AP (N. 55) & par la propriété de la parabole les ordonnées extérieures PE sont aussi comme les quarrés des AP, donc, &c.

COROLLAIRE VIII.

450. Si entre les asymptotes BR, BS l'on décrit une hyper-

bole équilatère NaO (Fig. 151.) dont la racine de la puissance $Aa = AB$ (Fig. 150.) exprime la plus grande vitesse que le corps peut acquérir en descendant librement, & en supposant la résistance de l'air, & que l'on porte sur AB (Fig. 151.) de A vers B les vitesses restantes à la fin des tems arithmétiquement proportionnels, à commencer toujours au point A , les AP représenteront les vitesses restantes, & les BP représenteront les différences de la plus grande vitesse aux vitesses restantes, c'est-à-dire, les ordonnées de la logarithmique dont nous avons parlé dans les Corollaires précédens; or je dis que si de tous les points P , qui sont les extrémités des vitesses restantes, on mène les droites PM parallèles à Aa , & que du point A menant la droite aQ , parallèle à AB , on suppose que le rectangle AQ représente la plus grande vitesse, les rectangles AM représenteront les vitesses restantes à la fin des tems, & les trilignes hyperboliques NMA représenteront les espaces parcourus à la fin de ces tems.

En premier lieu les AP sont à AB comme les vitesses restantes à la fin des tems, sont à la plus grande vitesse par la supposition; multipliant donc les AP par Aa & la plus grande vitesse AB par Aa , nous aurons les $AP \times Aa$ sont à $AB \times Aa$, comme les vitesses restantes à la plus grande vitesse; ainsi les rectangles AM représenteront les vitesses restantes.

En second lieu les espaces parcourus à la fin des tems sont comme les $y - u$ (N. 444), c'est-à-dire comme les tems moins les vitesses restantes; or les tems sont les logarithmes des BP ou des ordonnées de la logarithmique dont nous avons parlé dans les Corollaires précédens (N. 445), donc par la propriété de l'hyperbole les tems sont comme les espaces hyperboliques $PNaA$, ainsi qu'il a été prouvé dans le Calcul Différentiel & Integral, & que nous l'allons bientôt prouver d'une autre façon, puis donc que les espaces sont comme les $y - u$, ou comme les tems moins les vitesses restantes, & que les tems sont comme les $PNaA$, & les vitesses restantes comme les $PNaA$, les espaces sont par conséquent comme les $PNaA$ moins les $PNaA$, c'est-à-dire, comme les trilignes NMa .

Pour prouver que les tems sont comme les $PNaA$, nommons $AB = Aa = a$, $AP = u$ les tems y ; il est visible que a^2 , $au :: a, u$, c'est-à-dire le rectangle AQ est à chaque rectangle AM comme AB est à AP .

De même, ayant trouvé ci-dessus $a = \frac{ady - udy}{du}$ (N. 442.), nous avons $dy = \frac{adu}{a-u}$, & multipliant tout par a , nous aurons $ady = \frac{a^2 du}{a-u}$; or par la propriété de l'hyperbole nous avons $BP \times PN = BA \times Aa$, mais $BP = a - u$; donc $\frac{a^2}{a-u} \times PN = aa$, d'où je tire $PN = \frac{aa}{a-u}$, mais $Pp = du$; donc $PN \times Pp = \frac{a^2 du}{a-u} =$ à l'élément de l'aire $PNaA$; or nous avons $ady = \frac{a^2 du}{a-u}$; donc $ay = \int \frac{a^2 du}{a-u}$, c'est-à-dire, les tems y multipliés par a ou AB , sont égaux aux $\int \frac{a^2 du}{a-u}$, ou aux aires $PNaA$; mais les tems y multipliés par la grandeur constante a , sont entr'eux comme les tems y ; donc les tems y sont comme les espaces hyperboliques $PNaA$.

PROPOSITION CXLVI.

451. *Un corps descendant librement vers le centre de la terre, & supposant que les résistances de l'air à chaque instant soient comme les quarrés des vitesses, trouver la courbe qui exprime les vitesses restantes & les vitesses perdues.*

SOLUTION.

Soit AZ (Fig. 152.) la ligne des tems AP que nous prendrons arithmetiquement proportionnels, j'éleve en P la perpendiculaire PM que je fais égale à AP , & menant la droite AMX , tous les PM représenteront les vitesses que le corps auroit acquises à la fin des tems AP si l'air ne lui résistait pas. Prenons les PN pour représenter les vitesses perdues à la fin des tems AP ; la courbe ANY fera la courbe des vitesses perdues, & les NM représenteront les vitesses restantes; prenons les QP égaux aux NM , & la courbe AQV sera la courbe des vitesses restantes. Elevons AB perpendiculairement à AZ , & faisant AB d'une grandeur indéterminée, concevons BT parallèle à AZ .

Je nomme $AB = a$, $AP = PM = y$, $PN = x$, $NM = y - x = u$; donc $Pp = dy$, $Rn = dx$, & à cause de $x = y - u$, j'ai $dx = dy - du$.

Si je divise les vitesses perdues dx à la fin de chaque instant par des grandeurs z qui soient entr'elles comme ces vitesses, les

quotients $\frac{dx}{z}$ seront des grandeurs constantes & égales entr'elles. De même les dy , c'est-à-dire les rm qui sont les différences des vitesses acquises à la fin des instans si l'air ne résistait pas étant égaux entr'eux si je les divise par la grandeur constante a les quotients $\frac{dy}{a}$ seront aussi égaux entr'eux, d'où je tire $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{a}$ par les raisons apportées dans les propositions précédentes, & par conséquent $dx = \frac{zdy}{a}$, & mettant cette valeur de dx dans $dx = dy - du$, j'ai $\frac{zdy}{a} = dy - du$, donc $zdy = a dy - a du$.

Or par l'hypothèse les résistances sont comme les quarrés des vitesses, c'est-à-dire les vitesses perdues Rn ou dx à la fin des instans Pp sont comme les quarrés des vitesses restantes NM , ou PQ au commencement de ces instans; donc les résistances sont comme les u^2 ; or les z sont comme les dx , & les dx comme les u^2 ; donc les z sont comme les u^2 , ou comme les $\frac{u^2}{a}$, & supposant les z égaux aux $\frac{u^2}{a}$, & mettant cette valeur dans l'équation précédente, j'ai $a dy - a du = \frac{u^2 dy}{a}$, ou $a^2 dy - u^2 dy = a^2 du$, donc $dy = \frac{a^2 du}{a^2 - u^2}$, & c'est l'équation de la courbe AQV des vitesses restantes à la fin des AP .

Pour trouver la construction de cette courbe, je prends l'indéterminée t , & je suppose $u = \frac{at - a^2}{t + a}$, ce que je fais, parce qu'en prenant d'une part la différence de cette équation & de l'autre l'élevant auquarré, puis mettant dans $dy = \frac{a^2 du}{a^2 - u^2}$ les valeurs de du & u^2 , j'aurai une équation plus simple, ainsi qu'on va voir par le calcul.

$$u = \frac{at - a^2}{t + a}$$

$$du = \frac{at dt + a^2 dt - a t dt + a^2 dt}{b + a}$$

$$du = \frac{2a^2 dt}{t + a}$$

$$u^2 = \frac{a^2 tt - 2a^3 t + a^4}{t + a}$$

$$a^2 - u^2 = a^2 - \frac{a^2 tt - 2a^3 t + a^4}{tt + 2at + aa}$$

$$a^2 - u^2 = \frac{a^2 tt + 2a^3 t + a^4 - a^2 tt + 2a^3 t - a^4}{tt + 2at + aa} = \frac{4a^3 t}{t + a}$$

$$dy = \frac{a^2 du}{a^2 - u^2} = \frac{2a^4 dt}{4a^3 t} = \frac{\frac{1}{2} a dt}{t}$$

Je

Je prens donc la différence de $u = \frac{a^2 - a^2}{t + a}$ laquelle est $du = \frac{2a^2 dt}{t + a}$

Je prens de même le quarré de u , & j'ai $u^2 = \frac{a^4(t^2 - 2at + a^2)}{t + a}$,
& substituant les valeurs de u & de u^2 dans $dy = \frac{a^2 du}{a^2 - u^2}$, j'ai
 $dy = \frac{2a^2 dt}{t}$, d'où je tire $\frac{dy}{dt} = \frac{2a}{t}$ qui est l'expression de la soutan-
gente d'une logarithmique dont $\frac{1}{2}a$ est l'unité.

Je décris donc une logarithmique KBE, dont EF = $\frac{1}{2}a$ est l'unité, l'asymptote est la droite ZF qui passe par le point B, ainsi OP = t , uo = dt , Pp = uO = dy , & menant la tangente Og, les triangles semblables Ouo, Opg donnent uo, uO :: Op, pg, ou $dt, dg :: t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}a$; or puisque OP = t , si du point B je mene BT parallele à AZ, j'ai SO = OP - SP = $t - a$, & comme j'ai fait $u = \frac{a^2 - a^2}{t + a}$ qui donne $t + a, t - a :: a, u$, il s'ensuit que si je prens une quatrième proportionnelle aux trois grandeurs $t + a, t - a, a$, c'est-à-dire, à PO + AB, OS & AB & que je la porte sur OP de P en Q cette quatrième proportionnelle, PQ sera la vitesse restante à la fin du tems AP, & faisant la même chose à la fin de tous les AP, j'ai la courbe A Q V des vitesses restantes.

C'est pourquoi prolongeant les OP, & faisant les PM égaux aux AP, puis prenant les PM égaux aux PQ, les PN seront les vitesses perdues à la fin des AP.

COROLLAIRE I.

452. La vitesse restante PQ ne peut être égale à AB qu'après un tems infini.

Puisque nous avons OP + BA, OS :: BA, PQ, ou OS + 2BA, OS :: BA, PQ; donc quand on aura BA = PQ, on aura aussi OS + 2BA = OS; or cela ne sçauroit être à moins que 2BA ne devienne infiniment petit par rapport à OS, donc ce ne sera qu'à l'infini qu'on aura BA = PQ; car 2BA ne peut devenir infiniment petit par rapport à OS que lorsque OS devient infiniment grand.

COROLLAIRE II.

453. Il suit du Corollaire précédent que BT est l'asymptote de la courbe AQV, & que AB est la plus grande vitesse que le corps puisse acquérir, mais qu'il n'acquerra jamais, puisqu'il faudroit pour cela un tems infini.

COROLLAIRE III.

454. La difference de la vitesse restante PQ à la plus grande vitesse AB est à la vitesse restante PQ comme le double de la plus grande vitesse AB est à la portion OS de l'ordonnée de la logarithmique.

Par le premier Corollaire, nous avons $OS + 2BA, OS :: AB, PQ$; donc $AB - PQ, PQ :: OS + 2BA - OS, OS$, ou $SQ, PQ :: 2BA, OS$.

COROLLAIRE IV.

455. Si l'air ne résistoit point, le corps acquerroit à la fin d'un tems limité la plus grande vitesse qu'il n'acquiert qu'à l'infini lorsque l'air lui résiste.

La plus grande vitesse AB étant une grandeur finie, on peut trouver un tems AP qui l'exprime; or dans le mouvement uniformement accéléré, les vitesses acquises à la fin des tems, sont comme les mêmes tems lorsque l'air ne résiste pas; donc si l'air ne résistoit point, le corps acquerroit à la fin d'un tems fini AP une vitesse égale à AB.

Il faut dire la même chose si les résistances de l'air étoient comme les vitesses.

COROLLAIRE V.

456. Si l'air ne résistoit point, & que pendant le tems AP, le corps se mût uniformément avec une vitesse égale à la vitesse PM acquise à la fin de ce tems, l'espace qu'il parcourroit seroit à l'espace parcouru à la fin du tems AP, lorsque l'air résiste, comme le rectangle APMC est à la figure AQP.

Les petits tems Pp étant infiniment petits, le mouvement pendant chacun de ces tems peut être pris pour uniforme, & par conséquent les espaces parcourus pendant ces petits tems sont entr'eux comme les produits des tems par les vitesses, c'est-à-dire comme les *udy*; donc les espaces parcourus pendant les tems

AP sont comme les *sudy*, mais *udy* est l'élément de l'aire AQP, donc *sudy* est l'aire AQP; donc les espaces parcourus à la fin des tems AP sont comme les aires AQP, lorsque l'air résiste; or lorsque l'air ne résiste pas, les rectangles APMC sont comme les espaces que le corps parcourroit d'un mouvement uniforme avec les vitesses acquises à la fin des tems AP; donc, &c.

Il faut dire la même chose lorsque les résistances de l'air sont comme les vitesses.

COROLLAIRE VI.

457. Si du point A pris pour centre & avec un rayon = AB, on décrit le demi-cercle BD*b*, & que du point Q on mene QD parallèle à AP, & du point D la droite DH parallèle à AB, il est visible que l'arc Da sera le complément au quart de cercle de l'arc BD, que DH = QP sera le sinus droit de ce complément, B*h* le sinus verse de l'arc BD, & *hb* l'excès du diamètre B*b* sur le sinus verse B*h*. Or je dis que l'espace parcouru à la fin du tems AP correspondant à la vitesse restante QP = DH sera comme la différence des logarithmes du sinus verse B*h* & de l'excès *hb* du diamètre sur ce sinus verse.

Les espaces parcourus à la fin des tems P*p* sont comme les *udy* par le Corollaire précédent; or nous avons trouvé (N. 451.) $dy = \frac{a^2 du}{a^2 - u^2}$, donc les *udy* sont comme les $\frac{a^2 u du}{a^2 - u^2}$, ou comme les $\frac{u du}{a^2 - u^2}$; mais les $\frac{u du}{a^2 - u^2}$ sont comme les $\frac{\frac{1}{2}adu + \frac{1}{2}u du}{a - u \times a + u}$ — $\frac{\frac{1}{2}adu - \frac{1}{2}u du}{a - u \times a + u}$, ou comme les $\frac{\frac{1}{2}du}{a - u} - \frac{\frac{1}{2}du}{a + u}$; donc les *udy* sont comme $\frac{a^2 u du}{a^2 - u^2}$, ou comme $\frac{\frac{1}{2}a^2 du}{a - u} - \frac{\frac{1}{2}a^2 du}{a + u}$, ou comme les $\frac{\frac{1}{2}du}{a - u} - \frac{\frac{1}{2}du}{a + u}$, ou comme les $\frac{du}{a - u} - \frac{du}{a + u}$, c'est-à-dire les espaces à la fin des tems P*p* sont comme les $\frac{du}{a - u} - \frac{du}{a + u}$, & par conséquent les espaces parcourus à la fin des tems AP, c'est-à-dire les *sudy* sont comme les $\int \frac{du}{a - u} - \int \frac{du}{a + u}$.

Or par la construction DH = hA = QP = *u*, donc B*h* = AB — hA = *a* — *u*, & *hb* = hA + Ab = *a* + *u*; donc les *sudy* sont comme les $\int \frac{dh A}{Bh} - \int \frac{dh A}{hb}$, c'est-à-dire, comme les différences des logarithmes de B*h*, & de *hb*, ainsi que je vais le montrer.

Bbb ij

Je décris une logarithmique ABC (Fig. 153.) dont la sous-tangente ou la grandeur prise pour l'unité est $BD = a$. Je prends D pour l'origine des abscisses que je nomme x , & dont les positives vont de D en F, & les négatives de D en E; je prends l'ordonnée FA $= a + u$, & l'ordonnée EC $= a - u$; donc EF $= AR = dx$, RA $= du$, EC $= -dx$, Cr $= +du$, je mène la tangente Ad, & les triangles semblables aRA, AFd, donnent Ra, RA :: AF, Fd; donc $du, dx :: a + u, \frac{a + u \times dx}{du} = Fd = a$, d'où je tire $dx = \frac{adu}{a + u} = \frac{du}{a + u}$, à cause de $a = 1$; donc $x = \int \frac{du}{a + u}$; en agissant de la même façon je trouve DE $= -x = \int \frac{du}{a - u}$, mais x est le logarithme de FA $= a + u$, & $-x$ le logarithme de CE $= a - u$; donc $\int \frac{du}{a - u} - \int \frac{du}{a + u}$ est la différence du logarithme de CE au logarithme de FA; & par conséquent l'espace parcouru à la fin du tems AP (Fig. 152.) est comme la différence du logarithme de Bh au logarithme de hb.

COROLLAIRE VII.

458. Les mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent, les espaces parcourus pendant les tems AP sont comme les logarithmes des sinus hD.

Par la propriété du cercle $\overline{AB}^2 - \overline{hA}^2 = \overline{hD}^2$, ainsi faisant $hD = r$, nous aurons $r^2 = a^2 - u^2$, & $2rdr = -2udr$, & $-rdr = udu$, & mettant ces valeurs dans $\frac{r^2 u du}{r^2 - u^2} = r dy$, nous aurons $udy = -\frac{a^2 r dr}{u} = -\frac{a^2 dr}{r}$; donc les espaces parcourus pendant les tems AP, c'est-à-dire les $\int r dy$ sont comme les $\int -\frac{a^2 dr}{r}$, ou comme les $\int -\frac{dr}{r}$, & par conséquent comme les Logarithmes des r ou des sinus hD, ce qu'on prouvera de même que dans le Corollaire précédent; car si l'on suppose l'ordonnée CE de la logarithmique (Fig. 153.) égale à 1, la sous-tangente sera $-\frac{r dx}{dr} = a$, d'où l'on tire $dx = -\frac{adr}{r} = -\frac{dr}{r}$ en supposant $a = 1$.

COROLLAIRE VIII.

459. Par le Corollaire VI^e. les *fydy* sont comme les $\int \frac{du}{a-u}$ $-\int \frac{du}{a+u}$, c'est-à-dire, comme la différence des logarithmes de $a-u$, $a+u$; or comme la soustraction des logarithmes indique la division des grandeurs dont ils sont les logarithmes, il s'en suit que $\int \frac{du}{a-u} - \int \frac{du}{a+u} = -l, a-u-l, a+u=-l, \frac{a-u}{a+u}$, c'est-à-dire, que les espaces sont comme les logarithmes des grandeurs $a-u$ divisées par les $a+u$, ou des Bh divisés par les hb .

COROLLAIRE IX.

460. Les mêmes choses étant posées, les tems AP sont comme les différences des logarithmes de hb & de hB , ou comme les logarithmes des grandeurs hb divisées par les Bh .

Nous avons trouvé (N. 451.) $dy = \frac{a^2 du}{a^2 - u^2}$; or $\frac{a^2 du}{a^2 - u^2}$ est comme $\frac{\frac{1}{2}a^2 du + \frac{1}{2}u^2 du}{a-u \times a+u} + \frac{\frac{1}{2}a^2 du - \frac{1}{2}u^2 du}{a-u \times a+u}$, ou comme $\frac{\frac{1}{2}adu}{a-u} + \frac{\frac{1}{2}adu}{a+u}$, donc les dy sont comme les $\frac{\frac{1}{2}adu}{a-u} + \frac{\frac{1}{2}adu}{a+u}$, ou comme les $\frac{du}{a-u} + \frac{du}{a+u}$; donc les y sont comme les $\int \frac{du}{a-u} + \int \frac{du}{a+u}$; or par les deux Corollaires précédens $\int \frac{du}{a-u} = -l, \frac{a-u}{a+u}$, & $\int \frac{du}{a+u} = l, \frac{a+u}{a-u}$; donc les y sont comme les $-l, \frac{a-u}{a+u} + l, \frac{a+u}{a-u}$, ou comme les $l, \frac{a+u}{a-u} - l, \frac{a-u}{a+u}$, ou enfin comme les $l, \frac{a+u}{a-u}$.

COROLLAIRE X.

461. Les $a+u$ expriment les vitesses restantes à la fin des tems AP augmentées de la grandeur AB, & les $a-u$ expriment les différences de AB & des vitesses restantes; donc les tems sont comme les logarithmes des vitesses restantes augmentées, divisées par les différences de la plus grande vitesse AB, & des vitesses restantes.

COROLLAIRE XI.

462. Les augmentations du des vitesses restantes à la fin des tems Pp sont aux augmentations dy des vitesses que le corps acquerroit à

la fin des mêmes tems si l'air ne résistoit pas comme les quarez de AB moins les quarez des vitesses restantes u sont aux quarez \overline{AB} .

Nous avons trouvé (N. 451.) $a^2 dy - u^2 dy = a^2 du$, d'où l'on tire cette analogie $du, dy :: a^2 - u^2, a^2$, donc, &c.

COROLLAIRE XII.

463. Si l'on décrit entre les asymptotes AB, AC, (Fig. 154.) une hyperbole équilatere FMN dont la puissance AD, ou DF soit égale à la plus grande vitesse a que le corps peut acquérir, & qu'après avoir décrit le quart de cercle AEF, on prenne les DH égaux aux vitesses restantes à la fin des tems. Je dis qu'élevant le sinus HE, & menant par E la droite RM, les espaces hyperboliques FBRM seront les espaces parcourus à la fin des tems correspondans aux vitesses restantes DH.

Nous avons $AB = AD = DF = ED = BF = a$, $DH = u$; donc dans le triangle rectangle DEH qui donne $\overline{HE} = \overline{DE} - \overline{DH}$, nous avons $\overline{HE} = a^2 - u^2$, & par conséquent $HE = RA = \sqrt{a^2 - u^2}$; donc $BR = BA - RA = a - \sqrt{a^2 - u^2}$; & menant rm infiniment proche de RM , la différence de BR sera $\frac{udu}{\sqrt{a^2 - u^2}}$. Or par la propriété de l'hyperbole, j'ai $AR \times RM = \overline{AD}^2$, ou $RM \times \sqrt{a^2 - u^2} = a^2$; donc $RM = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - u^2}}$, donc l'élément $Rr \times RM$ de l'aire RPFM, est $\frac{udu}{\sqrt{a^2 - u^2}} \times \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{a^2 u du}{a^2 - u^2}$, & l'aire est $\int \frac{a^2 u du}{a^2 - u^2}$; or les espaces parcourus à la fin des tems correspondans aux vitesses restantes DH, sont comme les $\int \frac{a^2 u du}{a^2 - u^2}$ (N. 457.), donc ces espaces sont comme les aires hyperboliques RBFM.

Quand la vitesse restante DH devient égale à DA, l'espace hyperbolique BFRM devient infini, ce qui fait voir que le corps ne peut avoir une vitesse restante égale à $AD = a$ qu'à l'infini, de même que nous l'avons trouvé ci-dessus.

COROLLAIRE XIII.

464. Si l'on prend les BR (Fig. 154.) troisiemes proportionnelles à la plus grande vitesse $AD = a$, & aux vitesses que le corps avoit acquises, si l'air ne résistoit point, à la fin des tems correspondans

aux vitesses restantes DH, les espaces hyperboliques seront égaux aux espaces parcourus à la fin des tems correspondans aux vitesses restantes.

Par la supposition les BR sont comme les $\frac{u^2}{a}$; donc les AR = AB — BR sont comme les $a - \frac{u^2}{a}$, ou comme les $\frac{a^2 - u^2}{a}$, & les différences des BR sont comme les $\frac{2udu}{a}$; or par la propriété de l'hyperbole AR × RM = \overline{AD}^2 , ou $\frac{a^2 - u^2}{a} \times RM = a^2$; donc RM = $\frac{a^3}{a^2 - u^2}$, & par conséquent l'élément MRrm de l'aire FBRM = $\frac{a^3}{a^2 - u^2} \times \frac{2udu}{a} = \frac{2a^2 udu}{a^2 - u^2}$; donc l'aire RMrm = $\int \frac{2a^2 udu}{a^2 - u^2}$, ainsi les espaces hyperboliques FBRM sont comme les $\int \frac{2a^2 udu}{a^2 - u^2}$, ou comme les $\int \frac{a^2 udu}{a^2 - u^2}$, c'est-à-dire comme les espaces parcourus à la fin des tems correspondans aux vitesses restantes DH par le Corollaire précédent.

CHAPITRE XIV.

Des Machines simples.

DEFINITIONS.

465. **O**N appelle *Machine* tout ce qui sert à faciliter le mouvement, de façon qu'on y employe moins de force ou moins de tems qu'il ne faudroit sans ce secours.

466. Entre les Machines, les unes sont appellées *simples*, & les autres *composées*, parce que les simples s'y trouvent combinées.

Les Machines simples sont au nombre de cinq, à sçavoir; le *Levier*, la *Roue dans son assieu*, la *Poulie*, la *Vis*, & le *Coin*.

Les Machines *composées* sont toutes les autres Machines dans lesquelles on combine deux ou plusieurs Machines simples, & celles-ci peuvent être en nombre infini, car outre le grand nombre de celles qu'on a déjà trouvées, les Sçavans en inventent tous les jours.

467. Le *Levier* est tout bâton ou barre de fer qu'on regarde

comme une ligne droite inflexible sans pesanteur ; & qui a un point d'appuy autour duquel il peut tourner : par exemple , si la droite AB (*Fig. 155.*) tourne autour du point immobile C , cette droite est un levier.

Il y a trois sortes de Leviers , le Levier de la *premiere espece* , le Levier de la *seconde espece* , & le Levier de la *troisieme espece*.

Le Levier de la *premiere espece* est celui dont le point d'appuy C est entre le poids ou le fardeau qui est en B , & la puissance A qui soutient ou qui enleve ce poids (*Fig. 155.*)

Le Levier de la *seconde espece* est celui dont le point d'appuy C (*Fig. 156.*) est à l'une de ses extremités , & le poids B est entre la puissance A & le point C.

Enfin le Levier de la *troisieme espece* est celui où la puissance A est placée entre le point d'appuy C & le poids B (*Fig. 157.*)

468. La Roue dans son aissieu est une Roue ABCD (*Fig. 158.*) dont les rayons sont enchassés dans l'aisieu EF , ce qui la distingue des Roues des Carrosses & des autres voitures dont on a coutume de se servir , car dans celles-ci l'aisieu n'est pas attaché aux rayons.

469. La Poulie est un cercle ABCD (*Fig. 159.*) qui tourne librement autour de son aissieu : on creuse son épaisseur autour de la circonférence , afin que la corde PBQ par le moyen de laquelle la puissance P tire le corps Q ne puisse tomber ni d'un côté ni de l'autre , son aissieu est attaché à une piece de fer ou de bois , laquelle est suspendue à un point fixe R.

470. Si on entoure en façon de Spirale un cylindre GH (*Fig. 160.*) avec un prisme triangulaire ABCDE qu'il faut concevoir comme flexible , & dont le côté ABCE est le côté qui s'applique sur la surface du cylindre , on aura un solide GH qu'on nomme *Vis*. Ce solide s'enchasse dans un autre solide XZ qu'on creuse dans le milieu , & dans le creux duquel on fait une autre vis , de façon que les élévations de GH s'engraineront dans les enfoncemens de cette seconde vis , ce qui fait qu'en tournant la piece XZ , on peut la faire monter ou descendre d'un bout à l'autre de HG ; & de même si XZ est immobile , & qu'on fasse tourner HG , la piece TV à laquelle tient HG s'approchera jusqu'à toucher XZ , ou s'en éloignera jusqu'à la distance GH selon le sens qu'on fera tourner HG : on nomme communément la vis HG , *Vis mâle* , & la piece XZ , *Vis femelle*.

471. Le Com est un prisme triangulaire ABCDEF (*Fig. 161.*) dont

dont la ligne EF s'appelle la *pointe*, & la surface ABCD, se nomme la *tête*.

D U L E V I E R.

PROPOSITION CXLVII.

472. Si une puissance A (Fig. 155. 156.) soutient un poids B à l'aide d'un Levier de la première ou seconde espèce, dont le point C est le point d'appuy, la puissance est au poids réciproquement comme la distance BC du poids B au point d'appuy C est à la distance AC de la puissance A au même point, en supposant les directions de la puissance & du poids parallèles entr'elles.

DEMONSTRATION.

En premier lieu, supposons que le Levier AB (Fig. 155.) soit du premier genre, & qu'étant parallèle à l'horison, la force A tire ou élève le levier avec une direction perpendiculaire, de même que la pesanteur du poids B pousse le levier vers le centre de la terre avec une direction perpendiculaire. La puissance A ne peut faire décrire au point A l'arc AE, que le poids B ne décrive l'arc BD; ainsi les arcs AE, BD décrits en même tems, marquent les vitesses de la puissance ou d'un poids égal à la puissance A, & du poids B; or à cause des angles égaux ACE, BCD, les secteurs ACE, BCD, sont semblables, donc AC, CB :: AE, BC; ainsi les rayons AC, CB, étant entr'eux comme les arcs AE, BD, peuvent exprimer les vitesses; mais par la supposition la force de la puissance A est égale à la force du corps B, puisque l'un & l'autre se tiennent en équilibre, donc les quantités de mouvement de ces deux forces sont égales, & par conséquent $A \times AC = B \times BC$, d'où je tire $A, B :: BC, AC$.

Si le Levier est dans la position ED inclinée à l'horison, & que la force A de même que le poids B ait une direction EH perpendiculaire à l'horison, la puissance A n'agit pas plus sur EC qu'elle n'agiroit sur HC perpendiculaire à sa direction, & le poids B n'agit pas plus sur CD qu'il n'agiroit sur CO perpendiculaire à sa direction; concevant donc que la puissance & le poids soient transportés en H & O sur le levier horizontal HO, la vitesse de A sera exprimée par le rayon HC, & la vitesse de B par le rayon CO, mais à cause des triangles semblables ECH, DCO, on a CH, CO :: CE, CD, donc CE, CD, peuvent expri-

mer les vitesses de A & B, de même que CH, CO; puis donc que par la supposition les quantités de mouvement de A & B sont égales, il s'ensuit que $A \times EC = B \times CD$, d'où l'on tire $A, B :: CD, EC$.

En second lieu, si le Levier est de la seconde espece (Fig. 156.), la puissance A ne peut décrire l'arc AE que le poids B ne décrive l'arc BD, ainsi ces arcs marqueront les vitesses de A & de B; or à cause de l'angle A commun aux deux secteurs AEC, BDC, on a $AC, BC :: AE, BD$, donc AC, BC, peuvent exprimer les vitesses de A & B, mais par la supposition, les quantités de mouvement de A & B sont égales; donc $A \times AC = B \times BC$, d'où l'on tire $A, B :: BC, AC$.

COROLLAIRE I.

473. Dans le Levier de la premiere espece (Fig. 155.), si AC est plus grand que BC, c'est-à-dire, si le point d'appuy C est plus près de B que de A, la puissance A est moindre que le poids B, puisque $A, B :: BC, AC :: CD, EC$, & dans le Levier de la seconde espece, la puissance A est toujours moindre que le poids B, d'où il suit que pour peu qu'on augmente la puissance dans l'un & l'autre levier, la puissance enlèvera le poids, & que par conséquent ces deux leviers servent à soutenir & enlever un poids avec une force moindre que celle qu'il faudroit employer sans ce secours.

COROLLAIRE II.

474. Dans le Levier de la troisième espece (Fig. 157.) la puissance A qui soutient le poids B est toujours plus grande que ce poids B; car BC est toujours plus grand que AC, or $A \times AC = B \times BC$, & par conséquent $A, B :: BC, AC$, donc A est plus grand que B, d'où il suit que le Levier ne peut être mis au nombre des Machines, puisqu'il demande une force plus grande pour soutenir ou pour élever le corps B que l'on ne l'emploieroit sans son secours.

COROLLAIRE III.

475. Si le Levier de la premiere espece AB (Fig. 162.) étant horizontal, la puissance A tiroit avec une direction AE qui ne fut pas perpendiculaire au levier sur lequel la direction du poids B est alors perpendiculaire, on tireroit du centre C la droite CE perpendiculaire sur la direction AE, & comme la puissance

A n'agit pas plus sur le levier AC qu'elle n'agiroyt sur le levier EC, on regarderoit la puissance A comme attachée à l'extrémité E d'un levier recourbé ECB, & si on trouvoit $A, B :: CB, CE$, on diroit que la puissance soutiendrait le poids, car la puissance A mise en E ne peut décrire l'arc EF que la puissance B ne décrive l'arc BH; ainsi les arcs EF, BH, exprimeront les vitesses de A & B; or les angles EBF, BCH, seront égaux, car à cause de l'inflexibilité du levier, les angles ECB, FCH, sont égaux; donc retranchant l'angle commun FCB, il reste $ECF = BCH$, ainsi les secteurs ECF, BCH, étant semblables, on a $EC, CB :: EF, BH$, & par conséquent les rayons EC, CB, peuvent exprimer les vitesses de A & B; mais par la supposition $A, B :: CB, CE$; donc $A \times CE = B \times CB$, c'est-à-dire les quantités de mouvement de A & B sont égales, & par conséquent la puissance A soutient le poids B; d'où il suit que si le bras EC est plus grand que CB, la puissance A est moindre que le poids B, & que pour peu qu'on augmente cette puissance, elle enlèvera le poids.

COROLLAIRE IV.

476. Si le Levier AC (Fig. 163.) étoit incliné à l'horizon, & que la direction de la puissance ne fut pas parallèle à celle du poids, laquelle est perpendiculaire, à l'horizon, on meneroit du centre C de mouvement la droite CE perpendiculaire sur la direction du poids B, & la droite CD perpendiculaire sur la direction de la puissance A, & considérant la puissance & le poids comme étant mis aux extrémités E, D, du levier recourbé ECD, on diroit que la puissance soutient le poids, si on trouvoit $A, B :: CD, CE$, ce qu'on démontrera comme ci-dessus.

COROLLAIRE V.

477. De même si dans un levier AC horizontal de la seconde espece (Fig. 164.) la direction AE de la puissance A n'étoit pas perpendiculaire sur le Levier, on meneroit du point C la droite CE perpendiculaire à cette direction, & considérant la puissance A comme attachée à l'extrémité E du levier recourbé ECB, on diroit que la puissance soutient le poids si on trouvoit $A, B :: BC, CE$, ce qui se démontre de même.

COROLLAIRE VI.

478. Et si le levier AC de la seconde espece étant incliné à l'horizon (Fig. 165.) la direction AE de la puissance n'étoit pas parallele à la direction du poids, on meneroit du centre C la droite CE perpendiculaire à la direction de la puissance, & la droite CH perpendiculaire à la direction du poids B, & considerant la puissance & le poids comme attachés aux extremités E, H, du levier recourbé ECH, on diroit que la puissance soutient le poids, si on trouvoit $A, B :: HC, CE$.

COROLLAIRE VII.

479. Des Corollaires précédens, il suit qu'afin que la puissance égale au poids soutienne ou enleve le poids, il faut que la puissance soit attachée au plus long bras du levier, soit qu'il soit décrit ou recourbé.

REMARQUE.

480. Jusqu'ici nous avons considéré le levier comme n'ayant aucune pesanteur, mais comme cela est faux dans la pratique, nous allons voir dans les Propositions suivantes de quelle maniere on doit corriger l'erreur qui proviendrait de cette supposition.

PROPOSITION CXLVIII.

481. Connoissant la pesanteur d'un levier AB de la premiere espece (Fig. 166.), la distance de son centre de gravité Q au point C qui est le centre de mouvement, le poids B, la distance BC de ce poids au point C, & la distance AC, connoître la puissance qui doit être mise en A pour soutenir les poids B, avec une direction parallele à la direction du poids B.

SOLUTION.

Je nomme G la pesanteur du levier que je considere comme réunie en Q, & faisant cette analogie $CB, CQ :: G, \frac{G \times CQ}{CB}$, le quatrième terme est la partie du poids B que la pesanteur du levier peut soutenir; c'est pourquoi le reste du poids B que la puissance A doit soutenir est $B - \frac{G \times CQ}{CB}$; je fais donc cette autre analogie $AC, CB :: B - \frac{G \times CQ}{CB}, \frac{CB \times B - G \times CQ}{AC}$, & ce qua;

trième terme est égal à la puissance A que je cherche ; ce qui est évident par les principes que nous avons établis.

Soit par exemple $G=10$ lb, $B=300$ lb, $QC=2$, $CB=1$ & $AC=5$; la première analogie est donc $1, 2 :: 10, 20 = \frac{G \times CQ}{CB}$, je retranche 20 de 300 & le reste est $280 = B - \frac{G \times CQ}{CB}$, c'est pourquoi la seconde analogie est $5, 1 :: 280, \frac{280}{5} = 56$, ainsi la puissance A doit être comme un poids de 56 lb.

COROLLAIRE I.

482. Si la puissance A étoit connue, & qu'on demandât le poids B qu'elle peut soutenir, on feroit comme ci-dessus $CB, CQ :: G, \frac{G \times CQ}{CB}$, & le quatrième terme seroit la partie du poids B cherché que la pesanteur du levier peut soutenir ; ensuite on feroit cette autre analogie $CB, CA :: A, \frac{A \times CA}{CB}$, & le quatrième terme seroit le reste du poids cherché ; c'est pourquoi ajoutant les deux quatrièmes termes ensemble la somme $\frac{G \times CQ}{CB} + \frac{A \times CA}{CB}$ seroit le poids entier.

Soit par exemple $A=56$ lb, $G=10$ lb, $QC=2$, $CB=1$, & $AC=5$, la première analogie est par conséquent $1, 2 :: 10, 20 = \frac{G \times CQ}{CB}$, & la seconde est $1, 5 :: 56, 280 = \frac{A \times CA}{CB}$; ajoutant donc 20 à 280, la somme 300 est la valeur du poids B.

Car si le levier n'avoit point de pesanteur, la puissance A ne pourroit soutenir que 280 lb ; or la pesanteur du levier étant du côté de A peut soutenir 20 lb, donc la puissance & la pesanteur agissant ensemble sur le bras AC, peuvent soutenir $280 + 20$ lb, c'est-à-dire 300 lb.

COROLLAIRE II.

483. Si l'on connoissoit la puissance A, le poids B, le centre de gravité Q du levier, la longueur AB, & qu'on demandât le centre de gravité C commun à la puissance & aux poids, on supposeroit la pesanteur G réunie au point Q, puis on chercheroit le centre de gravité Z commun à la pesanteur & à la puissance A, on retrancheroit AZ de AB, & regardant la pesanteur & la puissance comme réunies au point Z, on couperoit ZB en Cen

deux parties ZC, CB reciproques au poids B, & à la somme de la pesanteur & de la puissance, c'est-à-dire, on feroit ZC, CB :: B, A + G, ou ZC + CB, CB :: B + A + G, A + G.

Soit par exemple A = 56 lb, G = 10 lb, B = 300, AB = 6, donc AQ = 3, car le levier étant homogène dans toutes ses parties, son centre de gravité le coupe en deux parties égales; pour trouver donc sur AQ le centre de gravité commun à la puissance & à la pesanteur, je dis 56 + 10, ou 66, 10 :: 3, $\frac{30}{66} = \frac{5}{11}$ = AZ, je retranche $\frac{5}{11}$ de 6, & le reste est $6 - \frac{5}{11} = \frac{66-5}{11} = \frac{61}{11}$ = ZB; je fais ensuite 300 + 66, ou 366, 66 :: $\frac{61}{11}$, $\frac{4036}{366} = 11$ = CB; ainsi faisant CB = 1, le point C est le point autour duquel la puissance & le poids sont en équilibre.

PROPOSITION CXLIX.

484. Connoissant la pesanteur d'un levier AC de la seconde espece (Fig. 167), son centre de gravité Q, le poids B, la distance BC de ce poids au point d'appui C, & la distance AC du point A où l'on veut mettre la puissance, trouver la puissance A qui peut soutenir le poids B, en supposant la direction de A parallele à celle de B.

SOLUTION.

Je nomme G la pesanteur que je conçois réunie au point Q, je cherche la puissance qui pourroit soutenir la pesanteur seule G en faisant AC, QC :: G, $\frac{G \times QC}{AC}$, & le quatrième terme est la puissance qui soutiendrait G; je fais abstraction de la pesanteur du levier, & je cherche la puissance qui peut soutenir B en faisant AC, BC :: B, $\frac{B \times BC}{AC}$, & le quatrième terme est la puissance qui peut soutenir B; j'ajoute ensemble les deux quatrièmes termes & la somme $\frac{G \times QC}{AC} + \frac{B \times BC}{AC}$ est la puissance cherchée.

Soit AC = 6, QC = 3, BC = 1, B = 300 lb, G = 10 lb; la premiere analogie est donc 6, 3 :: 10, $\frac{3 \times 10}{6} = 5 = \frac{G \times QC}{AC}$, & la seconde est 6, 1 :: 300, $\frac{1 \times 300}{6} = 50 = \frac{B \times BC}{AC}$, ajoutant donc ensemble 5 & 50, la somme 55 est la puissance qu'il faut mettre en A pour soutenir le poids B, ce qui n'a pas besoin de demonstration.

COROLLAIRE.

485. Si la puissance A étoit connue & le poids B inconnu, on chercheroit la puissance $\frac{G \times QC}{AC}$ qui peut soutenir la pesanteur G, on retrancheroit cette puissance de la puissance A & le reste seroit $A - \frac{G \times QC}{AC}$, après quoi on feroit $BC, AC :: A - \frac{G \times QC}{AC}, A \times AC - G \times QC$, & le quatrième terme seroit le poids B cherché.

Soit $AC=6$, $QC=3$, $BC=1$, $G=10$ lb, & $A=55$, donc $\frac{G \times QC}{AC}=5$, & par conséquent $A - \frac{G \times QC}{AC}=55-5=50$; donc la second analogie est $1, 6 :: 50, 300=B$.

PROPOSITION CL.

486. Connoissant les bras AC, CB d'un levier recourbé ACB (Fig. 168.) la pesanteur du levier & la puissance qu'il faut mettre en A, connoître le poids B que cette puissance peut soutenir en supposant que la direction de la puissance est perpendiculaire au levier.

SOLUTION.

Ce problème comprend deux cas que nous allons résoudre séparément.

En premier lieu, si le bras AB est horizontal, la direction du poids B sera aussi perpendiculaire, ainsi les bras AC, BC exprimeront les vitesses de A & de B, cela posé; je coupe les deux bras chacun en deux parties égales aux points E, F, dans lesquels je conçois que leur pesanteur sont réunies, & comme nous supposons que les bras AC, CB sont d'une égale épaisseur par tout & d'une matiere homogene, leurs longueurs AC, CB exprimeront leurs pesanteurs; ainsi menant la droite EF je la coupe en O, en sorte que $EO, OF :: CB, AC$, & par conséquent le point O est le centre commun de gravité des bras AC, CB, c'est-à-dire du levier ACB; je conçois que la pesanteur du levier soit réunie en O; & comme sa direction est perpendiculaire à l'horison, j'abaisse du point O la perpendiculaire OH sur BC, & cette perpendiculaire tombe, ou entre B & C, ou sur BC prolongé du côté de C, ou sur BC prolongé du côté de B, ce qui fait encore trois cas.

Supposons donc que OH tombe sur BC prolongé du côté de C, il est visible que la pesanteur G du levier n'agit sur le bras AC que comme elle agiroit sur HC, ainsi je cherche la distance HC, ce qui peut se trouver aisément, parce que dans le triangle ECF, les côtés EC, CF sont connus de même que l'angle compris ECF, & par conséquent le côté EF est connu de même que ses segmens EO, OF, qui sont entr'eux comme CB est à CA par la construction, d'autre part dans le triangle rectangle HOF l'hypoténuse OF est connue, & l'angle aigu OFH qui lui est commun avec le triangle ECF, ainsi les trois angles de ce triangle rectangle étant connus, on peut connoître aisément le côté HF, duquel retranchant CF, qui est connu, on a la distance cherchée HC; je multiplie donc G par HC & le produit $G \times HC$ est le moment de G par rapport à C, soit que G soit sur HC ou sur PC, c'est-à-dire, soit qu'il soit en H ou en P; je prens le moment $A \times AC$ de la puissance A par rapport à C, & ajoutant ce moment au moment de G, la somme $G \times HC + A \times AC$ est le moment total de la puissance & de la pesanteur. Or afin que B contrebalance ce moment, il faut qu'il ait un moment égal à $G \times HC + A \times AC$, divisant donc par la distance CB, le quotient $\frac{G \times HC + A \times AC}{CB}$ sera la valeur cherchée du poids B, car en multipliant cette valeur par CB, le produit sera le moment de B & ce moment sera le même que celui de $A + G$.

Si la perpendiculaire OH tombe entre C & B (Fig. 168), la pesanteur G sera en H, & par conséquent la puissance A doit soutenir non-seulement le poids B, mais encore la pesanteur, c'est pourquoi on cherchera le moment $G \times CH$ de la pesanteur, & le retranchant du moment $A \times AC$ de la puissance A, le reste $A \times AC - G \times CH$ sera le moment que le poids B doit avoir afin qu'il y ait équilibre, car ajoutant à ce moment celui de la pesanteur, on a $A \times AC - G \times CH + G \times CH = A \times AC$, c'est-à-dire, le moment total de B & de G égal au moment de A; divisant donc le moment $A \times AC - G \times CH$ du poids B par sa distance CB, le quotient $\frac{A \times AC - G \times CH}{CB}$ sera le poids cherché B.

Et ce seroit la même chose si la droite OH tomboit sur CB prolongé du côté de B (Fig. 169).

En second lieu, si le bras CB du levier ACB (Fig. 170,) n'étoit pas horizontal, auquel cas la direction du poids B ne seroit pas perpendiculaire sur ce bras; on tireroit du point C la droite

CD

CD perpendiculaire sur cette direction, & le poids B agiroit sur CD de même que sur CB; c'est pourquoi considérant le poids comme étant mis en D, il seroit facile de trouver la valeur de ce poids en faisant $CD, AC :: A, \frac{A \times AC}{CD} = B$, si le levier étoit sans pesanteur.

Maintenant pour corriger l'erreur que la pesanteur négligée peut causer; je cherche le centre de gravité O, commun aux deux bras, & du point O j'abaisse OH perpendiculaire sur DC, & le point H tombe ou entre C & D ou sur DC prolongé du côté de C, ou sur CD prolongé du côté de D, ce qui fait encore trois cas dans lesquels toute la difficulté consiste à trouver la distance HC.

Supposons donc que H tombe sur DC prolongé du côté de C, le triangle ECF peut se connoître de même que les segmens EO, OF de la droite OF, ainsi qu'il a été dit ci-dessus. L'angle d'inclinaison ACH étant connu, l'angle CPH est aussi connu, puisqu'à cause du triangle rectangle CPH, il est le complément à l'angle droit de l'angle PCH; donc dans le triangle EPO l'angle EPO opposé au sommet à l'angle CPH est connu, or l'angle PEO commun au triangle PEO & au triangle CEF est aussi connu à cause du triangle CEF qui est connu, donc le troisième angle EOP est aussi connu, or le côté EO est connu, donc on peut connoître aisément le côté EP, & ce côté étant retranché de la droite EC connue, on connoitra le reste PC ou l'hypoténuse du triangle rectangle CPH; or les trois angles de ce triangle sont connus, donc le côté HC sera aussi connu. Prenant donc le moment $G \times HC$ de la pesanteur par rapport à C, & le moment $A \times AC$ de la puissance par rapport à C, la somme $G \times HC + A \times AC$ fera le moment que le poids B mis en B ou en D doit avoir; divisant donc ce moment par sa distance DC le quotient $\frac{G \times HC + A \times AC}{DC}$ sera le poids cherché.

Si le point H (Fig. 171.) tombe entre C & D, on connoitra le triangle CEF, le côté EF, & les segmens EO, OF comme ci-dessus; donc l'angle CEP, & l'angle ACD d'inclinaison étant connus de même que le côté CE du triangle ECP, le côté CP sera aussi connu. Je retranche de l'angle connu ACB l'angle ACP & le reste est l'angle PCF, or les côtés PC, FC qui comprennent cet angle sont connus, donc le côté FP est aussi

D d d

connu, & retranchant FP du segment FO, le reste sera l'hypoténuse connue OP du triangle rectangle OPH; mais à cause du triangle connu PCF l'angle aigu OPH égal à l'angle CPF est connu, donc on connoitra aisément le côté PH, & ce côté étant ajouté à PC, la somme sera la distance CH; ainsi prenant le moment $G \times HC$ de la pesanteur, & retranchant ce moment du moment $A \times AC$ de la puissance, le reste $A \times AC - G \times CH$ sera le moment du poids cherché B par les raisons données ci-dessus, donc $\frac{A \times AC - G \times CH}{CD}$ sera le poids cherché B.

Et ce seroit la même chose si le point H tomboit sur CD prolongé du côté de D (Fig. 172).

REMARQUE.

487. Dans les trois dernières Propositions je n'ai parlé que des cas où la direction de la puissance est perpendiculaire au levier, parce qu'il est aisé de réduire tous les autres à ceux-ci.

Par exemple, si le levier étoit de la première espèce, & que la direction AF de la puissance A (Fig. 173.) fût oblique sur AC, on meneroit du point C la droite CE perpendiculaire sur cette direction, & l'on prendroit. EC pour la vitesse de A, après quoi on acheveroit le reste comme il a été dit, & ainsi des autres.

PROPOSITION CLI.

488. *Construire la Balance Romaine.*

SOLUTION.

Prenez un levier AC de bois ou de fer (Fig. 174.) qui soit d'une égale épaisseur dans toute sa longueur, marquez-y un point C pris à discrétion, au-dessus duquel vous attacherez perpendiculairement une languette ou lame de fer EF qui passe dans le fleau CD; à l'extrémité A attachez un crochet AR duquel pende un poids P qui soit en équilibre avec le bras CB, ce que vous connoîtrez, si en suspendant le levier par le crochet S, & la languette ne sortant ni d'un côté ni d'autre hors du fleau, le poids P & le bras CB se contrebalencent; prenez deux poids T, Q, chacun d'une livre, & attachant le premier au poids P, ou à un crochet attaché à ce poids, ou au crochet R, mettez l'autre sur le bras CB à une distance C, égale à la distance CA; il est visible que le poids Q sera en équilibre avec le poids T, & que par

conséquent la balance restera dans la situation horizontale : divisez le reste $1B$ du bras CB en parties $12, 23, 34, 56$, &c. égales entr'elles & à la partie $C1$, & la balance sera faite ; car il est clair que si au lieu du poids T d'une livre on en met un de deux, & qu'on suspende le poids Q au point 2 , le poids Q & le poids de deux livres seront en équilibre ; de même si au lieu du poids T on en met un de trois livres, & qu'on avance le poids Q au point 3 , les deux poids seront en équilibre, & ainsi des autres.

L'usage de cette balance est d'attacher le poids ou le fardeau qu'on veut peser au poids P , & de faire glisser le poids Q d'une livre le long du bras CB , jusqu'à ce qu'il se trouve en équilibre avec le fardeau qu'on veut peser. Supposé donc que lorsque le poids Q est au point 5 , il y ait équilibre, on dira que le fardeau ou poids attaché en P pèse cinq livres, & ainsi des autres.

R E M A R Q U E.

489. La maniere dont nous venons de construire la balance Romaine, seroit fort exacte, si la matiere dont le levier est composé étoit toujours homogene dans toutes ses parties, mais comme il est rare que cela arrive, il vaut mieux faire glisser le poids Q le long de CB , & marquer successivement les points où ce poids se trouve en équilibre avec un poids d'une livre, un de deux livres, un de trois livres, &c.

Au reste, quoique cette balance soit fort commode, sur tout lorsqu'il s'agit de peser de grands fardeaux, cependant comme les Ouvriers peuvent aisément en faire qui ne soient pas justes, il vaut mieux se servir de la balance ordinaire dont nous allons parler dans les Propositions suivantes.

PROPOSITION CLII.

490. Si une balance AB (Fig. 175.) ayant sa languette RC élevée perpendiculairement en dessus sur son milieu R , à son centre de mouvement C sur RC hors de AB , & qu'ayant attaché à ses extrémités A, B deux poids égaux P, Q , on la mette dans une situation horizontale, elle restera en repos ; mais si on l'incline d'un côté ou d'autre elle sera en mouvement jusqu'à ce qu'elle ait repris sa situation horizontale.

DEMONSTRATION.

En premier lieu, si la balance est horizontale les directions des

Ddd ij

poids P , Q seront perpendiculaires sur AB , & par conséquent les bras AR , RB exprimeront leurs vitesses; or ces bras sont égaux entr'eux de même que les poids par la supposition, donc les momens des poids P , Q seront égaux, & par conséquent il y aura équilibre, & la balance restera en repos.

En second lieu, si l'on incline la balance & qu'on lui donne, par exemple, la position ab , le point R décrira l'arc Rr , & par conséquent montera plus haut qu'il n'étoit, donc le centre commun de gravité se trouvera plus haut lorsque la balance sera inclinée que lorsqu'elle étoit horizontale; or le centre de gravité de deux corps descend autant qu'il peut lorsqu'il n'en est point empêché, parce que la pesanteur fait descendre les corps lorsqu'elle ne trouve point d'obstacle, & que cette pesanteur se réunit au centre de gravité r , donc si on abandonne la balance dans la position ar , le point r descendra & la balance aussi, & après quelques vibrations que la vitesse acquise lui fera faire, la balance se remettra enfin dans la situation horizontale AB .

PROPOSITION CLIII.

491. Si une balance AB (Fig. 176.) ayant sa languette attachée perpendiculairement & en dessous à son centre de mouvement en un point C de la languette hors de AB , & qu'ayant attaché à ses extrémités deux poids égaux P , Q on vienne à l'incliner, elle descendra jusqu'à ce qu'elle ait pris une position EF parallèle à la première.

DEMONSTRATION.

Si la balance est mise dans une situation horizontale, il est clair que les poids étant égaux de même que les deux bras AR , RB , il doit y avoir équilibre, & que la balance doit être en repos, à cause que le centre de mouvement C se trouvant dans la direction du centre de gravité R empêche ce centre de descendre; mais si on incline la balance & qu'on lui donne, par exemple, la position ab , cela ne peut se faire que le centre de gravité R ne décrive l'arc Rr , & comme alors rien ne l'empêche plus de descendre, à cause que le point C n'est plus dans sa direction, il est constant que ce centre de gravité descendra jusqu'à ce que la balance soit parvenue dans la position EF , & alors par la Proposition précédente, sa vitesse acquise lui fera faire quelques vibrations après lesquelles elle restera dans la position EF .

PROPOSITION. CLIV.

492. Si le centre C de mouvement d'une balance AC (Fig. 177.) est dans le milieu de AB, & qu'ayant attaché aux deux extrémités A, B deux poids égaux P, Q, on mette la balance dans telle position que l'on voudra elle restera toujours en repos.

DEMONSTRATION.

Si la balance est dans une position horizontale la chose est évidente, car les poids étant égaux, & les vitesses étant exprimées par les bras AC, CB perpendiculaires à leurs directions, il est clair que leurs momens seront égaux, & que par conséquent il y aura équilibre.

Mais si la balance est dans une position *ab* inclinée à l'horison, du centre C je tire la droite RS perpendiculaire sur la direction du poids P, & cette droite est aussi perpendiculaire sur la direction du poids Q, à cause que les directions de P & Q sont parallèles, ainsi ces poids agiront sur les bras *aC*, *Cb* de même qu'ils agiroient sur les bras RC, CS; or à cause des triangles semblables *aRC*, *bCS*, on a $RC, CS :: aC, Cb$, donc $RC = CS$, à cause de $aC = Cb$; mais supposant que les poids égaux *p*, *q* soient mis en R & S, leurs vitesses seront exprimées par RC, CS, & seront par conséquent égales, donc leurs momens seront égaux & il y aura équilibre, donc puisque ces poids remis en *a* & *b* agissent sur *aC*, *Cb* de même que sur RC, CS, il s'enfuit qu'ils seront en équilibre, & que par conséquent la balance sera en repos.

PROPOSITION CLV.

493. Construire une balance ordinaire.

SOLUTION.

Prenez une verge de bois ou de fer également épaisse dans toute sa longueur (Fig. 178); divisez là en deux parties égales au point C où vous attacherez le fleau & la languette; mettez aux extrémités A, B deux crochets ou deux bassins d'égale pesanteur, & la balance sera construite.

Si cette balance est mise dans une situation horizontale ou dans telle autre qu'on voudra, il est évident que les deux bassins étant d'égale pesanteur, & les bras AC, CB étant égaux, la balance

sera toujours en repos ; c'est pourquoi si on met dans les bassins des poids d'égale pesanteur , l'équilibre subsistera , & si on en met d'inégaux , l'équilibre ne subsistera plus.

Pour faire usage de cette balance on a plusieurs poids de fer ou de plomb de demi-livre , d'une livre , de deux , de trois , &c. & mettant dans un des bassins la marchandise qu'on veut peser , on met dans l'autre l'un de ces poids jusqu'à ce qu'on en trouve un qui fasse équilibre ; & alors on dit que la marchandise pèse une livre , ou deux , ou trois , &c. ou une once , deux onces , &c. selon qu'elle fait équilibre avec quelqu'un de ces poids.

COROLLAIRE I.

494. Si l'un des bras est plus long que l'autre , la balance est trompeuse ; car les bassins étant égaux , il est clair que celui qui sera à l'extrémité du plus long côté l'emportera toujours sur l'autre , & que par conséquent si l'on met dans l'autre , par exemple , un poids de quatre livres , ce poids pourra faire équilibre avec de la marchandise qui ne pesera pas les quatre livres ; or pour voir si l'on est trompé dans ces occasions , il n'y a qu'à transporter la marchandise dans le bassin du poids , & le poids dans le bassin de la marchandise , & si l'équilibre ne subsiste plus , on sera sur que la balance est trompeuse.

COROLLAIRE II.

495. Une marchandise étant pesée dans une balance trompeuse , on peut trouver le véritable poids de cette marchandise en cette sorte.

Je mets dans le bassin M la marchandise que je veux peser , & cherchant un poids , lequel étant mis dans l'autre bassin N fasse équilibre avec la marchandise , je mets ce poids à part ; je transporte la marchandise dans l'autre bassin N , & comme le poids que j'avois mis dans ce bassin étant transporté dans le bassin M ne fait plus équilibre ; puisqu'on suppose la balance fautive , je cherche un autre poids , lequel étant mis en M soit en équilibre avec la marchandise en N ; je multiplie le poids qui a fait équilibre en N par le poids qui a fait équilibre en M , & la racine quarrée du produit est le véritable poids de la marchandise.

Car quand la marchandise est en M on a AC est à BC comme le poids en N est à la marchandise ; & quand la marchandise est en N on a AC est à BC comme la marchandise est au poids en

M ; donc puisque dans ces deux proportions les deux premieres raisons sont les mêmes , les deux secondes raisons sont égales , c'est-à-dire le poids en N est à la marchandise comme la marchandise est au poids en M ; ainsi la marchandise est moyenne proportionnelle entre le poids en N & le poids en M ; donc multipliant ces deux poids , & tirant la racine quarrée on a le véritable poids de la marchandise.

Soit le poids en M = 10 lb , & le poids en N = 9 , le produit de l'un par l'autre est 90 , dont la racine quarrée qui est environ $9\frac{4}{100}$ est le véritable poids de la marchandise.

COROLLAIRE III.

496. Le véritable poids de la marchandise étant trouvé , il est facile de connoître la raison des deux bras AC, CB ; car mettant la marchandise en M , on a le poids en N , est à la marchandise en M comme AC est à CB ; or le poids en N est 9 & la marchandise $9\frac{4}{100}$, donc AC est à CB comme 9 est à $9\frac{4}{100}$, ou comme 900 à 948.

COROLLAIRE IV.

497. La raison des bras AC, CB étant connue , on connoitra aisément de combien l'un des bras excède l'autre ; par exemple , AC est à CB comme 900 à 948 , donc si l'on divise le joug entier AB de la balance en 1848 parties égales , le bras CB en aura 48 d'excès.

COROLLAIRE V.

498. Connoissant la raison des bras , on peut connoître l'erreur commise en pesant une telle quantité de marchandise que l'on voudra ; par exemple , AC est à CB comme 900 à 948 , ou 225 à 237 ; si donc on met en M une quantité de marchandise qu'on ait trouvé peser 100 lb en se servant du moyen indiqué dans le second Corollaire , on n'a qu'à faire cette analogie 237 , 225 :: 100 , 95 , & le dernier terme marque que la marchandise ne peseroit qu'environ 95 lb si la balance étoit juste ; or elle pèse 100 lb , donc la balance trompe de 5 lb ou environ sur 100 lb.

REMARQUE.

499. Dans les balances ordinaires on met le centre de mouvement un peu au-dessus du joug AB , afin que lorsque les poids

sont en équilibre, la balance se remettra toujours dans la situation horizontale au cas qu'on vienne à la pancher selon ce qui a été dit (N. 490).

DE LA ROUE DANS SON AISSIEU.

PROPOSITION CLVI.

500. Si une puissance a (Fig. 179.) soutient un poids P par le moyen d'un aissieu dans sa Roue, & que la direction de la puissance soit tangente au cercle ADN, la puissance est au poids comme le rayon BC de l'aissieu ou treuil est au rayon AB de la Roue.

La figure 179. ne représente que le profil de la machine; mais il faut concevoir que l'axe ou treuil est saillant comme dans la figure 158. & que le poids est attaché à la circonférence de cet axe, en sorte que quand la roue tourne, la corde s'entortille autour de l'axe, & le poids monte; cela posé.

DEMONSTRATION.

Supposons d'abord que la direction de la puissance a , & celle du poids P soient perpendiculaires à la droite AC parallèle à l'horizon; le centre de mouvement étant en B, la vitesse de la puissance A sera exprimée par le rayon AB, & la vitesse du poids P par le rayon BC, donc le moment de a sera $a \times AB$, & celui de P sera $P \times BC$; or par la supposition ces deux momens sont égaux, donc on aura $a \times AB = P \times BC$, & par conséquent $a, P :: BC, AB$.

Maintenant supposons que la puissance soit appliquée en D; la direction de cette puissance sera perpendiculaire au rayon BD, puisqu'elle est tangente au point D, & la direction de P sera perpendiculaire au rayon BC qui est horizontal; considérant donc DBC comme un levier recourbé, la vitesse de a sera exprimée par DB, & la vitesse de P par BC; donc on aura $a \times DB = P \times BC$ par la supposition, & par conséquent $a, P :: BC, AB$.

COROLLAIRE I.

501. Si dans tous les points de la roue, la puissance tire avec des directions parallèles à la direction CP du poids, la puissance selon cette direction parallèle sera à elle-même selon la direction perpendiculaire au rayon de la roue comme le sinus de complément de l'angle d'inclinaison

naïson DBA fait par le rayon auquel la puissance est attachée, & le rayon BA horizontal est au sinus droit ou rayon total.

Quand la puissance appliquée en D tire selon la direction DR parallèle à PC, elle n'agit sur le bras DB du levier DBC, que comme elle agiroit sur le bras RB du levier RC perpendiculaire à sa direction; ainsi sa vitesse est exprimée par RB, & son moment ou la force qu'elle emploie est $a \times RB$; mais quand la direction de cette même puissance est tangente, & par conséquent perpendiculaire à DB, sa vitesse est exprimée par DB, & son moment ou sa force est $a \times DB$; ainsi la force qu'elle emploie selon la direction DR est à la force qu'elle emploie selon la direction perpendiculaire à DB comme $a \times RB$ est à $a \times DB$, ou comme RB est à DB; or si dans le triangle rectangle RDB, on prend pour sinus total le rayon DB, le côté RB sera le sinus de l'angle RDB qui est le complément de l'angle DBR d'inclinaison; donc la force que la puissance emploie selon la direction DR, est à celle qu'elle emploie selon la direction perpendiculaire à DB, comme le sinus de complément RB de l'angle d'inclinaison DBA est au sinus total.

COROLLAIRE II.

502. Si l'on nomme l'angle RDB *angle de direction*, on dira que la force employée par la puissance A avec une direction oblique RD est à la force qu'elle emploie avec une direction perpendiculaire, comme le sinus de l'angle de direction est au sinus droit.

Et ceci doit s'entendre non-seulement quand l'angle de direction est aigu, mais encore quand il est obtus; car supposons que la puissance tire selon la direction DV qui fait avec le rayon DB l'angle obtus VDB, je mène du centre B la droite BT perpendiculaire à cette direction, & par conséquent la puissance n'agit pas plus sur DB, qu'elle n'agiroit sur le bras TB du levier recourbé TBC, ainsi son moment est $a \times TB$; or son moment selon la direction perpendiculaire à DB, est $a \times DB$, donc ces deux momens sont comme $a \times TB$, $a \times DB$, ou comme TB, DB; prenant donc dans le triangle rectangle DTB l'hypothénuse DB pour rayon total, le côté TB sera le sinus de l'angle BDT, & par conséquent le sinus de l'angle de direction BDV qui est le complément à deux droits de l'angle BDT; donc la force que la puissance emploie selon la direction VD est à celle qu'elle emploie selon

Ecc

la direction perpendiculaire à DB, comme le sinus de l'angle de direction TDB est au sinus total.

COROLLAIRE III.

503. Quand l'angle de direction RDB est aigu, plus cet angle devient petit, plus aussi le sinus RB est moindre par rapport au sinus total DC ou AC, & jamais aucun de ces sinus RB n'est égal au total excepté le cas, où l'angle RDB devient droit; donc la puissance n'emploie jamais plus de force que lorsque l'angle de direction est droit, c'est-à-dire, lorsque la direction est perpendiculaire au rayon.

De même, quand l'angle de direction VDB est obtus, plus cet angle devient grand, & plus l'angle de complément BDT devient moindre; donc le sinus de cet angle ou de l'angle VDB devient aussi moindre par rapport au sinus total, & jamais ce sinus ne devient égal au sinus total, excepté le cas où l'angle VDB devient droit; donc jamais la puissance A n'emploie tant de force que lorsque l'angle VDB, c'est-à-dire lorsque la direction est perpendiculaire au rayon.

COROLLAIRE IV.

504. Avec quelque direction que la puissance A tire la roue, les forces qu'elle emploie selon ces différentes directions, sont entr'elles comme les distances des directions au centre du mouvement B.

Quand la direction de A est perpendiculaire à DB, la distance de la direction au point B est DB, la vitesse est DB & le moment ou la force est $a \times DB$; quand la direction DR est oblique & fait un angle aigu, la distance de cette direction au centre B est RB, & le moment ou la force est $a \times RB$; enfin quand la direction VD fait un angle obtus, la distance de cette direction au centre B est TB, & le moment ou la force est $a \times TB$; donc ces trois différentes forces sont comme $a \times DB$, $a \times RB$, $a \times TB$, ou comme DB, RB, TB, donc, &c.

COROLLAIRE V.

505. Quand la puissance a toujours perpendiculaire au rayon aura fait faire une révolution au cercle ADN, la corde qui soutient le poids se sera entortillée autour du treuil, de façon que le poids P aura parcouru un espace égal à la circonférence de ce treuil, & par conséquent moindre que l'espace parcouru par la puissance ou que la circonférence ADNA; ainsi plus la circonférence

ADNA sera grande par rapport à la circonférence du treuil, moins aussi l'espace parcouru par le poids sera grand par rapport à l'espace décrit par la puissance, d'où il suit que si cette machine augmente la force, elle diminue le mouvement du poids, & que par conséquent elle fait perdre du tems.

On doit dire la même chose des leviers de la première & seconde espèce.

COROLLAIRE. VI.

506. Connoissant le poids P qu'on veut appliquer au treuil; on connoitra donc la puissance *a* qu'il faut lui appliquer avec une direction perpendiculaire pour soutenir ce poids en faisant AB, BC :: P, $\frac{P \times BC}{AB} = a$.

Et de même, si la puissance *a* étoit connue, on connoitroit le poids P qu'elle peut soutenir, en faisant BC, AB :: *a*, $\frac{a \times AB}{BC} = P$.

REMARQUE.

507. Quand le poids est extrêmement grand, la puissance *a* demande aussi une distance AB extrêmement grande, & par conséquent il faudroit alors faire une roue prodigieuse; or pour obvier à cet inconvénient, on se sert de plusieurs roues dentées dont nous allons parler.

DES ROUES DENTÉES.

508. Les Roues dentées ne different de la roue dans son aissieu; qu'en ce que leur circonférence est faite à dents (Fig. 180.), on en met ordinairement plusieurs ensemble comme on voit ici; tandis que la première raye tourne de B vers A, les dents de son aissieu C font tourner la seconde roue de F vers E, & les dents de l'aissieu G de cette seconde roue, font tourner la troisième de L vers I; or si celle-ci est la dernière, son aissieu n'a point de dents, parce que c'est à cet aissieu qu'on attache le poids P, lequel monte à mesure que sa corde s'entortille autour de l'aissieu.

PROPOSITION CLVII.

509. Si une puissance dont la direction est perpendiculaire au rayon soutient un poids par le moyen de plusieurs roues dentées, la puissance est au poids en raison composée des rayons des aissieux & des rayons

E e e i j

des roues, c'est-à-dire, comme le produit des rayons des aissieux au produit des rayons des roues (Fig. 180.)

DEMONSTRATION.

Supposons d'abord qu'il n'y ait que la roue IL, & que la puissance soit appliquée perpendiculairement au rayon IO selon la direction, le poids P sera à la puissance comme le rayon IO est au rayon OR ; donc $IO, OR :: P, \frac{P \times OR}{IO}$, & ce quatrième terme sera la force de la puissance en I. Supposons une seconde roue par le moyen de laquelle la puissance mise en F selon la direction Ff supplée à la force de la puissance en I, il est visible qu'en ôtant la puissance mise en I, l'aisseau G de cette seconde roue fera le même effet que cette puissance, & par conséquent la puissance mise en F contrebalançant cette force par la supposition, on aura $FG, GI :: \frac{P \times OR}{IO}, \frac{P \times OR \times GI}{IO \times FG}$, & ce quatrième terme sera la force que la puissance mise en F fera pour tenir l'équilibre. Mettons une troisième roue par le moyen de laquelle la puissance mise en A selon la direction Aa supplée à la force de la puissance mise en F, il est encore évident que cette puissance en A faisant équilibre, on aura $AC, CF :: \frac{P \times OR \times GI}{IO \times FG}, \frac{P \times OR \times GI \times CF}{IO \times FG \times AC}$, & ce quatrième terme sera la puissance mise en A ; ainsi cette puissance est au poids P qu'elle soutient par le moyen des trois roues comme $\frac{P \times OR \times GI \times CF}{IO \times FG \times AC}$ est à P, ou comme $P \times OR \times GI \times CF$ est à $P \times IO \times FG \times AC$, ou enfin comme $OR \times GI \times CF$ est à $IO \times FG \times AC$, ou en raison composée des rayons OR, GI, CF, des aissieux aux rayons OI, FG, AC, des roues, ou enfin comme le produit des rayons des aissieux multipliés les uns par les autres, au produit des rayons des roues multipliés les uns par les autres.

COROLLAIRE I.

510. Connoissant le poids P & le nombre des roues, on connoitra donc la puissance, en faisant le produit $OR \times GI \times CF$ des rayons des aissieux, & le produit $OI \times GF \times CA$ des rayons des roues, puis faisant comme le produit des rayons des roues est à celui des rayons des aissieux ; ainsi le poids est à un quatrième terme qui sera la puissance qu'il faut mettre en A pour soutenir le poids P.

COROLLAIRE II.

§ 11. De même connoissant la puissance & le nombre des roues, on connoitra le poids en faisant comme le produit du rayon des aissieux est au produit des rayons des roues; ainsi la puissance est à un quatrième terme qui sera le poids cherché.

COROLLAIRE III.

§ 12. Connoissant la puissance & le poids, on trouvera le nombre des roues qu'il faut employer pour faire équilibre en cette sorte.

Je divise le poids par la puissance, & je cherche les diviseurs du quotient, lesquels en se multipliant produisent ce quotient, ces diviseurs marqueront le nombre des roues qu'il faut employer & les rapports de leur rayons à leur axes que je suppose être égaux chacun à leur unité.

Pour démontrer ceci, il n'y a qu'à observer qu'en divisant le poids par la puissance, on a cette analogie par la nature de la division: l'unité est au quotient comme la puissance est au poids; ainsi la puissance est au poids en raison composée des raisons de l'unité à chaque diviseur du quotient; c'est pourquoi si je prens les rayons des aissieux égaux chacun à l'unité, & les rayons des roues égaux aux diviseurs du quotient, la puissance sera au poids en raison composée des raisons des rayons des aissieux & des rayons des roues; donc, &c.

Soit le poids $P = 30000$, & la puissance $A = 60$, divisant l'un par l'autre, le quotient sera 500 dont les diviseurs sont 4, 5, 5, 5; donc il faudra employer quatre roues ayant chacune le rayon de l'aisieu égal à 1, & les rayons des roues seront 4, 5, 5, 5, & en effet, la raison du rayon du premier aissieu au rayon de la première roue est 1, 4; la raison du rayon du second aissieu au rayon de la seconde roue est 1, 5; dans la troisième roue, la raison est encore 1, 5, & dans la quatrième aussi, on a 1, 5; faisant donc la raison composée de ces quatre raisons, on aura 1, 500; or puisque la puissance est au poids comme le produit des rayons des aissieux est à celui des rayons des roues, on a donc 1, 500 :: 60, 30000.

COROLLAIRE IV.

§ 13. Si le poids ne pouvoit se diviser exactement par la puissance, ou si la division étant exacte, le quotient étoit un nombre premier qui n'eût point de diviseur, on pourroit ajouter une

ou plusieurs unités au quotient ; car delà il n'arrivera autre chose ; sinon que les rayons des roues deviendront plus grands par rapport aux rayons des aissieux , & que par conséquent la puissance deviendra plus grande qu'il ne faut pour soutenir le poids , ce qui n'est pas un mal , parce que ces machines ne se font pas pour soutenir seulement le poids , mais pour l'élever.

COROLLAIRE V.

§ 14. *Si une puissance A soutient un poids P, le nombre des révolutions de la roue qui se meut le plus vite est au nombre de révolutions de la roue qui se meut le plus lentement en raison composée des raisons des circonférences des roues que les aissieux rencontrent & des circonférences de ces aissieux.*

Supposons d'abord qu'il n'y ait que les deux roues FG, IO, il est visible que la roue FG se meut plus vite que la roue IO ; car tandis que la roue FG fait une révolution, son aissieu ne fait non plus qu'une révolution ; or la roue IO ne se mouvant que par l'effort que l'aissieu GI fait sur elle, il est encore visible que tous les points de la circonférence de l'aissieu GI s'appliquent successivement sur la circonférence de IO ; & comme la circonférence de GI est moindre que celle de IO, il s'ensuit que quand la révolution sera achevée, la circonférence de GI ne se sera appliquée successivement que sur une partie de la circonférence de IO ; ainsi IO n'aura fait que la partie de sa révolution correspondante à la circonférence de GI ; par exemple, si la circonférence de GI n'est que le quart de la circonférence de IO, la roue IO n'aura fait que le quart de sa révolution, & ainsi des autres.

Cela posé, il est aisé de conclure que le nombre des révolutions de la roue FG est au nombre des révolutions de IO réciproquement comme la circonférence de IO est à la circonférence de l'aissieu GI ; car supposant, par exemple, que la circonférence de GI ne soit que le quart de la circonférence de IO, l'aissieu GI fera donc quatre révolutions, tandis que IO n'en fera qu'une, mais la roue FG fera aussi quatre révolutions ; donc le nombre des révolutions de FG est au nombre des révolutions de IO, comme 4 est à 1, & par conséquent comme la circonférence de IO est à la circonférence de GI.

Maintenant, supposons qu'il y ait trois roues, on prouvera de même que ci-dessus que la roue AC se meut plus vite que les

autres, & la roue IO plus lentement ; ainsi nommant m la circonférence de la roue IO, n la circonférence de la roue FG, a la circonférence de l'aissieu GI, & b la circonférence de l'aissieu CF, & supposant que la roue IO ait fait une révolution, nous aurons par le cas précédent comme la circonférence de l'aissieu GI est à la circonférence de IO ; ainsi le nombre des révolutions de IO, c'est-à-dire 1 est au nombre des révolutions de FG, donc $a, m :: 1, \frac{m}{a} =$ nombre des révolutions de FG ; par la même raison, nous aurons comme la circonférence de l'aissieu CF est à la circonférence de la roue FG ; ainsi le nombre des révolutions de FG est au nombre des révolutions de AC ; donc $b, n :: \frac{m}{a}, \frac{nm}{ba} =$ nombre des révolutions de AC ; donc le nombre des révolutions de AC est au nombre des révolutions de IO comme $\frac{nm}{ba}$ est à 1, ou comme nm est à ba , c'est-à-dire en raison composée de la raison des circonférences m, a , & n, b ; donc, &c.

COROLLAIRE VI.

515. Comme les dents & les intervalles des dents doivent être égaux dans les roues & dans les aissieux, afin qu'elles puissent s'enchasser aisément les unes dans les autres, il est clair que les nombres des dents d'une roue, par exemple de la roue IO est au nombre des dents d'un aissieu, par exemple GI comme la circonférence de IO est à la circonférence de GI, & ainsi des autres ; or par le Corollaire précédent, le nombre de révolutions de la roue qui a le plus de vitesse, est au nombre des révolutions de celle qui se meut le plus lentement en raison composée des raisons des circonférences rencontrées par les aissieux & des circonférences de ces aissieux ; donc ces nombres de révolutions sont aussi en raison composée des nombres des dents des roues rencontrées par les aissieux, & des nombres des dents de ces aissieux.

COROLLAIRE VII.

516. Les rayons étant entr'eux comme les circonférences, il s'ensuit que le nombre des révolutions de la roue qui a le plus de vitesse est au nombre de révolutions de celle qui se meut le plus lentement en raison composée des rayons des roues que les aissieux rencontrent, & des rayons de ces aissieux.

COROLLAIRE VIII.

517. Connoissant le nombre des révolutions que fait la roue qui a le plus de mouvement dans le tems que la roue la plus lente fait une révolution, on connoitra le nombre des dents qu'il faut donner à chaque roue & à chaque aissieu en cette sorte.

Je prens les diviseurs du nombre des revolutions de la premiere, lesquels en se multipliant produisent ce nombre, & le nombre de ces diviseurs marque combien il doit y avoir de roues, & les diviseurs marquent la grandeur de leurs rayons. Je fais chaque aissieu égal à 1, & leur donnant à chacun un même nombre de dents, je multiplie le nombre de dents de chaque aissieu par le diviseur ou par le rayon correspondant, & le produit est le nombre de dents que je dois donner à la roue correspondante, ce que je prouve ainsi.

La revolution de la roue la plus lente, est au nombre des revolutions de la roue qui a le plus de mouvement en raison composée des raisons des rayons des aissieux qui rencontrent les roues, & des rayons de ces roues; or les rayons des aissieux étant supposés égaux chacun à l'unité, la revolution de la roue la plus lente est au nombre des revolutions de celle qui a le plus de mouvement, comme le produit des rayons des aissieux, lequel est 1, est au produit des rayons des roues, lequel par conséquent est égal au nombre des revolutions de la roue qui a le plus de mouvement. Prenant donc les diviseurs de ce nombre, ces diviseurs marqueront les rayons des roues, & par conséquent le nombre des roues qui doivent être rencontrées par les aissieux; or le rapport des rayons des aissieux aux rayons des roues qu'ils doivent rencontrer étant connu, si on détermine le nombre des dents qu'on veut donner à chaque aissieu, il est visible qu'en multipliant ce nombre de dents par celui qui exprime le rapport du rayon de la roue au rayon de l'aissieu correspondant, le produit sera le nombre des dents qu'il faut donner à cette roue.

Soit par exemple, le nombre des revolutions de la premiere roue $CA = 40$, les diviseurs de ce nombre, qui en se multipliant le produisent, peuvent être 2, 10, 10, ou 2, 20, ou 5, 8, je choisis ces deux derniers, ce qui me fait voir qu'il y aura deux roues dentées dont les rayons seront 5 & 8, & deux aissieux, dont les rayons seront chacun 1, ainsi il y aura en tout trois roues, car la premiere n'étant rencontrée par aucun aissieu, peut n'être pas

pas dentée si l'on veut; or si je donne six dents à chaque aissieu CF, GI, la roue FG en aura 30, à cause que 5 fois 6 font 30, & la roue 8 en aura 48, & pour voir si cela est juste, il n'y a qu'à faire le produit des dents des aissieux lequel est 36, & le produit des dents des roues, lequel est 1440, & la raison 36, 1440 doit exprimer la raison du nombre des revolutions de la roue la plus lente 10 au nombre des revolutions de la roue AC, c'est-à-dire, que cette raison doit être comme 1 à 40; or cela est en effet, car la raison 36, 1440 étant divisée par 36, se réduit à la raison 1, 40, donc, &c.

COROLLAIRE IX.

518. *L'espace parcouru par le poids P est à l'espace parcouru par la puissance A comme la puissance est au poids.*

Je nomme m, n, r les circonférences des trois roues IO, FG, AC, & a, b, c , les circonférences des trois aissieux TO, IG, CF; par les Corollaires précédens le nombre des revolutions de la roue IO est au nombre des revolutions de la roue AC comme bc est à mn ; supposant donc que la roue IO ne fasse qu'une revolution, on aura $bc, mn :: 1 \frac{mn}{bc} =$ nombre de revolutions de la roue AC; or dans chaque revolution de cette roue la puissance décrit la circonférence du cercle AC; multipliant donc cette circonférence par le nombre de revolutions, le produit $\frac{rmn}{bc}$ sera l'espace parcouru par la puissance; or la roue IO n'ayant fait qu'une revolution par l'hypothèse, l'espace parcouru par le poids sera égal à la longueur de la corde qui se sera entortillée à l'axe OT, & par conséquent cet espace sera égal à la circonférence de cet axe, donc l'espace parcouru par le poids sera à l'espace parcouru par la puissance comme a est à $\frac{rmn}{bc}$, ou comme abc est à rmn , & mettant dans ce rapport les rayons au lieu de leurs circonférences a, b, c, r, m, n , l'espace parcouru par le poids est à l'espace parcouru par la puissance, comme $TO \times IG \times FC$ est à $IO \times FG \times AC$; or ce rapport est le même que le rapport de la puissance au poids (N. 509), donc l'espace parcouru par le poids est à l'espace parcouru par la puissance comme la puissance est au poids.

COROLLAIRE X.

519. Plus on multiplie les roues, plus la puissance devient
Fff

moindre par rapport au poids, & par conséquent l'espace parcouru par le poids devient aussi moindre par rapport à l'espace parcouru par la puissance, ce qui fait voir que si l'on gagne du côté de la force en multipliant les roues, on perd aussi du côté du tems qu'il faut employer pour faire monter le poids.

COROLLAIRE XI.

520. Les espaces parcourus par le poids & la puissance sont en raison composée des nombres de revolution des roues IO, AC, & de la circonférence de l'aissieu OT à la circonférence de la roue AC.

Soit le nombre des revolutions de la roue IO la plus lente $=m$, le nombre des revolutions de la roue AC qui a le plus de mouvement $=n$; la circonférence de l'aissieu de la roue IO $=a$, & la circonférence de la roue AC $=b$; dans chaque revolution de la roue IO le poids P parcourt un espace $=a$; ainsi am est l'espace parcouru pendant les revolutions de cette roue, de même dans chaque revolution de la roue AC la puissance parcourt la circonférence b , donc bn est l'espace parcouru pendant les revolutions de cette roue, & par conséquent l'espace parcouru par le poids est à l'espace parcouru par la puissance, comme am est à bn , donc, &c.

COROLLAIRE XII.

521. Par le Corollaire précédent l'espace du poids est à l'espace de la puissance en raison composée des nombres de revolutions des roues IO, AC, & des circonférences de l'aissieu OR & de la roue AC; or par le Corollaire 9 ces mêmes espaces sont comme la puissance est au poids, donc la puissance est au poids en raison composée des nombres de revolution des roues IO, AC, & des circonférences de OR, AC.

PROPOSITION CLVIII.

522. Connoissant la circonférence de la roue AC qui a le plus de mouvement, le nombre de ses revolutions, le rapport de sa circonférence à la circonférence de l'aissieu OT de la roue la plus lente, & le rapport du nombre des revolutions de la roue AC au nombre des revolutions de la roue OI, connoître l'espace que le poids parcourt.

SOLUTION.

Je multiplie la circonférence de la roue AC par le nombre de

ses revolutions, & le produit est l'espace parcouru par la puissance (*N.* 520); or le rapport de la circonférence de cette roue à la circonférence de l'aisseau OT étant connu, je prens une quatrième proportionnelle aux deux termes de ce rapport & à la circonférence de AC, & cette quatrième proportionnelle est la circonférence de l'aisseau OT; de même le rapport du nombre des revolutions de la roue AC au nombre des revolutions de la roue OI, ou de l'aisseau OT étant connu; je prens une quatrième proportionnelle aux deux termes de ce rapport & au nombre des revolutions de la roue AC, & cette quatrième proportionnelle est le nombre des revolutions de la roue OI; je multiplie ce nombre de revolutions par la circonférence trouvée de l'aisseau OT, & le produit est l'espace cherché du poids P (*N.* 520).

Soit la circonférence de la roue AC = 10, & le rapport de cette circonférence à celle de l'aisseau OT comme 8 à 3; donc 8, 3 :: 10, $\frac{10}{3}$ = circonférence de OT; soit le nombre des revolutions de la roue AC = 28, & le rapport de ce nombre à celui des revolutions de la roue OI, comme 7 à 2; donc 7, 2 :: 28, $\frac{28}{7} = 8$ = nombre des revolutions de la roue OI; multipliant donc la circonférence OT = $\frac{10}{3}$ par le nombre des revolutions de la roue OI = 8, le produit 30 est l'espace parcouru par le poids.

COROLLAIRE I.

523. Connoissant l'espace que le poids parcourt, les circonférences de l'axe OT & de la roue AC, & la raison des nombres de revolutions des roues OI, AC, on connoitra l'espace que la puissance doit parcourir en cette sorte.

Je divise l'espace que le poids parcourt par la circonférence de l'axe OT, & le quotient est le nombre des revolutions de cet axe (*N.* 520); or la raison des nombres de revolutions de OT, AC étant connu, je cherche une quatrième proportionnelle aux deux termes de cette raison & au nombre des revolutions de OT, & cette quatrième proportionnelle est le nombre des revolutions de la roue AC; c'est pourquoi multipliant ce nombre par la circonférence de AC, le produit est l'espace parcouru par la puissance soit l'espace parcouru par le poids = 30, la circonférence de l'axe OT = $\frac{10}{3}$, celle de la roue AC = 10, & la raison des nombres de revolutions de OT, AC, comme 2 à 7; je divise l'espace 30 parcouru par le poids par la circonférence $\frac{10}{3}$ de l'axe OT, & le

quotient 8 est le nombre des revolutions de cet axe ; c'est pour-
quoi je fais $2, 7 : : 8, \frac{1}{2} = 28$, & ce quatrième terme 28 est le
nombre des revolutions de la roue AC ; multipliant donc ce
nombre par la circonférence 10 de AC, le produit 280 est l'es-
pace que la puissance doit parcourir.

COROLLAIRE II.

524. Connoissant la raison de la circonférence de AC & de la
circonférence de OT, la raison du nombre des revolutions de
l'une & de l'autre & le poids P, on connoitra la puissance A en
cette sorte.

Je multiplie les antecedens des deux raisons l'un par l'autre,
& les deux conséquens de même, & les deux produits marquent
la raison des espaces parcourus par la puissance & par le poids
(N. 520), je prens une quatrième proportionnelle aux deux ter-
mes de cette raison & au poids, & cette quatrième proportion-
nelle est la puissance demandée (N. 321).

Soit la raison des circonférences 8, 3, celles des nombres de
revolutions 7, 2, dont la raison composée 56, 6 marque le rap-
port des espaces parcourus par la puissance & le poids ; soit le
poids = 2000, je fais $56, 6 : : 2000, \frac{1}{56} = 214 \frac{2}{7}$ = puissance
cherchée.

Je laisse grand nombre d'autres questions de cette nature qu'on
peut résoudre avec la même facilité.

COROLLAIRE III.

525. Connoissant le nombre des revolutions que fait la roue
AC qui a le plus de mouvement tandis que la roue OI fait une re-
volution, connoissant aussi la circonférence de l'aissieu OT &
l'espace auquel on veut élever le poids, on connoitra le tems
qu'il faut employer pour cela en cette sorte.

Si l'espace que le poids doit parcourir est égal à la circonfé-
rence de l'axe OT, je cherche par l'expérience en combien de
tems la roue AC fait une revolution, & ce tems étant trouvé, je
multiplie le nombre connu des revolutions par ce tems & le quo-
tient est le tems cherché.

Supposons, par exemple, que AC fût trois revolutions &
demi tandis que OI n'en fait qu'une, & que le tems que AC em-
ploie à faire une revolution soit 2 minutes, je multiplie $3 \frac{1}{2}$ par

2, ce qui fait 7, & je dis qu'il faudra 7 minutes pour faire parcourir au poids l'espace proposé.

Si l'espace que le poids doit parcourir est plus grand que la circonférence de l'aissieu OT, je divise l'espace par la circonférence de cet aissieu, & le quotient marque le nombre de revolutions que l'aissieu OT ou la roue OI doit faire; ainsi multipliant le nombre des revolutions que la roue AC fait pendant une revolution de OT par le quotient trouvé; le produit est le nombre de revolutions que AC doit faire jusqu'à ce que le poids ait parcouru l'espace proposé; je cherche donc par l'expérience combien de tems la roue AC employe à une de ses revolutions, & multipliant ce tems par le nombre des revolutions que je viens de trouver, le produit est le tems cherché.

Supposons, par exemple, que AC fasse trois revolutions & demi, tandis que OT n'en fait qu'une, & que l'axe OT étant = 2, l'espace que le poids doit parcourir soit = 8; divisant donc 8 par 2, le quotient 4 me fait voir que OT doit faire 4 revolutions, & multipliant $3\frac{1}{2}$ par 4, le produit 14 me fait voir que la roue AC doit faire 14 revolutions; ainsi sachant par expérience que la roue AC fait une revolution, par exemple dans deux minutes, je multiplie 14 par 2, & le produit 28 me fait voir qu'il faudra 28 minutes pour faire parcourir au poids l'espace proposé.

D E L A P O U L I E.

PROPOSITION CLIX.

526. Si une puissance P (Fig. 181.) soutient un poids Q par le moyen d'une poulie ABH, & que la direction de l'un & de l'autre soit tangente de la poulie, la puissance est égale au poids.

DEMONSTRATION.

Je mène le diamètre AH perpendiculaire aux deux directions; & par conséquent la puissance agit sur la poulie comme elle agiroit sur le rayon AO, & le poids comme il agiroit sur le rayon OH, donc ces deux rayons expriment les vitesses de la puissance & du poids; or ces deux rayons sont égaux, & par la supposition la puissance & le poids sont en équilibre, donc leurs momens sont égaux, ainsi $P \times AO = Q \times OH$, donc $P, Q :: OH, AO$, & par conséquent $P = Q$.

Fff üj

Si la direction MV de la puissance n'étoit pas perpendiculaire au point A , mais qu'elle fût perpendiculaire au point M , on meneroit le rayon OM , & on trouveroit de même que la puissance seroit égale au poids; car le rayon OM exprimeroit la vitesse de la puissance, & le rayon OH la vitesse du poids; ainsi par la supposition on auroit $P \times OM = Q \times OH$, & par conséquent $P, Q :: OH, OM$, donc $P = Q$.

R E M A R Q U E.

§ 27. La poulie n'augmente donc point la force quand les directions de la puissance sont perpendiculaires à la circonférence, mais elle sert à changer la direction de la puissance sans lui faire perdre de sa force; par exemple, pour élever le poids Q sans poulie, il faudroit que la puissance agit selon la direction QH , au lieu qu'en employant la poulie elle agit selon la direction AP qui est directement opposée à la précédente; on peut de même donner à la puissance une direction oblique MV ou horizontale BT , &c. selon que l'occasion le demandera.

PROPOSITION CLX.

§ 28. Si un poids Q est suspendu au centre O de la poulie (Fig. 182); & qu'une puissance P dont la direction est tangente du cercle soutienne ce poids par le moyen d'une corde $PRVST$ arrêtée fixement en T , la puissance est au poids comme 1 à 2.

D E M O N S T R A T I O N.

Supposons que le diamètre RS fût dans la position XZ , & que par conséquent le centre O fût en V , ce centre ne pourroit monter de V en O que le poids & la puissance ne parcourussent chacun un espace égal à VO ; or quand le centre seroit parvenu en O la corde TZ se seroit abrégée de la quantité SZ égale à VO , & cette quantité auroit passé du côté de la puissance P dont la puissance P auroit parcouru une autre espace égal à VO , & par conséquent elle auroit parcouru deux espaces égaux à VO ou $2VO$; mais les espaces parcourus par le poids & la puissance expriment leurs vitesses, & par la supposition les momens du poids & de la puissance sont égaux, donc $P \times 2VO = Q \times VO$, d'où l'on tire $P, Q :: VO, 2VO :: 1, 2$.

COROLLAIRE I.

529. On peut faire qu'une même puissance soit à un même poids comme 1 à 1, comme 1 à 2, comme 1 à 4, comme 1 à 8, &c. selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. en multipliant les poulies & les arrangeant comme on les voit ici (*Fig. 183*), en sorte que les brins de corde RH, TM, VN, &c. soient attachés fixement aux points R, T, V, &c. car s'il n'y avoit que la poulie A, & que la puissance P soutint le poids Q mis en S, la puissance seroit au poids comme 1 à 1 (*N. 526*); s'il y avoit deux poulies A, O, & que le poids fût suspendu au centre O, la puissance P seroit au poids Q, comme 1 à 2 (*N. 528*); s'il y avoit trois poulies A, O, E, & que le poids fût suspendu au centre E, la vitesse de la puissance doubleroit encore, de sorte que nommant u la vitesse du poids, celle de la puissance seroit $4u$, & par conséquent le moment de la puissance seroit $P \times 4u$, & celle du poids $Q \times u$, d'où l'on tire $P, Q :: u, 4u :: 1, 4$; s'il y avoit quatre poulies A, O, E, C, & que le poids fût suspendu au centre C; la vitesse de la puissance doubleroit encore, & par conséquent elle seroit $8u$; donc le moment de la puissance seroit $P \times 8u$, & celui du poids $Q \times u$, d'où l'on tire $P, Q :: u, 8u :: 1, 8$, & ainsi de suite.

COROLLAIRE II.

530. Si deux ou plusieurs poulies O, T (*Fig. 184.*) ont leurs aissieux dans une même piece de bois ou de fer AB, & qu'un même nombre de poulies aient leurs aissieux dans une autre piece de bois ou de fer CD détachée de la première, je dis que la puissance P qui soutient le poids Q par le moyen des cordes passées, comme on le voit ici, est à ce poids comme l'unité est au nombre des brins de corde que le poids tire, c'est-à-dire aux nombres des cordes HF, IG, LM, NB.

Supposons que le centre V de la poulie GF soit monté de Z en V, & que par conséquent le poids soit monté d'autant, les deux cordes Hf, Ig se seront abrégées des quantités Ff, Gg égales chacune à ZV; or par la construction les cordes LM, BN se seront aussi abrégées d'autant, & toutes ces parties de cordes auront passé du côté de la puissance P, donc la puissance P aura parcouru un espace égal à $4ZV$, mais les espaces parcourus par la puissance & le poids marquent leurs vitesses, & par

la supposition les momens de la puissance & du poids sont égaux ; donc $P \times 4ZV = Q \times ZV$, d'où l'on tire $P, Q :: ZV, 4ZV :: 1, 4$, ou comme l'unité au nombre 4 des cordes que le poids tire.

COROLLAIRE III.

531. Si au lieu de faire passer la corde que la puissance P tire par la poulie d'en haut, on la fait passer par la poulie d'embas GF (Fig. 185), la puissance P sera au poids Q comme l'unité est à toutes les cordes.

Car-tandis que le centre V sera monté de Z en V , le poids & la puissance seront montés chacun d'une quantité égale à ZV , de plus la corde Hf se fera abrégée de la partie Ff , laquelle sera passée du côté de la puissance, & par conséquent cette puissance sera montée d'une quantité égale à $2ZV$; or la poulie NM étant montée aussi d'une quantité égale à ZV par la construction de la machine, les deux cordes aN, LM se feront aussi abrégées chacune d'une quantité égale à ZV , & la corde IC se fera aussi abrégée d'autant, ce qui fait en tout trois parties de cordes égales chacune à ZV , lesquelles seront passées du côté de la puissance, & ces trois parties égales aux deux précédentes feront en tout 5 ; de sorte que quand le poids aura parcouru un espace égal à ZV , la puissance aura parcouru un espace égal à $5ZV$ ou à l'espace ZV pris autant de fois qu'il y a de cordes, donc, &c.

COROLLAIRE IV.

532. On peut encore gagner beaucoup du côté de la force ; en joignant les poulies du Corollaire 2 avec celles du Corollaire 3, comme on les voit ici (Fig. 186, 187).

Par exemple, dans la figure 186, la puissance R qui soutiendrait le poids Q seroit à ce poids comme 1 à 5 (N. 531) ; or mettant en R un poids égal à cette puissance, la puissance P qui soutiendrait la puissance ou le poids R seroit à ce poids comme 1 à 4 ; donc supposant que la puissance P soutienne le poids Q elle sera à ce poids comme 1 à 4×5 , ou comme 1 à 20.

De même dans la figure 186 la puissance R qui soutiendrait le poids Q seroit à ce poids comme 1 à 5 ; or mettant en R un poids égal à cette puissance, la puissance P qui soutiendrait ce poids, seroit à ce poids comme 1 à 5 ; donc si la puissance P soutien-

soutient le poids Q , elle est à ce poids comme 1 est à 5×5 , ou comme 1 à 25, & ainsi des autres.

COROLLAIRE V.

533. L'espace parcouru par la puissance est à l'espace parcouru par le poids, reciproquement comme le poids est à la puissance; car par les Corollaires précédens, il est visible que la puissance est au poids reciproquement comme la vitesse du poids est à la vitesse de la puissance, mais les vitesses sont entr'elles comme les espaces parcourus, donc les espaces parcourus par la puissance & le poids sont entr'eux reciproquement comme le poids est à la puissance.

COROLLAIRE VI.

534. Plus l'on multiplie le nombre des poulies, plus aussi le poids devient grand par rapport à la puissance, donc la vitesse de la puissance devient plus grande par rapport à celle du poids, lequel par conséquent se meut avec plus de lenteur; & de là il suit que si cette machine fait gagner du côté de la force, elle fait perdre du côté du tems.

COROLLAIRE VII.

535. En supposant l'espace parcouru par le poids $= 1$ on a cette analogie; la puissance est au poids comme l'espace I parcouru par le poids est à l'espace parcouru par la puissance ($N. 533$), donc $P, Q, I, \frac{Q}{P}$, c'est-à-dire qu'en divisant le poids par la puissance, le quotient sera l'espace parcouru par la puissance.

COROLLAIRE VIII.

536. Connoissant la puissance P , le poids Q , l'espace ou la vitesse de la puissance en supposant celle du poids égale à I ; il sera facile de trouver le nombre des poulies qu'il faut employer & la disposition qu'il faut leur donner.

Pour cela on divisera d'abord le poids par la puissance, & le quotient sera, ou un nombre pair ou un nombre impair; si le nombre est pair, ou il sera toujours divisible par 2, ou il ne le sera pas.

Si le quotient est toujours divisible par 2, & qu'il soit par exemple 8, on pourra employer la disposition de la figure 183,

G g g

ou celle de la figure 184, selon qu'on le jugera plus convenable ; si on veut employer la disposition de la figure 183, on examinera quel rang tient le terme 8 dans la progression 1, 2, 4, 8, 16, &c. & trouvant que c'est le quatrième, on dira qu'il faut employer 4 poulies, ce qui est évident par le premier Corollaire.

Que si on veut employer la disposition de la figure 184, on prendra la moitié du nombre 8, & l'on dira qu'il faut 4 poulies sans compter la première par le Corollaire second.

Si le quotient provenu de la division du poids par la puissance est impair, & qu'il soit par exemple 9, on retranchera une unité de ce quotient, & prenant la moitié du reste, on dira qu'il faut 4 poulies dans la disposition de la figure 185.

Si le quotient est un produit de deux nombres dont l'un soit pair & l'autre impair, par exemple, si le produit est 20, qui est le produit de 4 par 5, on prendra quatre poulies selon la disposition du Corollaire second, & quatre selon la disposition du Corollaire troisième, & l'on dira qu'il en faut huit qui soient disposées comme dans le Corollaire quatrième, ou bien l'on dira qu'il en faut dix dans la disposition du Corollaire second.

Enfin si le quotient est un nombre impair dont on puisse tirer la racine, on en fera extraire l'extraction, & retranchant l'unité de cette racine le double du reste sera le nombre de poulies que l'on doit employer dans la disposition de la figure 187 ; par exemple soit le quotient 25 dont la racine est 5 ; j'en retranche 1, & doublant le reste 4, ce qui fait 8, je dis qu'il faut 8 poulies dans la disposition de la figure 187, ce qui est évident par le Corollaire quatre, ou bien je retranche 1 de 25, & prenant la moitié du reste 24 laquelle est 12, je dis qu'il faut douze poulies dans la disposition de la figure 185.

PROPOSITION CLXI.

537. Si une puissance A (Fig. 188.) soutient un poids E, & que la direction de l'un & l'autre soient tangentes à la poulie, mais inclinées à l'horison, en sorte qu'elles se rencontrent au point F de la direction FL de la puissance qui soutient la poulie, le poids E & la puissance A sont égaux entr'eux, & l'un & l'autre est à la puissance qui soutient la poulie comme la moitié de l'angle HFI est à l'angle HFL.

DEMONSTRATION.

Du centre O je mene les droites OH, OI aux points H, I

d'attouchement ; ces deux droites sont égales étant rayons d'un même cercle ; or les directions de la puissance & du poids sont perpendiculaires sur ces deux lignes , qu'on peut regarder comme composant un levier recourbé , donc leurs vitesses sont exprimées par les bras égaux HO , OI & sont par conséquent égales ; or les momens de la puissance & du poids sont égaux par la supposition , donc $A \times HO = E \times OI$, d'où je tire $A , E :: OI , HO$, & $A = E$ à cause de $OI = HO$.

Si l'on acheve le parallelogramme FHLI dont les côtés sont les directions HF, FI, on pourra exprimer les forces égales de la puissance & du poids par les droites HF, FI, qui sont égales entr'elles , parce qu'elles sont deux tangentes menées d'un même point F hors du cercle ; ainsi ces deux forces équivalent à une force qui seroit exprimée par la diagonale FL , ou à la force qui soutient la puissance A & le poids E ; donc le poids E est à la force qui soutient la poulie comme FI est FL , mais $FI = HF = IL$; donc le poids E est à la force qui soutient la poulie comme HF , LF, ou comme $\frac{1}{2}HF$ est à $\frac{1}{2}LF$, mais dans le triangle ILF, la moitié de LI ou HF est le sinus de l'angle IFL , lequel étant égal à l'angle HFL , à cause des triangles semblables & égaux FHL , FIL , vaut par conséquent la moitié de HFI , & la moitié du côté FL , est le sinus de l'angle FIL ; ou de son complement IFH a deux droits ; donc le poids E est à la puissance qui soutient la poulie comme la moitié de l'angle HFI est à l'angle HFI , & on prouvera la même chose de la puissance A.

C O R O L L A I R E I .

538. Si un poids Q (*Fig. 189.*) suspendu au centre O d'une poulie est soutenu par deux puissances A , B , dont les directions soient obliques à l'horizon , & se coupent en un point F de la direction du poids Q ; on prouvera de même que ci-dessus que les deux puissances A , E , sont égales entr'elles , & que chacune d'elles est au poids comme la moitié de l'angle AFE est à l'angle AFE.

C O R O L L A I R E I I .

539. Si la direction AH d'une puissance A qui soutient un poids B (*Fig. 190.*) est plus ou moins inclinée à l'horizon que la direction BH du poids B , ces deux directions se couperont en un point H qui ne sera pas sur la direction FO de la pesanteur

G g g ij

de la poulie, mais on prouvera toujours que la puissance A & le poids sont égaux, & achevant le parallélogramme HL, on prouvera que la puissance A & le poids B étant exprimés par les tangentes égales AH, BH, équivalent à une force qui seroit exprimée par la diagonale HL, & que l'un & l'autre seroit à cette force comme la moitié de l'angle AHB est à l'angle AHB, & en ceci il faut observer que si la force qui soutient la puissance & le poids avoit d'abord la direction FO perpendiculaire à l'horizon, il faudroit qu'elle prit la direction HL pour faire équilibre; & si au lieu d'une puissance qui soutient la poulie chargée de la puissance A & du poids B, on mettoit un point fixe H (Fig. 191.) duquel la poulie pendit, la corde HO qui auroit d'abord une direction perpendiculaire à l'horizon prendroit la direction HL, de sorte que le centre de gravité O de la poulie se trouveroit plus haut que s'il n'y avoit ni la puissance A ni le poids E, ainsi qu'on peut voir par la figure.

COROLLAIRE III.

540 Si deux puissances A, B, (Fig. 192.) soutiennent un poids Q attaché au centre O d'une poulie, on prouvera toujours en achevant le parallélogramme FL que les deux puissances sont égales, & que l'une ou l'autre est au poids comme la moitié de l'angle AFB est à l'angle AFB, & en ce cas la direction du poids, loin d'être perpendiculaire à l'horizon comme OP, sera la même que la direction OF de la diagonale LF qui est oblique à l'horizon, comme il est facile de le prouver; de sorte qu'afin que les puissances A, B, soutiennent le poids Q, il faut nécessairement que la corde OQ passe sur une poulie H qui rende sa direction OF, oblique.

DE LA VIS.

541. Si tandis qu'une ligne droite AB (Fig. 193.) perpendiculaire sur la base BOCE de la surface d'un cylindre AC se meut uniformément, & toujours parallèlement à elle-même le long de cette surface, un point B se meut aussi uniformément de B en A, ce point décrira par son mouvement une ligne BLMRA qu'on appelle *spirale* autour du cylindre; l'angle CBL s'appelle angle d'inclinaison, & la partie BLM de cette spirale qui finit au point M de la perpendiculaire AB, se nomme *première révolution*.

542. Si l'on développe la surface du cylindre, en sorte qu'elle devienne une surface plane ou un rectangle ABQP (Fig. 194.) chaque révolution de la spirale sera une ligne droite; car si l'on conçoit que la base BQ de la surface ait été divisée en parties égales, & que la ligne AB ait été aussi divisée en parties égales entr'elles, quelque rapport que ces parties ayent avec les parties de la base, il est évident que quand la ligne AB aura parcouru par exemple deux parties de BQ de B en X, le point B aura aussi parcouru deux parties de AB de X en F, de sorte que quand AB se trouvera en Q, le point B aura parcouru sur QP un nombre de parties égales au nombre de parties de la base BQ que la ligne AB aura parcouru; donc on aura BX, BQ :: XF, QR; or la même chose arrivera dans tous les points de division de la base; donc BQR sera un triangle, puisque ses ordonnées XF, QR, sont entr'elles comme les abscisses BX, BQ, & par conséquent la première révolution BR de la spirale sera une ligne droite, & on prouvera la même chose des autres révolutions.

543. Si l'on conçoit qu'un prisme triangulaire flexible, s'entortille autour du cylindre, en sorte que l'une de ses faces soit toujours appliquée sur la surface du cylindre, & que l'une de ses arêtes soit toujours exactement sur la ligne spirale, la figure entière composée du cylindre & du prisme entortillé, formera ce qu'on appelle une vis, comme il a été dit ci-dessus, & si l'on développe la surface du cylindre & le prisme qui l'entoure, en sorte que cette surface devienne un rectangle ABQP (Fig. 194) chaque révolution du prisme sera un prisme oblique tronqué qu'on pourra mesurer en multipliant sa coupe *mno* perpendiculaire à la base BQ par la base BQ de la surface du cylindre, car comme les arêtes BR, Sr, du prisme doivent être obliques à la base BQ, il est évident que la première révolution de l'arête Sr commençant en S, doit finir en G, d'où il suit que quand la première révolution sera finie, si l'on développe la surface du cylindre, la partie YGg qui paroît appartenir à la seconde révolution, appartient cependant à la première; or si je prolonge AB en V, & Sr en V, il est évident que la partie prismatique YGg est égale à la partie BSV; mettant donc BSV, au lieu de YGg, nous aurons un prisme incliné BVrR dont la solidité est par conséquent le produit de la base BvV ou de la coupe *mno* par la hauteur BQ.

Donc si à la solidité du cylindre on ajoute celle du prisme, on aura la solidité de la vis entière.

544. On construit ordinairement la vis (Fig. 195.) de façon que la vis femelle FE est enchassée fixement à deux poteaux BC, DL, qui tiennent à un pied commun MN, & la vis mâle AR est aussi enchassée dans une pièce HQ en forme de cube, laquelle est percée à jour aux quatre côtés montans, & dans ces trous on passe un levier TX, auquel la puissance étant appliquée, la vis mâle monte ou descend selon que la puissance la fait tourner d'un côté ou d'un autre ; par ce moyen, la vis mâle en montant élève le poids qui seroit en A, ou qu'on lui attacheroit par-dessous sa base HQ, & en descendant elle presse ce qui se trouve entre sa base HQ & le pied MN.

La distance RS d'une révolution à l'autre, s'appelle par quelques-uns *pas de vis*, & il est visible que cette distance marque de combien un corps élevé ou pressé par la vis est monté ou descendu d'une révolution à l'autre.

PROPOSITION CLXII.

545. Si une puissance appliquée à l'extrémité X du levier TX (Fig. 195.) est aussi forte que le poids d'un corps qu'il faut élever, ou que la résistance d'un corps qu'il faut presser, la puissance est au poids ou à la résistance, comme la distance SR d'une révolution à l'autre, est à la circonférence décrite par la longueur VX du bras de levier.

DEMONSTRATION.

Supposons qu'on veuille élever un poids mis en A, quand la puissance mise en X aura fait une révolution entière, elle aura décrit une circonférence dont le centre est le point V qu'il faut regarder comme étant dans l'axe du cylindre, & le poids A ne se fera élevé que de la hauteur RS ; ainsi la circonférence décrite par le point X marquera la vitesse de la puissance, & la hauteur RS la vitesse du poids ; or par la supposition, le poids & la vitesse sont en équilibre, donc leur forces sont égales ; ainsi nommant z la circonférence décrite par la puissance X, nous avons $X \times z = A \times RS$; donc $X, A :: RS, z$.

Si on veut presser un corps, il n'y a qu'à supposer un poids A qui pèse autant vers le centre de la terre que le corps qu'on veut presser résiste, & on trouvera de même que la puissance est à ce poids, & par conséquent au corps qu'on veut presser comme RS est à z .

COROLLAIRE I.

546. Il est évident que plus le bras VX du levier est long ; moins aussi il faut de force pour élever un poids A , puisque z devient plus grand par rapport à RS , & par la même raison il faut moins de force lorsque la distance RS est moindre que lorsqu'elle est plus grande.

COROLLAIRE II.

547. Puisque la puissance parcourt l'espace z , tandis que le corps ne parcourt que RS , il est encore évident que plus on gagne du côté de la force , plus on perd du côté du tems.

COROLLAIRE III.

548. Connoissant la distance RS de deux révolutions , le bras VX du levier , & la puissance appliquée à ce levier , on connoitra aisément le poids ou la résistance qui est égale à la puissance en cette sorte.

Soit la distance $RS = 3'$, c'est-à-dire égale à trois dixièmes d'un pied , ainsi que nous l'avons expliqué dans l'*Arithmétique des Geometres* , en parlant des fractions décimales , la distance $VX = 25'$, la puissance $= 30$ lb ; je cherche d'abord la circonférence décrite par VX en me servant du rapport 7, 22 , ou 100 , 314 , du diamètre à la circonférence , c'est-à-dire , je fais $100, 314 :: 50', \frac{15700'}{100} = 157$, & ce quatrième terme est la circonférence décrite par VX ; ainsi pour trouver le poids ou la résistance égale à la puissance X , je fais $3, 157 :: 30, \frac{4710'}{3} = 1570'$, & ce quatrième terme est le poids ou la résistance cherchée.

Donc pour peu qu'on augmente la puissance X , elle enlèvera le poids ou surmontera la résistance qui lui est opposée.

DEFINITION.

549. Si l'on joint une manivelle DABC à une vis CE (Fig. 196.) , & que les pas de cette vis s'engrangent dans les dents d'une roue dentée , en sorte qu'à chaque pas de la vis il passe une dent de la roue , & qu'une puissance attachée au bras de la manivelle soutienne ou enlève un poids Q suspendu à l'aissieu ou treuil de la roue dentée ; cette Machine s'appelle *Vis sans fin*.

Il est visible que la puissance faisant tourner la vis par le moyen de la manivelle, fait le même effet qu'elle feroit si elle agissoit sur l'extrémité A d'un levier AB qui feroit enchassé dans le cylindre BE de la vis.

PROPOSITION CLXIII.

550. Si une puissance Z appliquée à la manivelle d'une vis sans fin (Fig. 196.) soutient un poids Q suspendu à l'aissieu d'une roue dentée, la puissance est au poids en raison composée de la circonférence de l'aissieu à la circonférence de la roue, & de la distance HS d'une révolution de vis à la circonférence décrite par AB, ou par la puissance Z.

DEMONSTRATION.

Supposons qu'une puissance mise en L soutienne le poids Q, & nommons cette puissance = X, nous aurons $LV, TV :: Q, \frac{Q \times TV}{LV} = X$; car la puissance X est au poids Q réciproquement comme le rayon TV de l'aissieu au rayon LV de la roue, ainsi qu'il a été démontré plusieurs fois; or la puissance Z soutenant le poids Q, fait le même effort que si elle soutenoit la puissance $\frac{Q \times TV}{LV}$ mise en L; donc par la proposition 161 (N. 543.) nous avons $Z, \frac{Q \times TV}{LV} :: HS, c$, en nommant c la circonférence décrite par Z ou par AB; mais nous venons de trouver $\frac{Q \times TV}{LV}$, $Q :: TV, LV$; donc la raison de Z à Q, laquelle est composée de la raison Z, $\frac{Q \times TV}{LV}$, & de la raison de $\frac{Q \times TV}{LV}$, Q est par conséquent composée des raisons HS, c, TV, LV, & mettant au lieu de TV, LV, leur circonférences qui sont en même raison, nous aurons Z est à Q en raison composée de la distance HS à la circonférence décrite par Z, & de la circonférence de l'aissieu à la circonférence de la roue; donc la puissance Z est au poids comme le produit de la circonférence de l'aissieu par la distance HS est au produit de la circonférence de la roue par la circonférence que la puissance Z décrit.

COROLLAIRE I.

551. L'espace parcouru par le poids, est à l'espace parcouru par la puissance, comme la circonférence de l'aissieu multipliée par le nombre des

des révolutions de la roue est à la circonférence décrite par la puissance Z multipliée par le nombre des révolutions de la vis.

Supposons que la roue fasse deux révolutions, le poids aura parcouru un espace double de la circonférence de son aissieu, car la corde se fera entortillée deux fois autour de cet aissieu ; or la vis fait une révolution à chaque dent de la roue qui passe, ainsi supposant que la roue ait dix dents, la vis aura fait vingt révolutions ; mais à chaque révolution, la puissance décrit sa circonférence, donc quand la roue aura fait deux révolutions, la puissance aura décrit sa circonférence vingt fois, & par conséquent l'espace qu'elle aura parcouru fera sa circonférence multipliée par le nombre des révolutions de la vis ; donc, &c.

COROLLAIRE II.

552. Il est aisé de voir que cette machine fait gagner beaucoup du côté de la force, mais qu'on perd aussi beaucoup du côté du tems.

COROLLAIRE III.

553. Connoissant le nombre des dents, la circonférence de l'aissieu, la puissance Z, & la circonférence qu'elle décrit, on connoitra le poids Q en cette sorte.

Je multiplie la circonférence que la puissance décrit par le nombre des dents, & le produit est l'espace que la puissance décrit tandis que la roue fait une révolution, & par conséquent le poids aura parcouru un espace égal à la circonférence de l'axe ; or les vitesses sont comme les espaces ; donc en supposant que la puissance & le poids soient en équilibre, la puissance multipliée par son espace sera égale au poids multiplié par son espace ; ainsi pour connoître le poids, je prens une quatrième proportionnelle à l'espace du poids, à celui de la puissance & à la puissance, & cette quatrième proportionnelle est le poids cherché.

Pour abréger en calculant, on peut mettre les rayons à la place des circonférences, à cause que la raison des uns & des autres est la même.

Soit $Z = 100$ lb, $AB = 3$, $TV = 1$, & le nombre des dents $= 48$; je multiplie 48 par 3, & le produit 144 est comme l'espace de la puissance, je dis comme l'espace, parce que pour avoir l'espace, il faudroit multiplier 144 par la circonférence

H h h

que le rayon 3 décrit, mais cela ne fait rien à cause qu'au lieu de la circonférence de l'axe qui est l'espace du poids je mets son rayon. Je dis donc 1, 144 :: 100, 14400, & ce quatrième terme est la valeur du poids.

D U C O I N.

554. Le Coin sert à fendre les solides & à vaincre la résistance qu'ils font lorsqu'on veut desunir leur parties ; c'est pourquoi cette résistance doit être regardée comme un poids que la puissance doit soutenir ou enlever.

PROPOSITION CLXIV.

555. Si une puissance dont la direction est la perpendiculaire CD, (Fig. 197.) est égale à la résistance que fait un corps pour empêcher la desunion de ses parties, la puissance est au poids comme la perpendiculaire CD est au côté AB.

DEMONSTRATION.

Supposons que le coin se soit enfoncé dans le solide de D en C, l'espace parcouru par la puissance sera la perpendiculaire CD ; or si au lieu de la résistance, nous mettons un poids égal à cette résistance, & qui au commencement du mouvement fut en C, il est visible que ce poids se trouveroit en A quand le coin se trouveroit enfoncé jusqu'en C ; & par conséquent l'espace parcouru par le poids seroit la droite AB, mais les espaces parcourus dans le même tems sont comme les vitesses ; donc les droites DC, AB, expriment les vitesses de la puissance & du poids ; or par la supposition, les forces de la puissance & du poids sont égales, nommant donc A la puissance, & P le poids, nous aurons $A \times CD = P \times AB$; donc $A, P :: CD, AB$; mais la résistance fait le même effet que le poids, donc la puissance est à la résistance comme CD est à AB.

COROLLAIRE.

556. Plus le côté AB est grand, & moins la puissance est grande par rapport à la résistance, ce qui est évident par la Demonstration précédente ; donc les coins les plus aigus demandent moins de force que ceux qui sont moins aigus, mais en revanche il leur faut plus de tems pour faire leur effet.

REMARQUE.

557. Les différentes combinaisons que l'on peut faire des machines que nous venons d'expliquer dans ce Chapitre, produisent ce qu'on appelle *Machines composées*, & il est évident qu'on peut toujours en inventer de nouvelles, attendu que les différentes positions des machines simples les unes à l'égard des autres, leur différentes grandeurs, & les directions différentes de la puissance & du poids, peuvent faire une infinité de variations; or si l'on a bien pris garde à la manière dont nous avons trouvé le rapport de la puissance au poids dans les machines simples, il sera fort aisé d'en trouver le rapport dans les machines composées, c'est pourquoi je me dispenserai d'entrer ici dans un détail qui me menant trop loin, m'empêcheroit de traiter des autres parties de la Mécanique dont je dois parler dans les Volumes suivans, d'autant plus que si on ne veut pas se donner la peine de travailler soi-même sur cette matière, on peut avoir recours au premier Volume de l'*Architecture hydraulique*, où ce sujet est traité de façon à contenter les Curieux. Il ne me reste donc plus pour finir ce premier Livre qu'à parler des frottemens dont nous avons fait abstraction dans les Propositions précédentes, & c'est ce que je vais faire dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XV.

Du Frottement des Machines.

DEFINITION.

558. **L**A difficulté que l'on éprouve lorsque l'on veut faire glisser deux surfaces planes ou courbes l'une sur l'autre, est ce qu'on appelle *Frottement*.

559. Toutes les surfaces quelques polies quelles puissent être, ont des élévations & des concavités, qui venant à s'engrainer les unes dans les autres, forment la résistance que l'on éprouve lorsqu'on veut faire mouvoir un corps sur la surface d'un autre corps; or parmi les Auteurs qui ont écrit sur cette matière, les uns ont prétendu que pour vaincre cette résistance, il ne s'agissoit que de désengrainer les surfaces, c'est-à-dire d'élever le

H h h ij

corps supérieur à peu près comme on élève un corps sur un plan incliné, & d'autres ont voulu qu'il falloit ajouter à cela le brisement qui se fait des petites éminences des surfaces, fondés sur ce qu'il arrive tous les jours que les machines qui ont servi un certain tems ont moins de frottement que les autres, ce qui ne peut provenir que du brisement des petites élévations des surfaces, lesquelles deviennent plus unies & forment moins de résistance.

Pour mieux entendre ceci, supposons que la ligne dentée AB (*Fig. 198.*) représente le profil de la surface du corps inférieur, & la ligne dentée CD le profil de la surface du corps supérieur; selon les premiers Auteurs, chaque dent ou élévation de la surface AB est un petit plan incliné le long duquel il faut nécessairement que le corps supérieur monte si l'on veut qu'il se meuve de C vers D, ou de D vers C, ainsi le frottement est égal à la force nécessaire pour faire monter ce corps, ou à la pesanteur relative de ce corps sur le plan incliné; selon les autres, il faut ajouter à cela la force requise non-seulement pour émousser les pointes des dents, mais encore pour briser entièrement celles dont le plan est perpendiculaire sur les surfaces; car toutes ces petites élévations étant extrêmement irrégulières, il s'en trouve de perpendiculaires, de même qu'il y en a qui sont plus ou moins inclinées sur les surfaces, & d'autres aussi qui sont plus ou moins élevées, d'où il suit que la force requise pour surmonter le frottement est plus grande que celle qu'il faudroit employer pour élever simplement le corps supérieur. Ce dernier sentiment me paroît préférable au premier, à cause des expériences journalières sur lesquelles il est fondé; au reste on peut se convaincre aisément qu'il n'est point de surface entièrement polie, si l'on fait attention à l'usage où l'on est de faciliter le mouvement des machines en les frottant d'huile; car cette liqueur remplissant les concavités des surfaces, les empêche de s'engrainer aussi profondément qu'elles feroient sans cette précaution, & par conséquent le frottement en devient moindre.

Les dents ou éminences des surfaces étant extrêmement petites & d'ailleurs fort irrégulières, il n'est pas possible de trouver par la seule Geométrie des regles exactes de mesurer la quantité de frottement des corps; mais si on a recours aux expériences, & qu'on les réitere souvent, & toujours avec beaucoup de soin, on pourra découvrir facilement des regles générales pour le frot-

tement des machines telles qu'elles soient, ainsi qu'on verra par l'essai que nous en allons faire dans les Propositions suivantes. Je commence par la poulie parce qu'il n'est gueres possible de bien rechercher ce qui regarde le frottement des autres machines sans le secours de celle-ci.

PROPOSITION CLXV.

560. *Trouver le frottement d'une poulie dont la matiere & le poids sont connus.*

SOLUTION.

Je suppose que la poulie soit, par exemple, de bois de chêne (Fig. 199), qu'on l'ait polie autant qu'on a pu, & que son poids, c'est-à-dire, celui de sa roue soit de 6 lb; cette poulie étant suspendue au point fixe R sera sans mouvement parce que toutes ses parties seront en équilibre autour de son axe, mais pour peu qu'on ajoute à l'un de ses côtés, il est sûr que l'équilibre ne doit plus exciter, & que si le contraire arrive, cela ne peut venir que du frottement qui se trouvera plus fort que la quantité qu'on aura ajoutée à l'un des côtés.

Pour trouver donc ce frottement, je passe dans la poulie une petite corde très-déliée, aux extrémités de laquelle je suspens deux bassins de balance qui pèsent également, & qui par conséquent seront en équilibre, de même que la poulie l'étoit auparavant; je mets dans l'un des bassins B un petit poids, & si la poulie ne tourne point, j'augmente ce poids jusqu'à ce que l'équilibre commence à se rompre. Supposant donc que le poids qui rompt l'équilibre soit, par exemple, $\frac{1}{10}$ d'once, je retire la corde & les bassins, je pèse le tout ensemble, & trouvant, par exemple, que le poids est d'une livre, j'ajoute cette livre aux 6 lb que pèse la roue de la poulie ce qui fait 7, & je dis que l'aissieu de la poulie étant chargé de 7 lb de poids, le frottement qui se fait autour de cet aissieu est $\frac{1}{10}$ d'once.

Maintenant si je veux trouver le frottement de la seule roue de la poulie, je dis par regle de trois; si l'aissieu étant chargé de 7 lb, le frottement est $\frac{1}{10}$ d'once, de combien sera ce frottement lorsque l'aissieu ne sera chargé que de 6 lb? Et faisant la regle je trouve $\frac{6}{7} \times \frac{1}{10} = \frac{6}{70}$ d'once.

De même si je veux savoir le frottement causé par le seul poids de la corde & des bassins; je dis, si l'aissieu étant chargé de 7 lb

Il h h iij

le frottement est $\frac{1}{30}$ d'once, de combien sera ce frottement lorsque l'ailieu ne sera chargé que d'une livre? Et faisant la règle je trouve $\frac{1}{140}$ d'once.

Que si l'on considère l'un des bassins comme un poids, & l'autre comme une puissance qui se tiennent en équilibre, & qu'on veuille savoir le frottement qu'ils causeront pour peu que l'un vienne à surmonter l'autre, on pesera les deux bassins sans la corde, & supposant qu'ils pesent $\frac{1}{2}$ lb, on dira, si 7 lb donnent $\frac{1}{30}$ d'once de frottement, combien donnera $\frac{1}{2}$ lb? Et faisant la règle on trouvera $\frac{1}{280}$ d'once; & comme la corde pesera ault $\frac{1}{2}$ lb, à cause que nous avons supposé que la corde & les bassins pesoient ensemble une livre, il s'ensuit que le frottement produit par le poids de la corde sera aulli $\frac{1}{280}$ d'once.

Je ne parle point du frottement de la corde sur la circonférence de la poulie, car il est visible que l'engrainement qui se fait des parties de la corde avec celles de la surface de C en D ne sert qu'à mieux tirer la poulie, & qu'en D les parties de la corde se desengrainent d'elles-mêmes, à cause que la circonférence de la poulie commence à ce point à se dérober à la corde de façon que les parties engrainées se séparent les unes des autres par la seule force de leur pesanteur.

Je conviens que les cordes ont des parties filasseuses lesquelles venant à s'accrocher avec les irregularités de la surface de la poulie ne s'en détachent pas aisément; mais comme on a grand soin de bien savonner les cordes que l'on emploie pour cet usage, ces sortes d'accrochemens sont assez rares & peuvent être négligés.

COROLLAIRE I.

561. Le frottement d'une poulie d'une grandeur & d'une manière déterminée étant connu, on connoitra aisément le frottement causé par des poids de telle grandeur que l'on voudra en cette sorte.

Supposant que le frottement d'une poulie de bois de chêne pesant 6 lb, soit de $\frac{6}{140}$ ou $\frac{3}{70}$ d'onces, & qu'on veuille savoir le frottement que causeront deux poids dont l'un sera de 30 lb & l'autre de 40, les directions étant toujours supposées perpendiculaires à l'horison; on fera la somme 70 lb des deux poids, on y ajoutera le poids de la corde que je suppose être de 4 lb, ce qui fera 74 lb, à quoi on ajoutera encore le poids 6 lb de la pou-

lie, ce qui fera 80, après quoi on dira si l'aissieu étant chargé de six livres le frottement est $\frac{1}{7}$ d'once, de combien sera ce frottement lorsque l'aissieu sera chargé de 80 lb? Et faisant la regle on trouvera $\frac{40}{41} = \frac{4}{7}$ d'onces pour le frottement causé par les poids, la corde & la poulie; & retranchant de $\frac{4}{7}$ ou $\frac{20}{70}$, le frottement $\frac{1}{70}$ de la roue de la poulie, on aura $\frac{17}{70}$ pour la partie du frottement que les deux poids & la corde causent, & si on retranche encore de ce frottement celui qui est causé par la corde, laquelle pesant 4 lb, donnera $\frac{1}{70}$ de frottement, le reste $\frac{16}{70} = \frac{8}{35}$ once, sera le frottement causé par la somme 70 des deux poids, & ainsi des autres.

Au reste, je sépare les frottemens de la poulie, de la corde & des poids, pour faire voir comment on peut les séparer si l'on veut, mais dans la pratique il faut les unir ensemble, parce que la puissance qui tient lieu d'un poids, & qui doit enlever l'autre supporte tous ces frottemens, & que par conséquent on doit l'augmenter d'autant, ainsi que l'on va voir dans l'exemple suivant.

Supposons que la poulie soit la même que ci-dessus, & que le poids B pese 30 lb; s'il n'y avoit point de frottement une puissance A qui auroit le moindre petit poids au-dessus de 30 lb enleveroit le poids B; mais à cause du frottement il faut quelque chose de plus à cette puissance, & pour le trouver j'ajoute à 30 lb le poids de la corde que je suppose de 4 lb, ce qui fait 34, j'y ajoute encore le poids 6 lb de la roue de la poulie ce qui fait 40, & je dis, si l'aissieu étant chargé de 6 lb, le frottement est de $\frac{1}{7}$ d'once, de combien sera ce frottement lorsque l'aissieu sera chargé de 40 lb, & faisant la regle, je trouve $\frac{40}{41} = \frac{4}{7}$ d'once pour le frottement total que la puissance A doit surmonter, ainsi la puissance doit être 30 lb & $\frac{4}{7}$ once, & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

562. Le frottement d'une poulie d'un poids & d'une matiere déterminée étant connu, on pourra connoître aisément le frottement d'une autre poulie de même matiere de quelque poids qu'elle puisse être, en cette sorte.

Supposons, comme ci-dessus, que la roue d'une poulie de bois de chêne pese 6 lb, & que son frottement soit de $\frac{1}{7}$ d'once, & qu'on veuille connoître le frottement d'une autre poulie de même matiere dont la roue pese 10 lb; je dis, si 6 lb de poids

donnent $\frac{1}{30}$ d'once pour le frottement, combien donneront 10 lb? Et faisant la regle, je trouve $\frac{1}{30} = \frac{1}{30}$ d'once.

COROLLAIRE III.

563. Ce que je viens de dire dans le Corollaire précédent suppose que les aillieux des poulies soient tous égaux entr'eux, mais si cela n'est pas, le frottement devient plus grand ou moindre selon que l'aillieu est plus grand ou plus petit, parce qu'il se trouve beaucoup plus de parties à briser, & voici comme on pourra le trouver.

Supposons les mêmes choses que dans le Corollaire précédent, à l'exception que l'aillieu de la poulie qui pese 6 lb, étant d'un pouce de diametre, celui de la poulie dont la roue pese 10 lb est de 3 pouces de diametre; je néglige d'abord la différence des aillieux, & faisant le calcul comme dans le Corollaire précédent je trouve $\frac{1}{30}$ d'once pour le frottement de la seconde poulie, en supposant que son aillieu est égal à celui de la premiere, mais cela n'étant, j'observe que les surfaces de ces deux aillieux, que je suppose également longs, étant entr'elles comme leurs diametres, je puis prendre la raison des diametres au lieu de celles des circonférences, & par conséquent je dis, si 1 de diametre donne $\frac{1}{30}$ pour le frottement, combien donnera 3 de diametre? Et faisant la regle, je trouve $\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ d'onces pour le frottement de la poulie dont la roue pese 10 lb, & dont le diametre est de 3 pouces, & ainsi des autres.

Mais si les aillieux différoient non-seulement par leurs diametres, mais encore par leurs longueurs, alors il est visible que les surfaces de ces aillieux seroient entr'elles en raison composée de la raison de leurs diametres, & de la raison des longueurs des aillieux, lesquelles ne sont autre chose que les largeurs des surfaces, c'est pourquoi on trouveroit le frottement en cette sorte.

Supposons toujours les mêmes choses que ci-dessus, à l'exception que l'aillieu de la poulie, dont la roue pese 6 lb, ayant 1 pouce de diametre & 2 pouces de longueur, celui de la poulie dont la roue pese 10 à 3 pouces de diametre & 4 de longueur, je prens la raison 1, 3 des diametres, & la raison 2, 4 des longueurs, & faisant la raison composée, j'ai 2, 12, ou 1, 6 pour la raison des surfaces des deux aillieux; c'est pourquoi je dis, si 1 de surface donne $\frac{1}{30}$ pour le frottement, combien donnera 6 de

de surface? Et faisant la regle , je trouve $\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ d'once pour le frottement de la poulie proposée , & ainsi des autres.

COROLLAIRE IV.

564. Si la puissance ou le poids , ou tous les deux ensemble avoient des directions obliques à l'horizon , voici comme on pourra trouver le frottement.

Supposons comme ci-dessus que la roue de la poulie AB (Fig. 200.) soit de 6 lb, que le poids Q tirant selon la direction BQ perpendiculaire à l'horison , soit de 30 lb, & que la puissance P tirant selon la direction AP soit aussi de 30 lb, il y aura équilibre entre le poids & la puissance , ainsi pour peu qu'on ajoutât à la puissance elle l'emporteroit s'il n'y avoit point de frottement ; mais à cause du frottement il lui faut quelque chose de plus , & pour le trouver , je suppose que AP exprime la valeur de la puissance P ou du poids Q , & tirant de A la droite AR perpendiculaire à l'horison , & du point P la droite PR perpendiculaire à AR , & achevant le parallelogramme RS , la force AP équivaut aux deux forces AR , AS , ou AR , RP ; or la force RP ne pèse point sur la poulie puisque sa direction est horizontale , donc il n'y a que la force AR qui pèse sur la poulie ou sur son aissieu , c'est-à dire la poulie n'est chargée que de la partie AR de la puissance ; ainsi la partie AR qui charge la poulie est à la puissance comme AR est à AP ; supposant donc $AR = 3$, & $AP = 5$, nous aurons la valeur de la partie de la puissance qui charge la poulie en faisant $5 , 3 :: 30 , \frac{20}{5} = 18$, & ce dernier terme 18 sera la partie de la puissance qui charge la poulie ; ajoutant donc 18 à la valeur 30 du poids Q , ce qui fait 48 , puis y ajoutant le poids de la poulie qui est 6 , la somme est 54 ; j'y ajoute encore le poids de la corde que je suppose être de 4 lb ; comme cette corde à cause de la direction oblique AP du côté de la puissance pesera moins sur la poulie de ce côté qu'elle ne pesera du côté du poids , je suppose qu'il y ait deux livres de corde de chaque côté , & faisant l'analogie que nous avons faite ci-dessus pour la puissance , je dis , AP est à AR comme 2 lb de corde est à un quatrième terme , c'est-à-dire $5 , 3 :: 2 , \frac{6}{5}$, & ce quatrième terme $\frac{6}{5}$ exprime combien la corde AP pèse sur la poulie ; donc la corde entiere pèse sur la poulie $2 \frac{6}{5} = 3 \frac{1}{5}$, lequel ajouté à 54 fait $57 \frac{1}{5}$ qui est le poids total dont la poulie est chargée ; ainsi je fais $6 , \frac{1}{10} :: 57 \frac{1}{5} , \frac{6}{110} = \frac{1}{11}$ onces , & ce quatrième terme est le

frottement que la puissance doit surmonter ; ainsi cette puissance doit être $30 \text{ lb } \frac{14}{175}$ onces , pour surmonter le frottement , mais outre cela il faut lui ajouter les $\frac{2}{5}$ du poids de la corde qu'elle supporte , puisque nous venons de voir qu'en supposant qu'il y ait deux livres de corde de son côté , la poulie n'en supporte que $\frac{2}{5}$ & que par conséquent la puissance en supporte $\frac{2}{5}$, donc la puissance doit être $31 \text{ lb } \frac{2}{175}$.

Comme il n'est pas toujours aisé dans un triangle rectangle d'exprimer le rapport de l'hypoténuse AP au côté AR , on observera qu'en prenant AP pour sinus total , le côté AR est le sinus de l'angle APR qui est l'angle d'inclinaison de la direction AP sur l'horison , c'est pourquoi on dira que la puissance AP est à sa partie AR qui charge la poulie comme le sinus total est au sinus de l'angle d'inclinaison.

Et il faut observer la même chose à l'égard de la puissance toutes les fois que sa direction est oblique , parce que quoique la corde qui est son côté pese moins sur la poulie & donne moins de frottement , la puissance ne laisse pas que de supporter le reste du poids de cette corde.

Si les directions de la puissance & du poids étoient obliques à l'horizon , on chercheroit la partie de la puissance qui peseroit sur la poulie , comme il vient d'être fait , puis la partie du poids qui peseroit sur la poulie , & ajoutant ensemble ces deux parties avec le poids de la roue de la poulie , on ajouteroit encore à cette somme les deux parties de la corde qui peseroient sur la poulie de part & d'autre , & la somme seroit le poids total dont l'aisseau seroit chargé , c'est pourquoi le frottement se trouveroit comme ci-dessus.

Que si la direction TV de la puissance étoit horizontale , cette puissance ne chargeroit point la poulie , ainsi l'on n'auroit qu'à ajouter au poids de la roue de la poulie celui du poids Q , celui de sa corde , & celui de la partie du poids de la corde du côté de A que la roue supporte ; ce qui donneroit le poids total dont l'aisseau seroit chargé , ensuite de quoi le frottement se trouveroit comme il a été dit.

COROLLAIRE V.

165. Tout ce que nous venons de dire dans cette Proposition & ses Corollaires , ne regarde que les poulies faites d'une même matière ; c'est pourquoi si l'on avoit des poulies qui fus-

sent d'une autre matiere, par exemple de fer, il faudroit faire sur l'une d'entr'elles les expériences, ainsi qu'il a été dit ci-dessus, & le frottement de celle-ci étant connu, on connoîtroit sans peine le frottement de toutes les autres de même matiere de quelque poids qu'elles pussent être chargées, quelle que fût la direction de ces poids, & de quelque grandeur que fussent les diametres des axes, ainsi que nous avons dit.

PROPOSITION CLXVI.

566. *Trouver le frottement d'une poulie à l'aissieu de laquelle le poids est suspendu.*

SOLUTION.

Soit la poulie AB (Fig. 201.) ayant à son aissieu O un poids suspendu Q, lequel est soutenu par la puissance P à la faveur d'une corde PABR, laquelle est attachée au point fixe R, & soient les directions PA, RB perpendiculaires à l'horizon; nous avons vû dans le Chapitre précédent en parlant de cette machine, que si l'on fait abstraction du poids de la poulie, de celui de la corde OQ, & de celui de la corde PAV, la puissance est au poids comme 1 à 2; ainsi supposant $Q = 10$, la puissance dans cette hypothèse seroit $= 5$, mais comme il n'y a point de poulie ni de corde qui ne pèsent, supposons que la poulie avec son aissieu pèse 6 lb, & la corde OQ $\frac{1}{2}$ lb, ce qui fait en tout 6 lb $\frac{1}{2}$; j'ajoute ces 6 lb $\frac{1}{2}$ au poids $Q = 10$, ce qui fait 16 lb $\frac{1}{2}$, & il est visible que la puissance en soutient la moitié, c'est-à-dire 8 lb $\frac{1}{4}$, à cause que le point fixe R en soutient l'autre moitié, ainsi la puissance devroit être 8 lb $\frac{1}{4}$; mais cette puissance soutient encore la corde PAV, car la corde VBR est soutenue par le point fixe R, supposant donc que PAV vaille $\frac{1}{4}$ de livre, j'ajoute ce $\frac{1}{4}$ à 8 lb $\frac{1}{4}$, & par conséquent la puissance P qui soutient le poids doit valoir 8 lb $\frac{1}{2}$.

Pour trouver le frottement de cette machine je mets une poulie en P, & prolongeant la corde PA, en sorte que son prolongement PH lui soit égal & de même poids, je fais passer cette corde sur la poulie X, mettant le point P à l'extrémité du diametre perpendiculaire à l'horison, & attachant en H un poids de 8 lb $\frac{1}{4}$, ce poids sera en équilibre, car de côté & d'autre il y aura un poids de 8 lb $\frac{1}{4}$ & une corde de $\frac{1}{4}$ lb; je cherche par la Proposition précédente ce qu'il faut ajouter au poids H pour surmonter le frottement de la poulie X, & supposant que ce soit $\frac{1}{2}$ once, il est sûr

que cette demi-once étant ajoutée au poids H, ce poids entraineroit un poids de $8\text{ lb } \frac{1}{4}$ qui seroit attaché en A, mais à cause du frottement de la poulie AB qu'il faut surmonter, le poids H augmente de demi-once, c'est-à-dire $8\text{ lb } 4\text{ onces } \frac{1}{2}$, n'entraineront pas le poids Q; j'ajoute donc au poids H des petites quantités, jusqu'à ce que l'équilibre commence à se rompre, & supposant que ce qui commence à rompre l'équilibre soit $\frac{1}{4}$ once, je dis que le frottement de la poulie AB ayant le poids Q suspendu en O est $\frac{1}{4}$ once.

COROLLAIRE I.

567. Le frottement de cette poulie étant trouvé, il sera facile de trouver son frottement lorsqu'elle sera chargée de tel autre poids que l'on voudra.

Supposons le poids $Q = 25\text{ lb}$, la corde $OQ = 2\text{ lb}$, le tout ensemble est donc 27 lb , lesquelles étant ajoutées aux 6 lb que la poulie pese font 33 lb ; je dis donc, si le poids total étant de $16\text{ lb } \frac{1}{2}$, comme nous l'avons supposé dans l'expérience que nous avons faite, le frottement est de $\frac{1}{4}$ once, de combien sera ce frottement lorsque le poids total sera 33 lb ? Et faisant la regle je trouve $\frac{33}{16} = \frac{1}{2}$ once, & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

568. Le frottement d'une poulie étant connu on connoitra sans peine le frottement de tout autre poulie plus grande ou moindre, pourvu qu'elle soit de même matiere.

Supposons d'abord que les deux axes soient égaux & en diametres & en longueur, & que la seconde poulie pese 12 lb , son poids joint à sa corde 14 lb , ce qui fait en tout 26 lb ; je fais comme dans le Corollaire précédent $16\frac{1}{2} : \frac{1}{4} :: 26$, $\frac{26}{16} = \frac{13}{8}$ d'once, & ce quatrième terme est le frottement de la seconde poulie.

Que si les deux aissieux ont des diametres différens & des longueurs égales, les surfaces de ces aissieux seront comme les diametres; supposant donc que le diametre du premier aissieu soit 2 pouces, & celui de la seconde 5, je dis, puisque les deux aissieux étant supposés égaux, le frottement de la seconde poulie est $\frac{13}{8}$, les aissieux étant comme 2 à 5, il est visible que le frottement $\frac{13}{2}$ doit être au frottement que je cherche comme 2 à 5; je

fais donc $2, 5 :: \frac{1}{3}, \frac{5}{6}$ d'once, & ce quatrième terme est le frottement cherché.

Enfin si les aissieux étoient inégaux en diametres & en longueurs, alors les surfaces des aissieux seroient en raison composée des diametres & des longueurs; supposant donc le diametre de l'aissieu de la premiere poulie = 2, sa longueur = 3, le diametre de l'aissieu de la seconde = 5, & sa longueur = 6, faisant la raison composée des diametres 2, 5, des diametres & de la raison 3, 6 des longueurs, j'aurai 10, 18, ou 5, 9, qui sera la raison des surfaces des aissieux; je dis donc, les surfaces des aissieux étant égales le frottement de la seconde poulie est $\frac{1}{3}$, donc les surfaces étant comme 5, 9, je dois faire $5, 9 :: \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ = $\frac{1}{2}$, & ce dernier terme est le frottement cherché.

COROLLAIRE III.

569. Si la direction de la puissance étoit oblique à l'horison, le frottement seroit le même que si la direction étoit perpendiculaire, car la puissance & le point d'appui soutiendroient toujours ensemble la même quantité de poids, de sorte que la roue de la poulie seroit pressée également contre son aissieu.

COROLLAIRE IV.

570. Si les poulies étoient d'une matiere différente de celle de la poulie sur laquelle on auroit fait l'expérience, on feroit une nouvelle expérience sur l'une d'entrelles, après quoi on trouveroit tout le reste de même que ci-dessus.

PROPOSITION CLXVII.

571. *Trouver le frottement de plusieurs poulies qui forment une même machine.*

SOLUTION.

Soient quatre poulies AB, CD, EF, GH, disposées comme on les voit ici (Fig. 202), & chargées du poids Q que la puissance P tient en équilibre, il se trouve ici deux sortes de frottemens, celui des poulies AB, CD, sur lequel la piece MN, qui les lie n'influe rien, & celui des poulies EF, GH qui se trouve augmenté par le poids du lien RS.

Supposons donc le poids Q = 50 lb, la roue AB = 10 lb, la roue CD = 4 lb, la poulie EF = 3 lb, la poulie GH = 6 lb, &

le lien $RS = 5$ lb; donc le poids Q , la poulie EF , la poulie GH , & le lien RS peseront ensemble $50 + 3 + 6 + 5 = 64$ lb; or ce poids de 64 lb tirant également les quatre cordes GC , EN , FP , HB chacune d'elles supporte le quart du poids & les 4 poulies supportent aussi chacune le quart du poids, c'est-à-dire 16 lb.

Supposons que tous les aissieux soient égaux & en diamètres & en longueurs, & que la matiere des poulies soit la même que celle sur laquelle nous avons supposé avoir fait l'expérience dans la Proposition précédente; je conçois une puissance en D qui soutient la poulie EF chargée du quart du poids par le moyen de la corde $DFEN$ attachée fixement en N , & comme il y a 16 lb de poids, je dis par la Proposition précédente $16\frac{1}{2}, \frac{1}{4} :: 16, \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$, & ce quatrième terme est le frottement de la poulie EF ; or sans ce frottement la puissance seroit égale à la moitié de 16, c'est-à-dire à 8, parce que le point fixe N soutient l'autre moitié du poids 16; donc puisque cette puissance doit vaincre le frottement elle doit être $8\frac{1}{11}$; je ne parle point de la corde qu'elle soutient parce qu'elle va se trouver dans le frottement de la poulie suivante.

Je conçois deux puissances suspendues de part & d'autre à la poulie CD égales chacune à $8, \frac{1}{11}$, & dont les cordes sont chacune égales à la corde DF , ou pour mieux dire à la corde ODX , en faisant $OCV = ODX = 2$ lb; l'aisieu de cette poulie est donc chargé de sa roue, des deux puissances, & de la corde $VCDX$; je cherche le frottement de cette poulie par les regles de la Proposition 164, & supposant qu'elle soit $\frac{2}{3}$ onces, la puissance en V qui doit surmonter le frottement doit donc être $8, \frac{1}{11} + \frac{2}{3} = 8$ lb $\frac{1}{11}$ d'onces.

Je conçois une puissance en B qui soutient la poulie GH par le moyen de la corde $BHGCDFN$, il est sûr que cette puissance soutient non-seulement les 8 lb $\frac{1}{11}$ que soutenoit la puissance en V , mais encore la moitié 8 du poids 16 que la poulie GH soutient, ainsi cette puissance est 16 lb $\frac{1}{11}$ d'onces; or le frottement de cette poulie est $\frac{2}{3}$, par les regles de la Proposition précédente, donc la puissance en B doit être 16 lb $\frac{1}{11} + \frac{2}{3} = 16$ lb $\frac{1}{11}$ d'onces.

Je conçois deux puissances chacune de 16 lb $\frac{1}{11}$ d'onces suspendues à la poulie AB avec la longueur de la corde $VGHBP$ & par conséquent l'aisieu de la poulie AB est chargé de sa roue des deux puissances & de la corde que je suppose $= 3$ lb, je cherche par la Proposition 164 le frottement de cette poulie, & sup-

posé qu'il soit $\frac{16}{33}$, la puissance P doit donc être $16 \text{ lb } \frac{28}{33} + \frac{16}{33}$
 $= 16 \text{ lb } \frac{44}{33}$ d'onces $= 16 \text{ lb } 1 \text{ once } \frac{8}{33}$, & par conséquent le frottement est 1 once $\frac{8}{33}$.

Au reste, ces frottemens tels que je les mets ici ne sont que des suppositions pour montrer comment il faudroit faire les calculs, si on avoit fait les expériences dont j'ai parlé dans les deux Propositions précédentes, c'est pourquoi il faudroit bien se garder de les prendre pour les véritables valeurs des frottemens dont nous avons parlé.

PROPOSITION CLXVIII.

572. *Trouver le frottement d'un corps qui se meut sur la surface horizontale d'un autre corps.*

SOLUTION.

Un corps peut se mouvoir sur la surface horizontale d'un autre, en razant cette surface ou en roulant sur elle, ce qui fait deux différens cas; car il est visible que si la surface supérieure raze l'inférieure, il se fait à la fois plus d'engrâinures que si elle rouloit dessus, & que par conséquent y ayant plus de parties accrochées qu'il faut atténuer ou briser tout-à-fait, il y a aussi plus de frottement; je commence par les corps dont les frottemens sont razants.

Soit un corps AB de marbre $= 10 \text{ lb}$ (Fig. 203.) sa base AC $= 1$ pouce quarré, & supposons que la surface TS sur laquelle ce corps se meut, soit aussi de marbre. J'attache à ce corps une corde RHQ que je fais passer sur une poulie H disposée de façon que la direction RH de la corde soit horizontale, de même que la surface TS; je suspends à l'extrémité de cette corde différens poids jusqu'à ce que j'en trouve un qui commence à faire mouvoir le corps AB; il est sûr que si l'on fait abstraction du frottement de la poulie & du poids de la corde, le frottement du corps AB doit être égal au poids Q qui fait mouvoir ce corps; car la direction de la pesanteur du corps AB n'étant point opposée au mouvement horizontal, ce corps est indifférent au repos ou au mouvement horizontal; donc le moindre atôme Q poussé actuellement par sa pesanteur, devroit faire mouvoir AB, à cause que par la disposition de la corde, cet atôme Q agiroit sur le corps AB de la même façon que s'il le choquoit avec une vitesse égale à celle que la pesanteur lui donne; or par l'expérience, il faut un

poids beaucoup plus considérable qu'un atôme pour donner du mouvement à AB ; donc la résistance que fait ce corps ne peut venir que du frottement ; ainsi supposant que le poids Q pese une livre , il y auroit une livre de frottement , mais de cette livre il faut retrancher le frottement de la poulie causé par la pesanteur du poids Q de sa corde HQ , de sa roue H , & de la moitié de la corde RH , à cause que l'autre moitié de cette corde est soutenue par le poids AB , donc en supposant que ce frottement estimé par les regles ci-dessus soit un once , le frottement de AB sera 15 onces ; ajoutant donc à AB le poids de la moitié de la corde RH que je suppose être un once , je conclus que le corps AB pesant 10 lb 1 un once , & sa surface AC étant un pouce quarré , le frottement est de 15 onces.

COROLLAIRE I.

573. Le frottement de ce corps étant trouvé , on trouvera aisément celui de tel autre corps de même matiere que l'on voudra , quelque puisse être son poids , & sa surface AC ; car le frottement étant causé par la pesanteur & par la grandeur des surfaces qui exigent un plus grand ou un moindre brisement de parties , selon qu'elles sont moindres ou plus grandes , il est visible qu'en supposant toujours la même poulie & le même poids de la corde , les frottemens sont en raison composée des pesanteurs & des surfaces ; donc supposant un autre corps dont le poids fut de 25 lb , & la surface AC de 4 pouces quarrés , on diroit d'abord en supposant les bases égales ; si 10 lb 1 once donnent 15 onces de frottement , combien donneront 25 lb , & faisant la regle , on trouveroit 2 lb , 5 onces $\frac{43}{100}$, après quoi on diroit ; si un pouce quarré de surface donne 2 lb , 5 onces $\frac{43}{100}$ de frottement , combien donneront 4 pouces ? & faisant la regle , on trouveroit 3 lb , 5 onces $\frac{13}{100}$ pour le frottement cherché , & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

574. Si le corps AB & la surface TS étoient d'une autre matiere , il faudroit faire une expérience comme ci-dessus , & le reste s'acheveroit de même.

COROLLAIRE III.

575. Si le corps AB étoit sphérique & qu'il roulât sur la surface TS , il faudroit faire aussi une experience pour trouver son

son frottement, & ensuite celui de tous les corps semblables qui seroient plus ou moins grands, & il faudroit la faire de même si ce corps spherique rasoit la surface; car le frottement dans ce dernier cas seroit plus grand que si le corps rouloit, à cause que les parties engrainées se desengraineroient moins facilement; par exemple, si le corps spherique DB (*Fig. 204.*) est tirée par la puissance P selon la direction PO parallele à la surface AC, & que ce corps ne roule point, c'est-à-dire qu'il touche toujours la surface AC par l'extrémité du même rayon OB, il est visible que pour desengrainer la partie B, il faut nécessairement faire monter le centre de gravité, & que pendant ce mouvement, l'effort que cette partie B fait contre la partie de la surface qui s'oppose à son mouvement, est toujours le même; au contraire, si le corps roule en sorte que le rayon OB prenne la portion BR, le centre de gravité se dérange sans monter, & par son propre poids il achève de desengrainer le rayon BR, lequel s'inclinant toujours davantage sur la surface, agit sur la partie qui s'opposoit à son mouvement avec un effort qui diminue de plus en plus.

COROLLAIRE IV.

576. Il suit delà que le frottement d'un corps spherique qui roule sur une surface est moindre que celui du même corps qui rase cette surface, & que celui-ci est aussi moindre que le frottement que ce même corps souffriroit si on lui donnoit une figure qui eut plusieurs surfaces, en sorte que l'une de ses surfaces portât sur la surface du corps inférieur.

COROLLAIRE V.

577. Il est aisé de voir ce qu'il faut faire pour trouver le frottement d'un corps C qui se meut le long d'un plan incliné AB, (*Fig. 205.*), mais afin qu'on n'y soit pas embarrassé, voici comment on fera.

S'il n'y avoit point de frottement, le poids P qui soutient le poids Q à l'aide de la poulie E, seroit à ce poids comme la hauteur BC est au plan incliné AB, ainsi qu'il a été démontré en parlant du plan incliné, mais à cause des frottemens, soit sur le plan incliné, soit sur la poulie, le poids P doit être plus fort.

Pour trouver donc ce qu'il faut ajouter au poids P, je mene du point E où la direction QE touche la poulie E, la droite ER perpendiculaire à l'horizon; je prens sur QE la droite EX à dis-

cretion, & du point X menant XR parallèle à l'horizon, j'acheve le parallélogramme RZ, il est évident que si la force du poids Q est exprimée par la diagonale EX, cette force équivaldra aux forces exprimées par les côtés XZ, ZE, mais la force ZE n'agit point sur la poulie, donc il n'y a que la force XZ qui pèse sur elle, ainsi l'effort que le poids Q fait sur la poulie, est à l'effort qu'il feroit si sa direction étoit perpendiculaire comme XZ est à XE; je trouverai de la même façon l'effort que la corde EQ fait sur la poulie, & par conséquent si j'emploie les regles de la Proposition 164, je trouverai le frottement de la poulie causé par les poids P, Q, par les cordes EQ, EP, & par la roue de poulie; ajoutant donc cette quantité de frottement au poids P, & la partie du poids de la corde EQ que le poids Q soutient, ce poids P n'entraînera pas encore le poids Q, parce qu'il y a encore à surmonter le frottement sur le plan incliné. J'ajoute donc au poids P des petites quantités, jusqu'à ce que j'en trouve une qui commence à faire mouvoir le corps Q, & cette quantité étant trouvée, je dis qu'elle est égale au frottement de Q sur le plan incliné en retranchant néanmoins la partie du poids de la corde QE que le poids Q soutient, ce qui n'a pas besoin de Demonstration après tout ce que nous avons dit ci-dessus; & delà il est aisé de connoître les frottemens des autres corps semblables au corps Q, & qui seront plus grands ou moindres, en supposant qu'ils soient de même matiere; car s'ils étoient de différente matiere, il faudroit toujours avoir recours à l'expérience.

PROPOSITION CLXIX.

578. *Trouver le frottement d'une roue dans son aissieu. (Fig. 207).*

SOLUTION.

La roue dans son aissieu est ordinairement soutenue sur deux pieds EF, HL, sur lesquels elle tourne, & les parties de son aissieu qui portent sur ces pieds sont moins épaisses que le reste du même aissieu autour duquel la corde du poids Q s'entortille.

S'il n'y avoit point de frottement, & que ni la roue, ni son aissieu, ni les cordes du poids Q & du poids P qui le soutient ne pesassent point, le poids P seroit au poids Q comme le rayon OT de l'aissieu est au rayon OA de la roue, comme il a été démontré plus haut en parlant de cette machine; supposant donc que le rapport du rayon de la roue à celui de l'aissieu soit comme

4 à 1, & que le poids Q fut de 300 lb, le poids P devoit être 75 lb qui est le quart de 300 lb, en supposant que le poids de la corde du poids P fut celui de la corde du poids Q dans la même raison de 1 à 4, ce qui est facile à faire ; c'est pourquoi la moindre quantité qu'on ajouteroit au poids P entraineroit le poids Q, s'il n'y avoit point de frottement.

Or ce frottement vient non-seulement de la pesanteur des deux poids & de leur cordes, mais encore de celle de la roue & de son aissieu qui pesent sur les deux pieds ; supposant donc que la roue & son aissieu pesent 200 lb, & les deux cordes 4 lb, ce qui fait 204 lb ; j'ajoute à cette somme le poids $Q = 300$, & le poids $P = 75$, & le tout ensemble fait 579 lb pour le poids total qui pese sur les deux pieds ; j'ajoute donc au poids P des petites quantités jusqu'à ce que j'en trouve une qui commence à rompre l'équilibre, & supposé que cette quantité soit 2 lb, je dis que le frottement que le poids P doit surmonter est de 2 lb, & que par conséquent ce poids doit être de 77 lb.

COROLLAIRE I.

579. Le frottement de la machine chargée, ainsi que nous l'avons supposé étant trouvé, on trouvera facilement celui de la même machine qui ne seroit chargée ni des poids ni des cordes ; car la pesanteur totale étant 579 lb, si l'on en retranche celui des poids & des cordes qui est 379 lb, le reste sera 200 lb, & l'on dira si 579 lb donnent 2 lb de frottement, combien donneront 200 lb, & faisant la règle, on trouveroit $\frac{400}{579}$ lb pour le frottement.

COROLLAIRE II.

580. Le frottement de cette roue étant connu, on connoitra sans peine le frottement d'une autre roue plus grande ou moindre faite de la même matiere, en supposant que les diametres & les longueurs des parties des aissieux qui portent sur les pieds soient toujours les mêmes.

Car si une autre roue avec son aissieu pese par exemple 600 lb, on dira si 200 lb donnent $\frac{400}{579}$ de frottement, combien donneront 600 ? & la regle faite, on trouvera $\frac{1200}{579}$ lb pour le frottement, & ainsi des autres.

COROLLAIRE III.

§81. Si les diametres des parties des aissieux qui portent sur les pieds étoient différens, leur circonférences seroient entr'elles comme les diametres; ainsi en supposant que dans la roue qui pèse 600 lb, le diametre de la partie de l'aissieu qui porte sur les pieds fut à celui de la partie de l'aissieu qui porte sur les pieds dans l'autre roue comme 1 à 3; on diroit en supposant les diametres égaux le frottement dans la roue de 600 lb est $\frac{1200}{579}$; donc en supposant les diametres comme 1 à 3, ce frottement doit être à celui que je cherche comme 1 à 3, c'est pourquoi il doit être $\frac{1200}{579} \text{ lb} = 6 \text{ lb}$, $\frac{12}{579} = 6 \text{ lb} \frac{4}{193}$.

COROLLAIRE IV.

§82. Si les diametres & les longueurs des parties des aissieux qui portent sur les pieds étoient différens, alors les surfaces de ces parties seroient en raison composée des diametres & des longueurs; supposant donc que dans la roue de 600 lb le diametre fut 4 pouces, & la longueur 6, & que dans la roue de 200 lb le diametre fut 3 pouces, & la longueur 5, la raison composée de la raison 4, 3, des diametres & de la raison 6, 5, des longueurs, seroit 12, 30, ou 2, 5, c'est pourquoi ayant trouvé qu'en supposant égalité entre les surfaces des parties des aissieux qui portent sur les pieds le frottement de la roue de 600 lb est $\frac{1200}{579} \text{ lb}$, je dis 2, 5 :: $\frac{1200}{579}$, $\frac{600}{1158} = 5 \text{ lb}$, $\frac{12}{193}$, & c'est le frottement cherché.

COROLLAIRE V.

§83. Si les roues étoient d'une autre matiere, on feroit une experience sur l'une d'entr'elles, après quoi le reste se trouveroit comme ci-dessus.

PROPOSITION CLXX.

§84. *Trouver le frottement des roues dentées.* (Fig. 206.)

SOLUTION.

Soient les trois roues dentées de la figure 206. ces trois roues portent chacune sur deux pivots qui les soutiennent, & il est visible qu'il s'y fait deux sortes de frottement dont le premier est

celui des aissieux sur leurs pivots, & le second est celui des dents des roues & des aissieux.

Pour trouver donc le frottement total de la machine, je suppose d'abord que nous n'ayions que la premiere roue OI à l'aissieu de laquelle soit suspendu un poids P, lequel avec sa corde PR pese par exemple 40 lb, & qu'en I il y ait une puissance qui soutienne ce poids; cette roue ainsi chargée n'est autre chose qu'une roue dans son aissieu, c'est pourquoi je cherche son frottement par les regles de la Proposition précédente, & supposant que ce frottement soit 1 once, je l'écris à part sans l'ajouter à la puissance I, parce que les divisions que je serai obligé de faire dans les operations suivantes en diminueroient la quantité; or en supposant que le rayon TO soit au rayon OI, comme 1 à 5, la puissance I est au poids comme 1 à 5, comme il a été dit en parlant de la roue dans son aissieu; ainsi cette puissance seroit 8 s'il n'y avoit point de frottement seroit 8 lb, & elle devoit être 8 lb 1 once si elle devoit surmonter le frottement, c'est-à-dire, s'il n'y avoit point d'autres roues.

Je mets une seconde roue dont je suppose que le rayon FG & le rayon GI de l'aissieu soient de même grandeur que ceux de la premiere roue, & mettant au lieu de la premiere roue & de son poids une puissance en I de 8 lb qui tire selon la direction horizontale Ii, & une autre en F qui pousse selon la direction horizontale fF, & qui soutienne la puissance I; il est visible 1°. que ces deux puissances font le même effet que si la puissance F soutenoit le poids P. 2°. Que la puissance F doit être à la puissance I, comme 1 à 5, & que par conséquent elle doit être 1 lb, 9 onces $\frac{1}{5}$. 3°. Que les deux puissances ne chargent point la roue FG, puisque leur directions sont horizontales, & que par conséquent le frottement sur les parties de son aissieu qui portent sur les pivots, n'est causé que par le poids de cette roue & de son aissieu; cherchant donc ce frottement, & supposant qu'il soit $\frac{1}{5}$ onces, je l'écris à part, pour les raisons dites ci-dessus.

Je mets une troisième roue AC égale en tout aux précédentes, & mettant en F une puissance qui vaille 1 lb, 9 onces $\frac{1}{5}$ au lieu de la seconde roue, laquelle puissance pousse selon la direction fF, & en A une autre puissance qui tire selon la direction Aa, & qui soutienne la puissance F, je trouve en raisonnant comme ci-dessus, que la puissance A doit être 5 onces $\frac{1}{5}$, & le frottement de la roue $\frac{1}{5}$ onces.

La puissance A doit être 5 onces $\frac{1}{7}$ pour soutenir le poids P = 40 lb, lorsqu'il n'y a point de frottement, mais comme nous venons de trouver que le frottement des trois aissieux des roues est 1 once $+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=1$ once $\frac{2}{7}$, il s'ensuit que s'il n'y avoit que le frottement des trois aissieux, la puissance A devroit être de 6 onces $\frac{1}{7}$ pour le surmonter, passons au frottement des dents.

Je suppose d'abord qu'il n'y ait que les deux premières roues IO, FG, & je mets en f une poulie de même matiere que les roues ayant le diametre de l'aissieu égal au diametre des parties de l'aissieu O qui portent sur les pivots, & la longueur de l'aissieu égale aux longueurs de ces deux parties de l'aissieu prises ensemble; j'attache en F une corde que je fais passer sur la poulie, & à l'extrémité de laquelle est un poids pesant avec sa corde Qf, 1 lb, 9 onces $\frac{1}{7}$, & par conséquent les poids P, Q, sont en équilibre; j'ajoute au poids Q des petites quantités jusqu'à ce que j'en trouve une qui commence à donner du mouvement aux deux roues, & supposant que cette quantité soit 1 lb, 3 onces, je dis que le frottement des deux roues & de la poulie f est d'une livre 3 onces.

Or pour avoir le seul frottement des dents, je dois retrancher d'une livre trois onces. 1°. Le frottement une once $\frac{1}{7}$ des deux roues. 2°. Le frottement de la poulie que je considère chargée du poids Q & de sa roue, faisant abstraction de la corde fF, parce que la poulie & la roue Fg la soutenant également, elle cause un égal frottement de part & d'autre, à cause de l'égalité des surfaces des aissieux que nous avons supposées telles uniquement pour négliger le poids de cette corde; supposant donc que le frottement de la poulie soit $\frac{1}{7}$ onces, je l'ajoute au frottement 1 once $\frac{1}{7}$ des aissieux des deux roues, & retranchant la somme 1 once $\frac{2}{7}$ du frottement 1 lb, 3 onces, le reste 1 lb, 1 once $\frac{1}{7}$ est le frottement des dents des deux roues; ainsi la puissance F doit être 1 lb, 9 onces $\frac{1}{7}+1$ lb, 1 once $\frac{1}{7}$, c'est-à-dire 2 lb, 10 onces $\frac{2}{7}$, si l'on veut que cette puissance surmonte le frottement des deux roues, quand le poids P est de 40 lb.

Je mets la troisième roue, & je transporte la poulie avec sa corde en a, où je suspends un poids L pesant avec sa corde 5 onces $\frac{1}{7}$, & ce poids est en équilibre avec le poids P; j'ajoute donc à ce poids des petites quantités, jusqu'à ce que j'en trouve une qui commence à donner du mouvement, &

supposant que cette quantité soit 2 lb, je dis que le frottement des trois roues & de la poulie *f* est de 2 lb.

Et pour avoir le seul frottement des dents de la troisième & seconde roue, je n'ai qu'à retrancher de ce frottement, le frottement des aissieux des trois roues, celui de la poulie, & celui des dents de la seconde & première roue, & le reste sera le frottement cherché.

La puissance *A* doit donc être 5 onces $\frac{1}{5}$, + 2 lb, c'est-à-dire 2 lb, 5 onces $\frac{1}{5}$, si l'on veut qu'elle surmonte le frottement de la machine, quand le poids $P = 40$ lb.

COROLLAIRE.

585. Le frottement de cette machine étant trouvé pour un poids de 40 lb, il est facile de trouver le frottement pour tel autre poids qu'on voudra; car si l'on suppose que ce poids soit 70 lb, le frottement de l'aisieu de la première roue se trouvera en disant: si 40 donnent une once, combien donneront 70? & la règle faite, on trouvera $\frac{70}{40} = \frac{7}{4} = 1$ once $\frac{1}{4}$; les frottemens des aissieux des deux autres roues seront toujours chacun $\frac{1}{5}$; ainsi le frottement total des aissieux sera 1 once $\frac{1}{4}$ + $\frac{2}{5} = 2$ onces $\frac{1}{20}$.

La puissance *I* seroit au poids *P* comme 1 à 5, & par conséquent 14 lb, & la puissance *F* seroit aussi le cinquième de la puissance *F*, ou 2 lb, 12 onces $\frac{4}{5}$, & l'on diroit quand le poids est de 40 lb, le frottement que doit surmonter la puissance *F* est de 1 lb, 3 onces, de combien doit être ce frottement, lorsque le poids est de 70? & la règle faite, on trouveroit la valeur de ce frottement, & retranchant de cette valeur le frottement des aissieux des deux roues, le reste seroit le frottement des dents de la première roue & de l'aisieu de la seconde, & on trouveroit même le frottement total des trois roues, &c.

COROLLAIRE III.

586. Si les roues de la machine qu'on veut employer étoient faites d'une autre matière, ou que les rapports de leurs rayons ne fussent pas les mêmes non plus que ceux de leur aissieux, il faudroit faire une expérience en ayant égard à toutes ces choses; après quoi il seroit aisé de trouver les frottemens de cette machine pour tous les poids possibles.

I. REMARQUE.

587. On m'objectera peut être que mon experience donne plus de frottement aux dents des roues, qu'elles n'en ont, parce que je m'arrête au premier instant où les roues commencent à avoir du mouvement, & que dans cet instant l'effort mutuel des dents étant perpendiculaire, se trouve plus fort que dans les instans suivans où les directions de ces efforts deviennent obliques de plus en plus, & causent par conséquent moins de frottement; mais à cela je répons 1°. qu'en fait de machine on ne risque rien de donner toujours à la puissance un peu plus qu'il ne faudroit, d'autant plus que les machines sont faites bien moins pour tenir les poids en équilibre que pour les enlever. 2°. Qu'à la verité, le frottement est moins grand que je ne le fais, si l'on ne considere que le frottement de deux dents qui peu à peu se désengrènent, mais il faut faire attention que pendant ce tems, il y a deux autres qui s'engrènent aussi peu à peu, & qui par conséquent font un frottement qui peut compenser ce qu'on donne de trop de l'autre côté; ainsi quoiqu'il me paroisse assez facile de résoudre la question géométriquement en n'y employant que les principes mécaniques que nous avons vus dans ce Livre, je ne m'y arrêteroie cependant pas de peur de grossir trop cet Ouvrage auquel j'ai encore bien des choses à ajouter.

II. REMARQUE.

588. Les principes que j'ai donné dans ce Chapitre peuvent s'appliquer à toute sorte de machines quelques composées qu'elles puissent être, & l'on pourroit en tirer des regles generales, & en composer même des tables qui seroient d'une grande utilité dans la pratique. Je pourrai même le faire un jour si Dieu me donne assez de vie & du loisir, mais en attendant si quelqu'un vouloit s'y appliquer, il pourroit s'assurer que son Ouvrage ne seroit pas du nombre de ceux dont le Public ne tire aucun profit.

ADDITION



A D D I T I O N

A CETTE PREMIERE PARTIE.

OU L'ON TRAITE DE LA FORCE DU
choc des Corps projetés , & du choc des Corps qui
se frappent , enforte que leurs centres de gravité ne
sont pas sur la Ligne de Direction.

De la force des Corps projetés.

589. **I**L faut se rappeler ici , 1°. Que lorsqu'un corps A est projeté selon une direction quelconque AB (Fig. 208), il décrit une courbe AOS qui est une parabole (N. 270). 2°. Que tandis que dans les tems 1, 2, 3, 4, &c. à commencer toujours depuis l'origine A du mouvement, il décrirait par le mouvement uniforme de son impulsion les droites AC, AD, AE, &c. qui sont entr'elles comme les tems, le mouvement accéléré de sa pesanteur lui feroit décrire les droites CL, DM, EN, FO, &c. qui sont entr'elles comme les quarrés des tems (N. 270), de façon que lorsque le corps par le mouvement d'impulsion décrirait dans des tems des espaces égaux AC, CD, DE, &c. ce même corps décrirait dans le même tems par l'effet de sa pesanteur, des espaces qui seroient les différences des droites CL, DM, EN, &c. ou les différences 1, 3, 5, 7, &c. des quarrés 1, 4, 9, 16, &c. des tems 1, 2, 3, 4, &c. 3°. Que si du point A on mene une droite horizontale AS, & que des extrémités des arcs de parabole AL, LM, MN, &c. parcourus dans des tems égaux, on abaisse des perpendiculaires LT, MV, NY, &c. sur l'horizontale AS, les espaces horizontaux AT, TV, VY, &c. correspondans aux arcs de parabole seront égaux entr'eux (N. 275), de façon que si l'on prend pour la mesure d'un instant, la droite AT qui répond à l'arc AL parcouru dans le pre-

LA MECHANIQUE

à un instant, la droite AS sera égale à la droite AT multipliée par le nombre des instans que le corps aura employé à parcourir la courbe AOS, & par conséquent cette droite représentera le tems employé à parcourir l'arc AOS, de même la droite AZ qui répond à l'arc ALMNOP sera égale à AT multipliée par le tems ou par le nombre des instans employés à parcourir l'arc ALMNOP, & par conséquent elle représentera le tems employé à parcourir l'arc ALMNOP, & ainsi des autres, ce qui est évident par la seule inspection de la figure.

590. Si l'on coupe l'horizontale AS (Fig. 209.) en parties infiniment petites & égales, & que des points A, B, C, D, &c. on élève des perpendiculaires BF, CG, &c. jusqu'à la rencontre de la parabole, les arcs AF, FG, GH, &c. seront les arcs parcourus par le corps dans des tems infiniment petits & égaux; or ces arcs à cause de leur extrême petitesse peuvent passer pour des lignes droites qui marquent les changemens de direction du corps à chaque instant, & par conséquent on peut regarder ces petits arcs comme faisant partie des tangentes de la courbe aux points A, F, G, H, &c.

La droite AB (Fig. 208.) étant l'espace que la force uniforme de la poudre feroit parcourir au corps pendant le tems AS, il est visible que la droite AC est l'espace que cette même force feroit parcourir au corps dans le premier instant AT, ainsi AC peut être pris pour la force de la poudre; or le corps en parcourant AC s'avance vers le côté opposé à l'origine A du mouvement d'une quantité égale à AT, donc AT est la vitesse de A vers S dans le tems qu'il s'avance vers C, & par conséquent AC étant regardée comme la force de la poudre, la droite AT peut être regardée comme la force respective de la poudre, eu égard au mouvement des corps de A vers S, dans le tems que par sa direction il parcourroit AC; pour abréger le discours nous nommerons simplement *force de la poudre*, la force respective AT.

591. Si le corps projeté A (Fig. 209.) choque en un point quelconque F de la parabole, un plan qui soit perpendiculaire à sa direction, la force du choc est égale à la racine du parametre du diametre FB qui passe par ce point F.

L'arc AF étant infiniment petit, peut être regardé comme une ligne droite qui fait partie de la tangente FP, ainsi AF marque la direction de la force qui pousse le corps vers F; or cette force est équivalente aux deux AB, BF, dont la dernière BF,

quoique retardée par la pesanteur, peut être regardée comme uniforme, à cause du tems infiniment petit que le corps employe à parcourir l'arc AF; & à cause des triangles semblables ABF, FRP, nous avons AB, BF, comme FR est à RP, donc les forces AB, BF qui composent la force AF, sont entr'elles comme les forces FR, RP qui composeroient la force FP, mais il est visible que la force AB est égale à la force FR divisé par le tems que le corps employeroit à parcourir l'arc FO qui se termine au sommet O de la parabole, donc la force FB est égale à la force PR divisée par le même tems, & la force AF est égale à la force FP, divisée aussi par le même tems.

Supposant que l'ordonnée FR contienne trois parties égales, l'arc FO sera parcouru dans trois instans; or par la propriété de la parabole les ordonnées FR sont comme les racines des abscisses OR, donc le tems employé à parcourir l'arc FO étant représenté par FR, sera comme la racine de OR.

Je nomme le parametre de l'axe $= a = 1$, & l'abscisse OR $= x$; donc par la propriété de la parabole PO $= x$, PR $= 2x$, FR $= \sqrt{ax}$, & $\sqrt{OR} = \sqrt{x}$, égal au tems employé à parcourir l'arc FO; or à cause du triangle rectangle FPR, nous avons $\overline{FP}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{FR}^2$, donc $\overline{FP}^2 = 4x^2 + ax$, & $FP = \sqrt{4xx + ax}$; mais AF est égal à FP divisé par le tems, ainsi que nous venons de voir, donc $AF = \frac{\sqrt{4xx + ax}}{\sqrt{x}} = \sqrt{4x + a}$; or par la propriété de la parabole le parametre du diametre qui passe par le point F est égal à quatre fois l'abscisse OR plus le parametre de l'axe, donc ce parametre est $4x + a$, & par conséquent la force du choc au point F est égal à la racine de ce parametre.

De même si le choc se fait en G, la petit arc FG étant la continuation de la tangente Gg seroit la direction du choc; or cette direction est composée des deux Ff, fG, & à cause des triangles rectangles semblables Ffg, Grg, on a Ff, fG :: Gr, rg, donc les deux forces Ff, Gg qui composent la direction FG sont comme les forces Gr, rg qui composeroient la force Gg, mais Gr étant le tems que la bombe employeroit à parcourir l'arc GO, la force Ff est égale à Gr divisé par le tems, c'est-à-dire par \sqrt{Or} , donc Gf est égale à gr divisé par le même tems \sqrt{Or} , & par conséquent la force composée FG, c'est-à-dire la force du choc en G est égale à Gg, divisé par le tems; nommant donc Or $= x$ on

aura $gr = 2x$, $Gr = \sqrt{ax}$, & par conséquent $Gg = \sqrt{Gr^2 + rg^2}$
 $= \sqrt{ax + 4xx}$, & divisant par \sqrt{x} , on aura $FG = \frac{\sqrt{4xx + ax}}{\sqrt{x}}$

$= \sqrt{4x + a}$, ainsi la force du choc en G est égale à la racine du parametre du diametre qui passe par G, & on démontrera la même chose, non-seulement pour tous les points de la demi-parabole AO, mais encore pour tous les points de l'autre demi-parabole OS prolongée à l'infini, ainsi qu'on va voir.

Supposons, par exemple, que le corps choque en M, quand ce corps est parvenu de A au sommet O, la pesanteur a éteint toute la force qu'il avoit pour s'élever, de façon que sa vitesse en O le long de la verticale est zero, c'est-à-dire, qu'en cet instant le corps est comme s'il étoit en repos, eu égard à la direction verticale, & qu'il commençât à descendre, ainsi l'instant d'après lorsqu'il a parcouru l'arc OV, il a un degré de vitesse acquise, & lorsqu'il a parcouru l'arc OX, il a deux degrés de vitesse acquise, & ainsi de suite; maintenant quand il sera parvenu en M, où il choquera selon la direction PM, le tems employé à parcourir l'arc OM sera exprimé par la droite RM ou par la racine de OR, c'est-à-dire par \sqrt{x} , à cause que les ordonnées RM sont comme les racines des abscisses OR, donc la vitesse acquise en M par la force de la pesanteur sera aussi \sqrt{x} , puisque dans l'hypothese de Galilée les vitesses acquises sont comme les tems; or l'abscisse OR étant la hauteur dont la pesanteur a fait descendre le corps lorsqu'il est arrivé en M, si nous doublons cette abscisse, c'est-à-dire, si nous prenons la sous-tangente RP, cette sous-tangente sera l'espace que le corps parcourroit avec une vitesse uniforme égale à \sqrt{x} dans le même tems que la pesanteur lui a fait parcourir l'abscisse OR (N. 63); supposant donc que la force uniforme de la poudre, eu égard à la direction horizontale, fût exprimée par RM, la force de la direction PM seroit composée des deux forces $PR = 2x$, & $RM = \sqrt{ax}$, ainsi à cause du triangle rectangle PRM qui donne $\overline{PR}^2 + \overline{RM}^2 = \overline{PM}^2$, nous aurons $\overline{PM}^2 = 4x^2 + ax$ & $PM = \sqrt{4x^2 + ax}$; mais la force de la poudre n'est pas RM, mais $MN = VS = AB$, c'est-à-dire RM divisé par le tems \sqrt{x} , donc l'autre force composante doit être PR divisé par \sqrt{x} & la force composée doit être PM divisé par \sqrt{x} , & par conséquent cette force est $\frac{\sqrt{4x^2 + ax}}{\sqrt{x}} = \sqrt{4x + a}$.

Et pour s'en mieux convaincre , il n'y a qu'à faire attention que MN étant la force de la poudre , si de l'extrémité N je mene la verticale NS sur la direction PM prolongée , les deux forces MN , NS seront les forces composantes de la force NS ; or les triangles rectangles RPM , SNM étant semblables donnent MN , RM :: NS , PR :: MS , PM , & nous avons $MN = \frac{RM}{\sqrt{x}}$, donc $NS = \frac{PR}{\sqrt{x}}$ & $MS = \frac{PM}{\sqrt{x}} = \sqrt{4x + a}$.

On dira peut-être que puisque la pesanteur rendue uniforme aura fait parcourir au corps l'espace PR dans le même tems que la force uniforme de la poudre aura fait parcourir l'espace RM , la force de la direction étant composée de ces deux forces doit être PM , & non pas PM divisé par \sqrt{x} ; cela est vrai par rapport à l'espace parcouru , c'est-à-dire , que si la pesanteur avoit été rendue uniforme , le corps auroit parcouru la diagonale PM dans le même tems qu'il a parcouru l'arc OM , mais par rapport au choc , il faut prendre garde que les forces uniformes ne frappent pas plus fort à la fin du second instant de leur mouvement , du troisième , du quatrième , &c. qu'elles ne frappent à la fin du premier , & qu'ainsi la force de leur choc au premier instant étant exprimée par l'espace parcouru dans ce premier instant , celle du choc à la fin du mouvement étant la même , doit être aussi exprimée par l'espace parcouru à la fin du mouvement , divisé par le nombre des instans de la durée de ce mouvement , c'est-à-dire par le tems. Supposant donc que le tems employé à parcourir les espaces PR , RM soit trois instans , la force de la poudre à la fin du premier instant sera $RQ = AB$, à la fin du second elle sera $QZ = RQ = AB$, & à la fin du troisième elle sera ZM ou $MN = AB$, & par conséquent elle sera $\frac{1}{3}$ RM , ou RM divisé par 3 , ou RM divisé par le tems de la durée du mouvement ; par la même raison la force de la pesanteur rendue uniforme ne sera à la fin du premier instant , ou du second , ou du troisième , que le $\frac{1}{3}$ de PR ou PR divisé par le tems , & par conséquent la force de la direction étant composée de la force de la poudre exprimée par $\frac{RM}{\sqrt{x}}$ & de celle de la pesanteur exprimée par $\frac{PR}{\sqrt{x}}$ ne sera que $\frac{PM}{\sqrt{x}}$, c'est-à-dire le $\frac{1}{3}$ de PM en supposant que le tems est égal à 3.

Quand le corps choque en O , l'ordonnée correspondante

x est égale à zero, & par conséquent la formule $\sqrt{4x+a}$ devient \sqrt{a} , c'est-à-dire que la force du choc au sommet est égale à la racine du parametre de l'axe.

592. A mesure que le corps monte de A vers O les parametres des diametres qui passent par les points A, F, G, H, &c. vont en diminuant, puisque ces parametres sont égaux au parametre de l'axe plus quatre fois les abscisses correspondantes OE, OR, &c. qui vont en diminuant; donc les chocs du corps dans ces points vont en diminuant jusqu'en O, après quoi ils vont en augmentant de O en S, de façon que ceux qui se font de part & d'autre dans des points également éloignés du point O sont égaux; ainsi le choc en F, lorsque le corps est parvenu de A en F, est égal au choc en M lorsque le corps est parvenu de O en M, ce qui est facile à démontrer.

593. Si le plan choqué TZ (Fig. 210.) étant perpendiculaire au plan de projection AMS, est cependant oblique à la direction PM du choc, la force du choc au point M est égale au sinus de l'angle d'incidence PMR de la direction sur le plan, en prenant pour sinus total la racine du parametre du diametre qui passe par le point M.

Supposons que la commune section du plan choqué TZ & du plan de projection AMS soit la droite MV, & que ces deux plans se coupent à angles droits, je prolonge MV, & du point P j'abaisse PR perpendiculaire sur MR, la droite PR sera perpendiculaire au plan TZ, car concevant que ce plan soit prolongé, & menant dans ce même plan la droite HL qui passe par le point L, & qui soit perpendiculaire à MR, la droite PR sera perpendiculaire à HL, à cause qu'elle est dans le plan AMS, lequel par la supposition étant perpendiculaire au plan TZ, n'incline pas plus vers L que vers H, donc PR étant perpendiculaire aux deux lignes MR, HL, qui sont dans le plan TZ, est par conséquent perpendiculaire à ce plan; cela posé, la force de la direction PM est composée de la force PR & de la force RM; mais la force RM étant parallèle au plan TZ, n'agit point sur ce plan, donc la force PM n'agit sur ce plan que comme la force PR qui lui est perpendiculaire; or en prenant pour sinus total la direction PM, la droite PR est le sinus de l'angle d'inclinaison PMR, donc si le choc de la direction PM sur un plan qui lui seroit perpendiculaire, étoit exprimée par PM, la force du choc de cette même direction sur le plan oblique TZ seroit exprimée par PR ou par le sinus de l'angle d'inclinaison PMR, en prenant PM pour sinus

total ; mais la force du choc de PM sur un plan perpendiculaire est PM divisé par \sqrt{x} , ainsi que nous avons vu ci-dessus (N. 592), donc la force du choc de PM sur le plan oblique TZ est PR divisé par \sqrt{x} , ou le sinus de l'angle d'inclinaison PMR par rapport au sinus total PM divisé par \sqrt{x} ; mais PM divisé par \sqrt{x} est égal à la racine du parametre qui passe par le point M, donc la force du choc sur le plan TZ est égale au sinus de l'angle d'inclinaison PMR en prenant pour sinus total la racine du parametre du diametre qui passe par le point M.

594. Si le plan choqué TZ (Fig. 211.) est oblique au plan de la projection & à la direction PM, on concevra un plan PRM perpendiculaire au plan choqué TZ, & qui passe par la direction PM, & menant dans ce plan la droite PR perpendiculaire à la commune section RM des deux plans TZ, PRM, on dira que la force du choc est comme PR divisé par le tems \sqrt{x} , ou comme le sinus de l'angle d'incidence PRM fait par la direction PM & la commune section RM en prenant pour sinus total la droite PM divisé par \sqrt{x} , c'est-à-dire la racine du parametre du diametre qui passe par le point M.

Supposons que l'angle que le plan TZ fait avec le plan AMS de la projection du côté de K, soit moindre que l'angle qu'il fait du côté de T, je conçois que ce plan soit prolongé vers R, & de l'extrémité P menant sur ce plan la perpendiculaire PR ; je mene du point R au point M la droite RM, laquelle sera dans le plan TZ ; or PR étant perpendiculaire au plan TZ sera aussi perpendiculaire à la droite RM qui est dans ce plan, & par conséquent le triangle MPR sera perpendiculaire au plan TZ, & il sera rectangle ; maintenant la force de la direction PM est composée des forces RM, PR & la force RM étant parallele au plan TZ n'agit point sur ce plan, donc la force PM n'agit que comme PR ou comme le sinus de l'angle d'inclinaison PMR ; mais si la force de la direction PM choquoit directement, elle seroit $\frac{PM}{\sqrt{x}}$, donc en choquant dans la direction oblique elle doit être $\frac{PR}{\sqrt{x}}$, ou comme le sinus de l'angle d'inclinaison PMR, en prenant pour sinus total la racine du parametre du diametre qui passe par le point M ou la droite PM divisée par \sqrt{x} .

Il suit de là que si un corps projeté plusieurs fois de la même façon & avec la même force, & qui par conséquent décrit toujours la même parabole, choque toujours dans le même point

des plans qui soient différemment inclinés à sa direction , les chocs sur ces différens plans seront comme les sinus des angles d'inclinaison de la direction sur ces plans , à cause que les rayons totaux de ces angles seront toujours les mêmes ; mais si les corps choqués sont dans des différens points de la parabole , les chocs ne seront pas simplement comme les sinus des angles d'inclinaison , mais comme ces sinus par rapport à différens sinus totaux qui seront les racines des parametres des diametres qui passeront par les points où les chocs se feront.

Du choc oblique des Corps qui se meuvent uniformement.

595. Si deux corps spheriques a, b (Fig. 212.) se choquent de façon que leurs directions Da, Eb passent l'une & l'autre par les deux centres a, b , ces corps se choquent directement , car supposant un plan qui passe par le point V d'attouchement , les directions aV, bV des deux corps seront perpendiculaires à ce plan , & par conséquent le plan ST sera choqué directement par l'un & l'autre corps , mais le choc des deux corps sur le plan est le même que leur choc mutuel, puisque les directions sont les mêmes , donc les deux corps se choquent directement.

Mais si les deux corps a, b viennent à se choquer avec des directions AC, BC , qui ne passent pas chacune par les deux centres a, b , ces corps se choquent obliquement ; car supposant un plan ST qui passe par leur point d'attouchement ; il est visible que la ligne ab qui joint les deux centres sera perpendiculaire sur ce plan , & par conséquent les directions AC, BC qui ne passent pas par ces centres seront obliques sur ST ; donc le choc des deux boules sur ST sera oblique , mais le choc des boules sur ST est le même que le choc mutuel des deux boules , donc les deux boules se choquent obliquement.

596. Si un corps spherique M (Fig. 213.) choque selon une direction oblique AM un autre corps spherique m , qui est en repos , & qui est plus grand ou moindre que le corps m après le choc , suivra la direction Mm qui joint les deux centres , & le corps M prendra une direction composée de la même direction Mm , & de la direction AO , avec laquelle il n'a point frappé le corps M , & sa route variera selon que M sera plus grand ou moindre que m .

La direction AM est composée de la direction AO , qui ne frappe point le corps m , & de la direction OM qui frappe ce corps directement ,

directement, donc le corps M après le choc doit suivre la direction Mm; cherchons maintenant les espaces parcourus par l'un & l'autre corps. Je nomme V la vitesse OM du corps M avant le choc, & $u=0$ la vitesse du corps m, laquelle est zero avant le choc, le corps m étant en repos peut être regardé comme ayant une vitesse infiniment petite qui soit dans la même direction que la vitesse OM du corps M & qui tende du même côté; or par la règle que nous avons enseignée dans le Chapitre du choc des corps (N. 336.) la vitesse de m après le choc sera $\frac{1MV + mu - Mu}{M + m}$
 $= \frac{1MV}{M + m}$, à cause $u=0$, & la vitesse du corps M après le choc sur la direction Om sera $\frac{MV - mV + 1mu}{M + m} = \frac{MV - mV}{M + m}$, donc le corps m parcourra l'espace $mS = \frac{1MV}{M + m}$ dans un tems égal à celui que le corps M a employé avant le choc pour parcourir la direction AM, & quant au corps M, si sa masse est plus grande que celle de m, sa vitesse $\frac{MV - mV}{M + m}$ après le choc sera positive, & par conséquent il parcourra dans le même tems selon la direction MS un espace $= \frac{MV - mV}{M + m}$; mais comme la direction AO qui n'a point frappé le corps m subsistera toujours, il prendra un mouvement composé de la direction AO & de la direction MS; c'est pourquoi du point M menant la droite MZ égale & parallèle à AO, & élevant au point Z la perpendiculaire ZY parallèle à MS & égale à l'espace $\frac{MV - mV}{M + m}$ que M doit parcourir selon cette direction, la droite MY sera la direction du corps M après le choc, & l'espace qu'il parcourra dans le même tems que m parcourra mS.

Si M est moindre que m, le corps m parcourra toujours sur mS un espace $= \frac{1MV}{M + m}$, mais la vitesse $\frac{MV - mV}{M + m}$ étant négative, nous fera connoître que le corps M rebroussera son chemin de M vers O; c'est pourquoi prenant sur MO une grandeur $MX = \frac{mV - MV}{M + m}$, & menant du point X la droite XT égale & parallèle à AO, le corps M suivra la direction composée MT & la parcourra dans le même tems que m parcourra la droite $mS = \frac{1MV}{M + m}$.

597. Posant les mêmes choses que dans le nombre précédent, si
M m m

les corps M , m , sont égaux, le corps M ne suivra que la seule direction AO .

La vitesse $\frac{MV - mV}{M + m}$ sera en ce cas égale à zero ; donc si le corps M n'avoit que la direction OM , il resteroit en repos après le choc, mais comme la direction AO agit toujours sur lui, il parcourra l'espace MZ égal & parallèle à AO ; & quant au corps m sa vitesse $\frac{2MV}{M + m}$ après le choc sera $\frac{2MV}{2M} = V$; donc ce corps parcourra un espace égal à OM dans le même-tems que M parcourra MZ .

598. Trouver le point V (Fig. 212.) où se fait le choc de deux corps sphériques qui se choquent obliquement.

Soient les deux corps A , B , qui se meuvent avec les directions AC , BC , en sorte que A puisse parcourir AC dans le tems que B peut parcourir BC ; je joins les centres de gravité par la droite AB , ensuite je dis la base AB du triangle BAC est au côté AC comme la somme des rayons est à un quatrième terme que je porte de C en a , & du point a menant ab parallèle à AB , je partage ab en V en deux parties égales aux rayons des boules, & le point V est le point du choc ; car à cause des triangles semblables ABC , abC , la vitesse AC est à la vitesse BC comme la vitesse Aa est à la vitesse Bb ; ainsi les deux corps arriveront dans le même instant en a & b ; & il est visible qu'ils se choqueront, puisque la droite ab est égale à la somme de leur rayons.

599. Les mêmes chocs étant posées que dans le nombre précédent ; trouver la force du choc des deux corps A , B , & les directions & les vitesses qu'ils auront après le choc.

Par le point d'attouchement V , je mene la tangente ST , laquelle sera perpendiculaire à la droite DE qui joint les deux centres ; des points A , B , je mene les droites AD , BE , qui coupent la droite DE en D & en E ; & la vitesse avec laquelle le corps A choque le corps B est Da , & celle avec laquelle le corps B choque A est bE ; car les directions Aa , BE , étant composées, la première des directions AD , Da , & l'autre des directions BE , bE , il est visible que les deux corps ne se choquent qu'avec les directions Da , bE ; cela posé.

1°. Si les corps sont égaux, & que les vitesses avant le choc soient aussi égales, le choc se fera avec la somme des vitesses avant le choc, ce qui arrive toujours dans tous les cas (N. 335.)

& après le choc ils rebrousseront leur chemin avec la même vitesse, (N. 327.) ainsi le corps *a* iroit en D, & le corps *b* en E, mais à cause des directions AD, BE, si l'on prolonge ces directions en H & en R, & qu'on fasse DH égal à DA; & ER égal à EB, le corps *a* parcourra la diagonale aH dans le tems que le corps *b* parcourra bR.

2°. Si les masses sont réciproques aux vitesses, je nomme M la masse du premier, V sa vitesse Da, *m* la masse du second, & *u* sa vitesse bE; ainsi le mouvement du premier avant le choc sera MV, & celui du second sera *mu*, mais par l'hypothèse on a M, *m* :: *u*, V; donc MV = *mu*, & par conséquent les forces avant le choc seront égales, la force du choc sera MV + *mu*; or après le choc, la vitesse de M sera pour le cas présent où les directions du choc sont contraires $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$ (N. 336.); mais nous avons *mu* = MV; mettant donc cette valeur de *mu*, nous aurons $-\frac{MV - mV}{M + m} = -V$, c'est-à-dire le corps *a* rebroussera chemin avec la vitesse qu'il avoit auparavant, & par conséquent à cause de la direction AD qui le presse toujours, il parcourra la diagonale aH, la vitesse du corps *b* après le choc sera $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$, & mettant au lieu de 2MV sa valeur 2*mu*, nous aurons $\frac{MV + mu}{M + m} = u$, c'est-à-dire le corps *b* ira avec la vitesse qu'il avoit avant le choc, & à cause de la direction BE il parcourra la diagonale bR.

3°. Si les masses sont inégales & les vitesses égales (Fig. 214.) les forces avant le choc sont MV, *mu*, & par conséquent à cause de l'égalité des vitesses, le choc est comme la somme M + *m* des masses; la vitesse du corps *a* après le choc sera $\frac{MV - mV - 2m..}{M + m}$, & mettant V au lieu de *u* son égale, nous aurons $\frac{MV - 3mV}{M + m}$, & par conséquent si M est plus grand que 3*m*, la vitesse du corps *a* après le choc iroit de *a* en E, mais à cause de la direction AD qui le pousse toujours, si l'on mène aX parallèle & égale à AD, & qu'en X on élève XZ perpendiculaire à aX & égale à $\frac{MV - 3mV}{M + m}$, le corps *a* parcourra la diagonale aZ, mais si M est moindre que 3*m*, le corps *a* parcourroit de *a* vers D un espace aX = $\frac{3mV - MV}{M + m}$, mais à cause de la direction AD, si

l'on mène XV parallèle & égal à AD, le corps *a* parcourra la diagonale *aV*; la vitesse du corps *b* après le choc sera $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$, ou $\frac{3MV - mV}{M + m}$, à cause de $u = V$; ainsi supposant $bE = \frac{3MV - mV}{M + m}$, & prolongeant BE en H, en sorte qu'on ait $EH = BE$, le corps *b* parcourra la diagonale BH.

Il est aisé de juger de ce qui arriveroit si les masses étoient égales & les vitesses inégales, ou si les masses & les vitesses étoient inégales, ce qui ne merite pas que je m'y arrête davantage.

599. Si deux boules inégales A, B, (Fig. 215) qui roule sur un plan HI, viennent à se choquer, le centre de la petite sera moins élevé au-dessus du plan, que celui de la grande, c'est pourquoi la ligne qui joindra leur centres dans le moment du choc ne sera pas parallèle au plan HI, & si la petite boule oblige la grande de rebrousser chemin, celle-ci par la seule direction du choc suivra la ligne MR élevée sur le plan, mais la direction MN avec laquelle la grande boule ne frappe point sur la petite, agissant sur la grande, la direction de la grande après le choc sera composée des directions MR, MN, & par conséquent elle suivra la direction MO qui est encore plus élevée sur le plan que la direction du choc; d'où l'on voit que ceux qui s'imaginent avoir de l'avantage en jouant au Billard avec une bille plus grosse que celle de leur adversaire, se trompent beaucoup; car si leur adversaire a le poignet bon, la vitesse qu'il donnera à sa bille relèvera la grande selon la direction MR du choc qui sera ici la seule, à cause que la grande bille avant le choc étoit en repos, & par conséquent cette bille sera toujours en danger de sauter hors du billard, & pour faire voir que le joueur qui a la petite bille a toujours de l'avantage, soit qu'il pousse sa bille contre celle de son adversaire, ou que son adversaire pousse la sienne contre lui. Entrons un peu plus dans le détail de ce mouvement.

Supposons que la petite bille B (Fig. 216.) parte du point C, & rencontre en S la grande bille en A où elle est en repos, je joins les deux centres A, B, par la droite AB; de ces mêmes centres, j'abaisse sur le plan du billard HL les perpendiculaires AH, BL, & du centre B menant BE parallèle au plan du billard, & qui coupe AH en E, la droite AE est la différence des

rayons AH, BL, des deux billes, & la droite AB est la somme de ces mêmes rayons; ainsi prenant dans le triangle rectangle AEB l'hypoténuse AB pour sinus total, le côté AE ou la différence des rayons est le sinus de l'angle ABE, mais le corps A étant choqué par le corps B selon la direction AB suivra cette direction; ainsi ce corps s'élèvera au-dessus du plan sous un angle ABE dont le sinus AE est la différence des rayons en prenant pour sinus total la somme AB des rayons; or le corps A en suivant la direction AX sera poussé par sa pesanteur vers le plan du billard; donc ce corps décrira dans son mouvement une parabole, c'est pourquoi si l'amplitude de cette parabole est plus longue que la droite HY qui resteroit à parcourir sur le billard depuis le point H jusqu'à l'extrémité Y du billard, & que la parabole ne rencontre point la bande YZ, laquelle pourroit repousser la bille dans le billard, la bille A tombera nécessairement par terre.

Maintenant je mène du point d'attouchement la tangente SV, du centre B la droite BD parallèle à SV, du point C la droite CD perpendiculaire sur BD, & j'acheve le parallélogramme DM; la vitesse CB du corps B est composée de la vitesse CM & de la vitesse CD; or CM étant parallèle à SV ne choque point le corps A, donc CD est la vitesse avec laquelle le corps B choque le corps A; supposant donc qu'après le choc il lui reste selon cette direction une vitesse égale à NB, la direction CM ou BO son égale agissant toujours, le corps B prendra la direction BP composée des directions BN, BO; mais la direction BP est composée de la direction BR parallèle au billard, & de la direction BQ perpendiculaire au billard; donc le corps B étant empêché de suivre la direction BQ, suivra la direction BR, & par conséquent la bille BR restera sur le billard sans danger de tomber, tandis que la bille A sautera hors du billard, ou du moins sera en danger de sauter.

Supposons à présent que la bille B étant en repos (Fig. 217.), l'autre joueur pousse la bille A du point C, sa vitesse CA sera composée de la vitesse CM qui ne choque point le corps B, & de la vitesse MA qui le choque directement; ainsi supposant qu'après le choc, il reste au corps A selon la direction MA une vitesse AR, la direction CM ou AO son égale agissant toujours, le corps A prendra la direction relevée AP, & par conséquent ce corps sautera hors du billard ou sera en danger de sauter; au

contraire supposant que la bille B aye reçu selon la direction AB du choc la vitesse BZ, cette vitesse sera composée des deux BX, BY; mais BX étant directement opposée au plan du billard, ne peut agir; donc la bille B suivra la direction BY, & par conséquent elle restera sur le plan du billard sans être en danger de sauter.

600. On ne sera pas fâché de trouver ici la solution d'un Problème qu'on pourroit proposer au sujet de deux billes inégales qui se choquent, ce Problème est tel.

Deux Billes inégales A, B, (Fig. 216.) étant données, trouver à quelle distance du plan du billard se trouve le point du choc.

Je mene la ligne AB qui joint les deux centres; j'abaisse sur le plan du billard les rayons AH, BL, qui sont perpendiculaires sur ce plan, puisqu'ils passent par les points d'atouchement HL; du point S où les deux billes se touchent, j'abaisse sur HL la perpendiculaire SK, & du point B je mene BE parallèle à HL qui coupe AH en E, & SK en I, enfin je nomme le rayon $AH = AS = a$, le rayon $BL = BS = EH = IK = b$, & l'inconnue $SI = x$; donc $AB = AS + SB = a + b$, $AE = AH - EH = a - b$, & $SK = SI + IK = x + b$.

Les triangles semblables AEB, SIB, donnent $AB, BE :: BS, IS$; donc $a + b, a - b :: b, \frac{ab - bb}{a + b} = IS = x$, & par conséquent $SK = x + b = \frac{ab - bb}{a + b} + b = \frac{ab - bb + ab + bb}{a + b} = \frac{2ab}{a + b}$; donc la distance demandée est $\frac{2ab}{a + b}$.

Si du diamètre $AH = a$, on retranche $SK = \frac{2ab}{a + b}$, le reste $a - \frac{2ab}{a + b} = \frac{aa + ab - 2ab}{a + b} = \frac{aa - ab}{a + b}$ fera l'excès dont la hauteur du centre A surpasse la hauteur du point S d'atouchement.

Le triangle rectangle ABE donne $\overline{EB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{EA}^2$; donc $\overline{EB}^2 = aa + 2ab + bb - aa + 2ab - bb = 4ab$; donc $EB = HL = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$, c'est la valeur de la distance horizontale comprise entre les deux centres A, B.

Le triangle rectangle SBI donne $\overline{BI}^2 = \overline{SB}^2 - \overline{SI}^2 = b^2 - \frac{a^2bb + 2ab^3 - b^4}{a^2 + 2ab + bb} = \frac{a^2bb + 2ab^3 + b^4 - a^2bb - 2ab^3 - b^4}{a^2 + 2ab + bb} = \frac{4ab^3}{a^2 + 2ab + bb}$ valeur de la distance horizontale KL comprise entre SK & BL.

Si de $HL = 2\sqrt{ab}$, on ôte $KL = \frac{4ab^3}{a^3 + 2ab + bb}$, le reste $2\sqrt{ab} - \frac{4ab^3}{a^3 + 2ab + bb} = HK$ fera la distance horizontale HK comprise entre AH & SK.

Si le rayon AS étoit donné, & la distance SK du point d'atouchement au plan du billard, & qu'on demandât la grandeur du rayon SB d'une bille qui devoit toucher en S, on meneroit du point F la tangente SF, puis prenant sur le plan du billard la droite FL égale à FS, & élevant en L la droite LB, le point B où elle couperoit le rayon AS prolongé seroit le centre de la bille demandée, & son rayon seroit BS ou BL, ce qui est facile à démontrer; car menant la droite BF, les triangles rectangles FSB, FLB, auront l'hypotenuse commune, & les côtés FS, FL, égaux par la construction; donc les deux autres SB, BL, seront égaux, & par conséquent la bille qui aura BS pour rayon, touchera le plan du billard au point L.

Du Choc d'une Boule qui frappe plusieurs autres Boules immédiatement.

601. Lorsqu'une boule choque immédiatement plusieurs autres boules, il est visible qu'il n'y en peut avoir qu'une qui soit dans sa direction, & que les autres sont choquées obliquement. Les vitesses qu'elles reçoivent du choc sont donc différentes, & la question est de les déterminer; c'est-là ce fameux Problème que M. Jean Bernoulli a regardé comme une difficulté dont la solution lui étoit réservée, ainsi qu'on peut voir dans son discours sur les loix de la communication du mouvement, & dans sa Lettre à Messieurs de l'Academie Royale des Sciences, qu'on trouve à la tête de ce Discours. *Non content, dit-il, de déterminer ce qui doit arriver à deux corps qui se choquent, soit directement, soit obliquement, l'Auteur (c'est de lui-même dont il parle) détermine ce qui résulte d'un corps qui en rencontre deux ou plusieurs autres à la fois, selon différentes directions: Problème si épineux que personne n'avoit encore entrepris de le résoudre, & comment en seroit-on venu à bout? puisque sa résolution suppose une connoissance exacte de la theorie des forces vives.* Qui ne croiroit en lisant ceci que M. Bernoulli n'eut résolu le Problème d'une façon générale à ne laisser rien à désirer? Il s'en faut cependant de beaucoup, sa solution n'est que pour un nombre pair quelconque de boules égales,

& qui prises deux à deux sont de part & d'autre à égale distance de la direction de la boule qui les choque. Nous allons voir que sans avoir recours à la prétendue theorie des forces vives, on peut résoudre le Problème non-seulement dans les cas particuliers auxquels il s'est borné, mais encore pour tel nombre pair ou impair que l'on voudra de boules choquées égales ou inégales, & dont les directions fassent des angles égaux ou inégaux avec la direction de la boule qui les choque. Je commencerai par le cas de M. Bernoulli, en supposant d'abord les boules non élastiques, & ensuite élastiques, & de-là je passerai au cas général; or voici quelques principes dont je crois devoir me servir. Nous supposons que les boules se meuvent sur un plan horizontal, & que par conséquent leur mouvement est uniforme.

602. *Si une boule non élastique A (Fig. 218.) poussée selon une direction CA vient à choquer immédiatement deux ou plusieurs autres boules, B, D, non élastiques, toutes les boules se separeront dans l'instant même du choc.*

Supposons que la boule A après avoir choqué les boules B, D, prenne la direction AX, & que BP représente l'espace que la boule B a parcouru depuis l'instant du choc jusqu'au moment où les deux boules A, B, se seront séparées, en supposant que cette séparation ne se soit pas faite dans l'instant du choc; je partage l'espace BP en plusieurs autres égaux & infiniment petits BS, SK, KQ, &c. qui représenteront des espaces que B aura parcouru dans des instans égaux. Je prens la distance BA des centres B, A, des boules B, A, & du point S pris pour centre, je décris l'arc MN, & le point N sera le point où se trouvera le centre A de la boule A, lorsque le centre de la boule B sera en S; car comme à la fin de l'instant BS, les deux boules A, B, se toucheront encore par la supposition, la distance SN des deux centres doit être égal à BA ou SM, c'est-à-dire à la somme des deux rayons BV, VA; des points K, Q, P, &c. & toujours avec le même intervalle BA, je décris les arcs OR, VT, ZX, & il est visible que le centre A de la boule A se trouvera aux points R, T, X, quand le centre de la boule B se trouvera aux points K, Q, P, à cause que les deux boules A, B, se toucheront encore par la supposition; donc quand le centre B aura parcouru les espaces égaux BS, SK, KQ, &c. le centre A aura parcouru les espaces AN, NR, RT, TX, mais ces
espaces

espaces vont en augmentant, comme je vais le prouver; donc le mouvement de la boule A seroit un mouvement accéléré, ce qui est contre la supposition, puisque nous considérons les boules dans un plan horizontal.

Pour démontrer que les espaces AN, NR, RT, TX, vont en augmentant, je mène des points M, O, V, Z, les droites Mn, Or, Vt, Zx, tangentes aux arcs MN, OR, &c. ces droites étant perpendiculaires sur AB seront parallèles entr'elles, & par conséquent à cause des triangles semblables AMn, AOr, &c. les droites An, nr, rt, tx, seront égales entr'elles; or les droites nN, rR, tT, xX, vont en augmentant; car si l'on transporte par la pensée l'espace ORr sur l'espace MNn, on comprendra aisément que l'arc OR étant plus grand que l'arc MN, & la tangente Or plus grande que la tangente Mn, la droite rR sera plus grande que la droite nN, & ainsi des autres; donc si à la droite An, on ajoute la droite nN, & qu'ayant retranché nN de la droite nr égale à An, on lui ajoute rR qui est plus grand que nN, la somme NR sera plus grande que la somme AN, & on prouvera de la même façon que RT est plus grand que NR, &c. donc, &c.

Et il ne faut pas dire que les différences de AN, NR, RT, &c. sont infiniment petites, car quoique cela soit vrai d'un espace à l'autre, il sera toujours vrai aussi de dire que la différence du premier espace AN au dernier TX ne sera pas infiniment petite, & que par conséquent les espaces AN, TX, parcourus dans des tems égaux, seroient inégaux.

603. Connoissant la vitesse & la direction CA d'une boule non élastique A (Fig. 219.), qui choque deux ou plusieurs autres boules non élastiques en nombre pair, & avec des directions AB, AD, qui prises deux à deux font avec la direction CX des angles égaux BAX; DAX, connoître quel doit être le rapport de la vitesse AX de la boule A après le choc, à la vitesse VO, ou HR, &c. de chacune des boules choquées.

Les boules B, D étant égales & également éloignées de la direction de la boule A, il est visible que ces deux boules sont également choquées, & que la boule A après le choc doit suivre sa première direction, cela posé.

Supposons que la vitesse de la boule B soit VO, c'est-à-dire, que B parcoure la droite VO sur sa direction, dans un tems égal à celui que la boule A a employé à parcourir CA, & que la

Nnn

vitessse restante de la boule A soit la droite AX; du point V où les deux boules A, B se touchent dans l'instant du choc, je mène la droite VT égale & parallèle à AX; il est clair que le point V de la boule A se trouvera en T lorsque son centre se trouvera en X; tirant donc la droite TX, & décrivant du point X avec la droite TX un cercle TH, ce cercle marquera la position de la boule A lorsque son centre sera parvenu en X, de même prenant $NO = BV$, & du point N décrivant avec le rayon NO le cercle ZO, ce cercle marquera la position de la boule B lorsqu'elle aura parcouru la quantité VO.

Maintenant supposons que les droites AX, VO, soient des espaces infiniment petits parcourus par les boules A, B dans l'instant d'après le choc, je mène la droite OT, & je dis que cette ligne doit être perpendiculaire sur OV; car 1°. Si elle est perpendiculaire sur OV, elle le sera aussi sur TX, qui est parallèle à OV ou OA, à cause des droites VT, AX égales & parallèles; & par conséquent OT sera tangente des boules ZO, TH, & ces deux boules ne se toucheront pas, ainsi nous aurons ce qui est requis. 2°. Si l'angle VOT fait par la droite OT avec la droite OV étoit aigu, il est clair que OT seroit coupé par la boule TH & par la boule ZO, & que par conséquent ces deux boules ne manqueroient pas de se toucher encore, ce qui est contraire à ce que nous avons démontré dans l'article précédent. 3°. Enfin l'angle VOT pourroit être à la vérité aigu, mais alors les boules ZO, TH se trouveroient séparées d'une distance plus grande qu'il ne faut, eu égard à la nature du mouvement, car lorsqu'un corps non élastique en choque un autre qui est en repos, il ne doit lui communiquer de son mouvement qu'autant qu'il en faut pour lui laisser la liberté de continuer à se mouvoir; or en faisant l'angle VOT droit, la boule A peut continuer son mouvement sans en être empêchée par la boule B, donc il seroit contre la nature de la communication du mouvement de prétendre que cet angle devint aigu.

De l'extrémité C de la direction CA j'abaisse la perpendiculaire CF sur la direction AB prolongée vers F, l'angle aigu OVT est égal à l'angle aigu VAX à cause des parallèles AX, VT, mais VAX est égal à CAF qui lui est opposé au sommet. donc l'angle aigu OVT est égal à l'angle aigu CAF, & par conséquent les triangles rectangles CAF, BVT sont semblables; donc $FV, VO :: CA, AV$, or en prenant pour sinus droit la direction CA,

la droite CF est le sinus de l'angle CAF ou BAX fait par les directions des boules A, B, & la droite FA est le sinus de son complément, donc on doit établir pour règle, que lorsqu'une boule non élastique A choque plusieurs boules égales & non élastiques B, D, avec des directions également éloignées de la direction moyenne CA, la vitesse AX de A après le choc est à la vitesse VO de l'une des boules B, comme le sinus total est au sinus de complément de l'angle BAX fait par la direction BA de la boule B, avec la direction CA de la boule A.

604. Dans le choc des corps élastiques ou non élastiques, la quantité de mouvement après le choc, selon la direction primitive, est toujours égale à la quantité de mouvement avant le choc.

Tous les Geomètres ne conviennent point de cette Proposition, mais si l'on veut s'entendre, les deux partis comprendroient aisément que leur querelle, sur cet article, n'est qu'une dispute de mots. Tâchons de les concilier en examinant d'abord les différens cas du choc des corps non élastiques, & ensuite ceux du choc des corps élastiques.

Par rapport aux corps non élastiques tous conviennent que si l'un des corps est en repos, ou s'il se meut plus lentement dans la même direction que l'autre, la quantité de mouvement après le choc est égale à la quantité de mouvement avant le choc (N. 305), il ne reste donc plus qu'à examiner les autres cas; or ces cas se réduisent à deux, car ou les deux corps se meuvent avec des directions & des forces contraires & égales, ou ils se meuvent avec des directions & des forces contraires & inégales.

Si les deux corps se meuvent avec des directions & des forces contraires & égales, le mouvement cesse dans l'instant du choc (N. 308); donc (disent les Geomètres qui ne tiennent pas pour l'égale quantité de mouvement) il n'est pas toujours vrai que la quantité de mouvement soit égale avant & après le choc. Que répondent à cela les Cartesiens? Le voici: Les forces des deux corps avant le choc étant contraires & égales, si l'on nomme l'une a , l'autre sera $-a$ puisqu'elle est dans un sens contraire; or la somme des deux est $a - a = 0$, donc cette somme est égale à la quantité de mouvement après le choc; ceci paroît d'abord un sophisme, les deux corps se sont approchés l'un de l'autre, il y a donc eu du mouvement avant le choc, au lieu qu'après le choc il n'y en a plus; les Cartesiens ne le contestent point, mais s'il y en a une certaine quantité selon la direction du premier corps,

il y a eu aussi une égale quantité contraire selon la direction du second, donc la direction du premier n'a rien gagné sur celle du second, ni celle du second sur celle du premier, & par conséquent c'est comme s'il n'y avoit point eu de mouvement; en un mot, les Cartesiens s'expliquent; ce ne sont pas les mouvements en particulier de chaque corps qu'ils considèrent, c'est le mouvement qui résulte des deux selon une même direction, si les deux forces contraires s'entredétruisent, ils regardent le mouvement comme nul; si l'une l'emporte sur l'autre c'est l'excès de celle-là sur celle-ci qu'ils prennent pour quantité de mouvement; c'est vouloir faire la guerre à des sons que de les chicaner là dessus.

Si les deux corps se meuvent avec des directions contraires & des forces inégales, la différence de leurs quantités de mouvement après le choc est égale à la somme de leurs quantités avant le choc (N. 306), c'est ainsi que parlent ceux qui considèrent les quantités de mouvement de chaque corps en particulier; au contraire, selon les Cartesiens ce sont les quantités de mouvement avant & après le choc qui sont égales, parce qu'ils ne prennent pour quantité de mouvement, soit avant soit après le choc, que ce qui reste de mouvement selon la même direction; les uns & les autres ont raison, mais ils ne s'entendent pas. A se meut contre B avec trois degrés de force, & B se meut contre A avec un seul degré, de trois retranchés un, voilà la différence des quantités de mouvement des deux corps, cela est certain; de deux retranchez un, voilà la quantité de mouvement selon la même direction, cela est sûr aussi; or après le choc les deux corps vont ensemble avec une même vitesse selon la direction du plus fort, mais avec des quantités de mouvement égales ou inégales selon que les corps sont égaux ou inégaux, & la somme des quantités de mouvement après le choc est 2, donc selon les uns cette somme est égale à la différence avant le choc, & selon les autres elle est égale à la somme avant le choc; dans tout cela il n'y a précisément que les termes entre lesquels il se trouve de la différence.

Par rapport aux corps élastiques tous conviennent que la quantité de mouvement après le choc est égale à la quantité avant le choc lorsque les deux corps suivent la même direction avant & après le choc; & quant aux autres cas on trouvera aisément que les uns & les autres pensent la même chose, si l'on veut nom-

mer avec les Cartesiens quantité de mouvement selon la même direction, ce que les autres appellent différence des quantités de mouvement, lorsque les corps vont avec des directions différentes avant & après le choc.

605. *Connoissant la quantité de mouvement qu'une boule non élastique A communique à une autre boule non élastique B, qui étoit en repos avant le choc, connoître la quantité de mouvement que la même boule A communiqueroit à B si l'une & l'autre boule étoient élastiques.*

Doublez la quantité de mouvement que A non élastique communique à B non élastique, & ce double sera la quantité de mouvement que A élastique communiqueroit à B élastique.

Je nomme M la masse du corps A, m celle du corps B, & V la vitesse de A, nous avons vû (N. 312.) que la vitesse commune de A & de B après le choc est $\frac{MV}{M+m}$ & par conséquent la quantité de mouvement de B après le choc est $\frac{mMV}{M+m}$ lorsque les deux corps ne sont pas élastiques.

Nous avons vû de même (N. 336.) que si les deux corps sont élastiques & qu'ils suivent la même direction avant le choc, la vitesse après le choc du corps B, qui avant le choc avoit moins de mouvement que l'autre est $\frac{2MV - Mu + mu}{M+m}$ en nommant u la la vitesse du corps B; or si B est en repos avant le choc, sa vitesse u sera infiniment petite & égale à zero; donc la vitesse de B après le choc se changera en $\frac{2MV}{M+m}$ à cause de $u=0$, & par conséquent sa quantité de mouvement sera $\frac{2mMV}{M+m}$, mais cette quantité est double de la quantité $\frac{MV}{M+m}$ que B auroit reçu de A, si les deux boules n'avoient par été élastiques, donc, &c. Ces principes posés.

606. PROBLEME I. *Connoissant la direction CA & la quantité de mouvement d'une boule non élastique A (Fig. 219.) qui choque deux autres boules égales & non élastiques B, D avec des directions obliques AB, AD qui font des angles égaux BAX, DAX avec la direction CX de la boule A, connoître les vitesses & les quantités de mouvement des trois boules après le choc.*

Nous savons déjà que les boules B, D après le choc suivront les directions AB, AD, & qu'à cause de l'égalité de ces boules,

N n n ij

la boule A ne faisant pas plus d'effort d'un côté que de l'autre suivra sa première direction CX. Cela posé.

Supposons que la vitesse du corps A après le choc soit égale à AX, du point d'atouchement V des deux boules A, B, je mène VT égale & parallèle à AX, & du point T menant TO perpendiculaire sur AB, la droite VO marquera la vitesse de B après le choc (N. 603), & on trouvera de la même façon que la vitesse de la boule D après le choc sera exprimée par $HR = VO$; du point O je mène OQ perpendiculaire sur VT, & il est visible que VQ marquera la vitesse de B selon la direction VT ou CX, & que la vitesse de D selon HS ou CX sera égale à VQ; du point E je mène EL perpendiculaire sur CX, & l'on prouvera aisément que les triangles rectangles ECB, TOV étant semblables, les triangles EAL, QVO sont aussi semblables, & que par conséquent on a $CA, LA :: VT, VQ$.

Je nomme $CA = a$, $EA = b$ & AX ou $VT = x$; les triangles semblables CAE, EAL donnent $CA, AE :: AE, AL$, donc $\overline{CA}^2, \overline{AE}^2 :: CA, LA$ ou $a^2, b^2 :: a, \frac{a^2 b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} = CL$; or nous avons $CA, LA :: VT, VQ$, donc $a, \frac{b^2}{a} :: x, \frac{b^2 x}{a^2} = VQ$, ainsi la vitesse de B après le choc selon la direction VQ est $\frac{b^2 x}{a^2}$, & par conséquent celle de D est aussi $\frac{b^2 x}{a^2}$. Je nomme M la masse de A & m la masse de B ou de D, donc la quantité de mouvement de A après le choc est Mx , celle de B, selon la direction VQ ou CA, est $\frac{mb^2 x}{a^2}$ & celle-ci est la même que celle de D selon la même direction; or ces trois quantités prises ensemble doivent être égales à la quantité de mouvement avant le choc, & cette quantité est Ma ; donc nous avons $Mx + \frac{2mb^2 x}{a^2} = Ma$, & multipliant par aa , nous aurons $Maax + 2mbbx = Ma^3$, & divisant par $Maa + 2mbb$, nous aurons $x = \frac{Ma^2}{Maa + 2mbb}$, & par conséquent la quantité de mouvement de A après le choc sera connue; & mettant cette valeur de x dans $\frac{mb^2 x}{a^2}$ qui est la quantité de mouvement de B ou de D, selon la direction CA, nous aurons $\frac{m Mab^2}{Maa + 2mbb}$ pour la valeur de cette quantité.

Pour connoître la quantité de mouvement de B ou de D selon

leurs directions AB ou AD, on aura dans les triangles semblables CAE, TVO, cette analogie CA, AE :: TV, VO, donc $a, b :: x, \frac{bx}{a} = VO$, & mettant la valeur de x nous aurons

$\frac{Ma^2b}{Ma^2 + mb^2} = VO$, & multipliant VO par m , on aura $\frac{mMa^2b}{Ma^2 + mb^2}$ pour la quantité de mouvement de B ou de D sur leurs directions AB, AD.

Supposons que les trois boules soient égales & que l'angle BAX ou CAF soit de 30 degrés, je fais en A l'angle FAM égal à l'angle CAF, & je prolonge CF en M, l'angle CAF étant de 30 degrés, l'autre angle aigu ACF du triangle rectangle CAF sera donc de 60 degrés; or l'angle CAM est aussi de 60 degrés par la construction, donc le troisième angle CMA du triangle CMA est aussi de 60 degrés, & par conséquent ce triangle est isoscele & son côté CM est coupé en deux également en F par la perpendiculaire CF, donc $CF = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}CA$; ainsi faisant $CA = 2$, nous aurons $CF = 1$, & comme à cause du triangle rectangle CAF nous avons $\overline{FA}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CF}^2$, nous aurons $\overline{FA}^2 = 4 - 1 = 3$, & $FA = \sqrt{3}$, je fais $M = 1 = m$, & mettant ces valeurs dans celles de AX & de VQ, que nous avons trouvées ci-dessus, nous aurons $x = \frac{Ma^2}{Ma^2 + mb^2} = \frac{8}{4+6} = \frac{4}{5}$ &

$VQ = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{3 \times 4}{4 \times 5} = \frac{3}{5}$; ainsi la vitesse de A après le choc sera $\frac{4}{5}$, celle de B selon la direction CA sera $\frac{3}{5}$, & celle de D selon la même direction sera aussi $\frac{3}{5}$; multipliant donc ces vitesses par leurs masses, dont la valeur est 1, la somme des quantités de mouvement, selon la direction CA après le choc, sera $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{10}{5} = 2$; or la quantité de mouvement avant le choc étoit $M \times CA = 1 \times 2 = 2$, donc la quantité du mouvement après le choc, selon la direction CA, est égale à la quantité de mouvement avant le choc, & par conséquent le Probleme est bien résolu.

Supposons encore que l'angle BVX soit de 30 degrés, mais que la masse de A soit 2, & celle de B ou de D soit 1, nous aurons donc $x = \frac{Ma^2}{Ma^2 + mb^2} = \frac{16}{8+6} = \frac{8}{7}$ & $VQ = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{3 \times 8}{7} = \frac{24}{7}$, ainsi la vitesse de A après le choc sera $\frac{8}{7}$, celle de B, selon la direction CA, sera $\frac{24}{7}$, & celle de D, selon la même direction, sera aussi $\frac{24}{7}$; multipliant donc ces vitesses par leurs masses, la quantité de mouvement de A après le choc sera

$\frac{2 \times 6}{7} = \frac{12}{7}$, celle de B sera $\frac{1 \times 6}{7} = \frac{6}{7}$, & celle de D sera aussi $\frac{6}{7}$, & par conséquent la somme de ces quantités de mouvement sera $\frac{12}{7} + \frac{6}{7} + \frac{6}{7} = \frac{24}{7} = 4$; or la quantité de mouvement avant le choc est $M \times a = 2 \times 2 = 4$, donc les quantités de mouvement sont encore égales avant & après le choc, & la même chose arrivera, quelque rapport que l'on mette entre les masses A & B ou D, & quelque soit l'angle BAX, donc, &c.

607. PROBL. II. *Trouver les mêmes choses que ci-dessus en supposant les trois boules élastiques.*

Cherchez comme dans le Problème précédent la vitesse de B ou de D, selon la direction CA lorsque les boules ne sont pas élastiques, & le double de cette vitesse sera la vitesse de B ou de D lorsque les boules sont élastiques.

Par exemple, en supposant que les trois boules sont égales & non élastiques, & que l'angle BAX est de 30 degrés, nous avons trouvé $VQ = \frac{2}{7}$, je double cette vitesse & j'ai pour le cas de l'élasticité $VQ = \frac{4}{7}$, donc la vitesse de D est aussi $\frac{4}{7}$, & comme la somme $\frac{4}{7} + \frac{4}{7}$ de ces deux quantités, c'est-à-dire $\frac{8}{7} = 2 \frac{1}{7}$ est plus grande que la quantité 2 de mouvement avant le choc, il s'ensuit que A après le choc doit avoir une quantité négative de mouvement $= -\frac{2}{7}$, de sorte qu'en ajoutant ensemble les trois quantités $\frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{2}{7}$, on aura justement $\frac{10}{7} = 2$, & par conséquent la quantité de mouvement sera égale avant & après le choc.

De même en supposant $M = 2$, $m = 1$ & les boules non élastiques, nous avons trouvé $VQ = \frac{6}{7}$, donc en supposant les boules élastiques nous aurons $VQ = \frac{12}{7}$ & la vitesse de D $= \frac{12}{7}$, ainsi ces vitesses étant multipliées par leurs masses seront $\frac{1 \times 12}{7}$, $\frac{1 \times 12}{7}$ & par conséquent les quantités de mouvement de B & D feront ensemble $\frac{24}{7}$; or la quantité de mouvement de A avant le choc est $M \times a = 2 \times 2 = 4 = \frac{28}{7}$, donc il reste encore pour la quantité de mouvement de A après le choc $\frac{4}{7}$ ou $2 \times \frac{2}{7}$, c'est-à-dire que A après le choc s'avancera toujours du même côté avec une vitesse égale à $\frac{2}{7}$, & ainsi des autres.

On peut résoudre ce Problème directement en cette sorte; par la Proposition 121 (N. 355.) lorsque deux corps élastiques se choquent avec la même direction ou avec des directions contraires, la somme des masses multipliées par les carrés de leurs vitesses est la même avant & après le choc; or dans le cas présent les vitesses de B & D avant le choc étant infiniment petites, c'est-

c'est-à-dire égales à zero ; il s'ensuit que le produit de la boule A multipliée par le carré de sa vitesse CA avant le choc, est égal à la somme des produits des trois boules multipliée chacune par le carré de la vitesse qu'elle a sur sa propre direction après le choc, ceci posé.

Je nomme x la vitesse de la boule A (Fig. 220.) après le choc, & y la vitesse de la boule B ou D sur les directions AB, AD ; ainsi supposant que les droites VO, HR représentent les vitesses égales de B & D après le choc ; je joins la droite OR, & des points V, H je mene les droites VQ, HS parallèles à AX, ces droites représenteront les vitesses de B & D selon la direction AX ; or à cause des triangles semblables CAF, VOT, on a CA, AF :: VO, VQ, donc $a, b :: y, \frac{by}{a}$, & par conséquent $\frac{by}{a}$ sera la vitesse de B après le choc selon la direction VQ ou CX, & celle de D sera aussi $\frac{by}{a}$; multipliant donc les vitesses $x, \frac{by}{a}, \frac{by}{a}$ par leur masses, les produits $Mx + \frac{bmy}{a} + \frac{bmy}{a}$ seront les quantités de mouvement des trois boules après le choc, mais la somme de ces produits doit être égale à la quantité de mouvement Ma de A avant le choc, donc $Mx + \frac{2bmy}{a} = Ma$.

D'autre part nous devons avoir $Mxx + my^2 + my^2$, ou $Mxx + 2my^2 = Maa$ par la Proposition citée (N. 355), donc nous avons ici deux équations ; je fais le carré de la première $Mx + \frac{2bmy}{a} = Ma$, ce qui donne $M^2x^2 + \frac{4bmMyx}{a} + \frac{4bbmmy^2}{aa} = M^2a^2$, & divisant par M j'ai $Mx^2 + \frac{4bmyx}{a} + \frac{4bbmmy^2}{Maa} = Maa$; or nous avons $Maa = Mxx + 2my^2$, comparant donc ces deux valeurs de Maa, nous aurons $2my^2 = \frac{4bmyx}{a} + \frac{4bbmmy^2}{Maa}$, d'où je tire $Mmaay^2 = 2bmMayx + 2bbmmy^2$, & $x = \frac{Mmaay^2 - 2bbmmy^2}{2bmMay} = \frac{Ma^2y - 2bbmy}{2bMa}$.

Or par la première équation nous avons $x = \frac{Maa - 2bmy}{Ma}$, comparant donc ces deux valeurs de x , nous aurons $\frac{Maa - 2bmy}{Ma} = \frac{Ma^2y - 2bbmy}{2bMa}$ ou $Maay - 2bbmy = 2aabM - 4bbmy$, d'où je tire $Maay + 2bbmy = 2aabM$ & $y = \frac{2aabM}{Maa + 2mbb}$.

Et mettant cette valeur de y dans $Mx + \frac{2bmy}{a} = Ma$, ou Max

Q o o

$$+ 2bmy = Maa, \text{ j'ai } Max + \frac{4aabmbM}{Ma + 2mbb} = Maa, \text{ ou } x + \frac{4abm}{Ma + 2mbb} = a, \text{ ou } Max + 2mbbx = Ma^2 - 2ambb, \text{ d'où je tire } x = \frac{Ma^2 - 2ambb}{Ma + 2mbb}.$$

$$\text{Je mets aussi la valeur de } y \text{ dans } VQ = \frac{by}{a}, \text{ \& j'ai } VQ = \frac{2abmbM}{Ma^2 + 2ambb}.$$

Supposons comme auparavant $M = m$, & que l'angle OAX soit de 30 degrés, & nous aurons $x = \frac{8 - 12}{4 + 6} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$, ainsi que nous l'avons trouvé ci-dessus, de même $VQ = \frac{8 \times 3}{8 + 12} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$ de même qu'auparavant, &c.

M. Bernoulli s'est servi de cette méthode pour résoudre ce Problème, & delà il a tiré occasion de donner des nouveaux éloges à sa theorie des forces vives, mais il n'a pas pris garde que puisqu'après le choc, le mouvement se décompose en trois directions composantes qui donnent une égale quantité de mouvement sur la direction AC, rien n'empêche de composer de même la direction AC avant le choc des trois mêmes directions, lesquelles multipliées l'une par la masse M, & les deux autres par la masse m, auroient le pouvoir de donner avant le choc la même quantité de mouvement sur la direction AC, & dont les quarrés multipliés par leur masse seroient égaux à \overline{AC}^2 multiplié par M; on a beau faire, tout ce qui peut se dire des forces vives, peut se dire également des forces mortes, pourvu qu'on fasse la comparaison comme il faut entre les unes & les autres, & il n'y aura jamais de différence qu'autant qu'on s'avisera de les mal comparer. Je ne m'arrête point à réfuter davantage ce sentiment, on peut voir ce que j'en ai dit dans la Remarque en forme de Dissertation qui se trouve dans le Chapitre IV. de ce premier Livre (N. 106.)

608. PROBL. III. Connoissant la direction CA & la quantité de mouvement d'une boule non élastique A (Fig. 221.) qui choque plusieurs autres boules égales, non élastiques, en nombre pair plus grand que deux, & dont les directions prises deux à deux font des angles égaux avec la direction CX, connoître les vitesses de toutes les boules après le choc.

Du point C j'abbaisse sur les directions prolongées les perpendiculaires CF, CH, &c. & supposant que AX soit la vi-

reste restante du corps A après le choc, je mene des points V, R, où les boules B, K, touchent la boule A, les droites VT, RL égales & parallèles chacune à AX; ainsi les points V, R, de la boule A, se trouveront en T & en L, lorsque son centre A se trouvera en X; des points T, L, je mene les droites TO, LS, perpendiculaires sur les directions AO, AS, de B & de K; les droites VO, RS, marquent les vitesses de B & de K sur leur directions, & ces vitesses sont égales aux vitesses des boules D, P; des points O, S, je mene les droites OQ, SN, perpendiculaires sur VT, RL; les droites VQ, RN, marqueront les vitesses de B & de K selon la direction AX, & ces vitesses seront égales à celles de D & de P selon la même direction; des points F, H, je mene les droites FZ, HY, perpendiculaires sur AC, & l'on prouvera aisément qu'à cause des triangles semblables CFA, TOV, ZFA, QOV, on a $CA, ZA :: VT, VQ$, & qu'à cause des triangles semblables CHA, LSR, YHA, NSR, on a $CA, YA :: RL, RN$.

Je nomme $CA = a$, $FA = b$, $HA = c$, $AX = VT = RL = x$; les triangles semblables CAF, FAZ, donnent :: CA, FA, ZA ; donc $\overline{CA}^2, \overline{FA}^2 :: CA, ZA$, ou $a^2, b^2 :: a, \frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} = ZA$; or nous avons $CA, ZA :: VT, VQ$, donc $a, \frac{b^2}{a} :: x, \frac{b^2x}{a^2} = VQ$, & par conséquent la vitesse de B selon la direction CX, est $\frac{b^2x}{a^2}$, de même que la vitesse de D selon la même direction; les triangles semblables CAH, HAY, donnent :: CA, AH, AY ; donc $\overline{CA}^2, \overline{AH}^2 :: CA, AY$, ou $aa, cc :: a, \frac{acc}{aa} = \frac{cc}{a} = YA$; or nous avons $CA, YA :: RL, RN$; donc $a, \frac{cc}{a} :: x, \frac{ccx}{aa} = RN$, & par conséquent la vitesse de K, & celle de P selon la direction CA sont chacune égales à $\frac{ccx}{aa}$; nommant donc M la masse de A, & m la masse de chacune des boules égales B, K, D, P, & multipliant les vitesses par les masses, les produits $Mx, \frac{mbbx}{aa}, \frac{mbbx}{aa}, \frac{mccx}{aa}, \frac{mccx}{aa}$ seront les quantités de mouvement des cinq boules après le choc; or ces quantités prises ensemble sont égales à la quantité de mouvement Ma du corps A avant le choc; donc $Mx + \frac{2bbmx}{aa} + \frac{2ccmx}{aa} = Ma$,

ou $Maax + 2bbmx + 2ccmx = Ma$, d'où l'on tire $x = \frac{Ma^2}{Ma^2 + 2bbm + 2ccm}$, & mettant cette valeur de x dans $VQ = \frac{b^2x}{a^2}$, & dans $RN = \frac{c^2x}{a^2}$, nous aurons $VQ = \frac{Mab^2}{Ma^2 + 2bbm + 2ccm}$, & $RN = \frac{Mac^2}{Ma^2 + 2bbm + 2ccm}$, & par conséquent les vitesses des cinq boules après le choc seront connues.

Supposons que l'angle $BAX = CAF$ soit de 30 degrés; l'angle ACF sera de 60, & par conséquent nommant $AC = 2$, nous aurons $AF = \sqrt{3}$. Supposons aussi que l'angle RAX , ou CAH soit de 60 degrés, l'angle ACH sera de 30, & par conséquent AC étant $= 2$, on aura $AH = 1$, ainsi $b = \sqrt{3}$, & $c = 1$; enfin, supposons $M = 4$, & $m = 1$.

Je mets ces valeurs dans les expressions des vitesses que nous venons de trouver, & j'ai $x = \frac{4 \times 8}{4 \times 4 + 6 + 2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $VQ = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, & $RN = \frac{1}{4}$; multipliant donc ces vitesses par leurs masses, j'ai $xM = \frac{1}{2}$, $2VQ \times m = \frac{1}{2}$, & $2RN \times m = \frac{1}{4}$, & ajoutant ensemble ces quantités de mouvement, j'ai $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, c'est-à-dire la quantité de mouvement des cinq boules après le choc selon la direction CA est $= 8$; or la quantité Ma de A avant le choc est aussi $= 8$; donc les quantités de mouvement sont égales avant & après le choc, & le problème est résolu.

609. PROBL. IV. *Trouver les mêmes choses que dans le Problème précédent, en supposant les boules élastiques.*

Je double les vitesses des quatre boules choquées, ce qui me donne pour leurs quantités de mouvement $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, ainsi il reste encore $\frac{2}{3}$ de quantité de mouvement pour la boule A selon la même direction après le choc; or $A = 4$, donc sa quantité de mouvement est $\frac{4 \times 2}{3} = \frac{8}{3}$, & par conséquent A après le choc ira encore avec $\frac{2}{3}$ de vitesse, & ainsi des autres.

610. PROBL. V. *Connoissant la direction CA (Fig. 222.) & la quantité de mouvement d'une boule A non élastique qui choque trois autres boules égales, non élastiques, B, P, D , dont l'une P est sur la direction CA & les deux autres B, D ont des directions AB, AD qui sont des angles égaux BAX, DAX avec la direction CX , connoître les vitesses des quatre boules après le choc.*

La boule P étant sur la direction de la boule A , & rien n'obli-

geant A de changer de direction après le choc, il est constant que les deux boules A, P peuvent aller de concert après le choc avec la même vitesse; mais quant aux boules B, D, il faut nécessairement qu'elles se séparent de A dans l'instant même du choc pour les raisons que nous en avons données ci-dessus (N. 602).

Je nomme la direction $CA = a$, la direction FA ou EA $= b$, & la vitesse AX du corps A après le choc $= x$, à cause qu'elle est inconnue; la vitesse de P sera donc aussi $= x$, celle de B, selon la direction CX ou VT, c'est-à-dire la vitesse VQ, sera $\frac{bbx}{aa}$ (N. 606), & par conséquent celle de D sera aussi $\frac{bbx}{aa}$, nommant donc M la masse de A, m celle de B ou P ou D, & multipliant les vitesses par les masses, nous aurons Mx pour la quantité de mouvement de A après le choc, mx pour celle de P, $\frac{mbbx}{aa}$ pour celle de B, & $\frac{mbbx}{aa}$ pour celle de D; or la somme de ces quantités doit être égale à la quantité de mouvement Ma de la boule A avant le choc, donc nous avons $Mx + mx + \frac{2mbbx}{aa} = Ma$, & par conséquent $Maax + maax + 2mbbx = Ma^3$; d'où je tire $x = \frac{Ma^3}{Ma^2 + ma^2 + 2mbb}$ vitesse de A & de P après le choc, & mettant cette valeur de x dans la vitesse $\frac{bbx}{aa}$ de B ou de D après le choc, nous aurons $VQ = \frac{Mabb}{Ma^2 + ma^2 + 2mbb}$.

Supposons que l'angle BAX soit de 60 degrés, & que $M=2$, $m=1$, & $CA=2$, nous aurons AF ou AE $=1$ comme ci-dessus, & mettant ces valeurs dans celle de x , & de VQ nous aurons $x = \frac{2 \times 8}{8+4+2} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$, & $VQ = \frac{2 \times 1 \times 1}{8+4+2} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$, multipliant donc ces vitesses par leurs masses, nous aurons pour la quantité de mouvement de A après le choc $\frac{2 \times 8}{7} = \frac{16}{7}$ pour celle de P, $\frac{1 \times 8}{7} = \frac{8}{7}$ pour celle de B $\frac{1 \times 2}{7} = \frac{2}{7}$ & pour celle de D $\frac{2}{7}$; ainsi la somme de ces mouvemens sera $\frac{16+8+2+2}{7} = \frac{28}{7} = 4$; or la quantité de mouvement de A avant le choc est $2 \times 2 = 4$, donc les sommes des quantités de mouvement avant & après le choc sont égales, & le Problème est bien résolu.

611. PROBL. VI. Trouver les mêmes choses que dans le Problème précédent en supposant les boules élastiques.

O o o ii

Je double les vitesses de B, P, A, ce qui donne pour la vitesse de P $\frac{16}{7}$ pour celle de B, $\frac{4}{7}$, & pour celle de D, $\frac{4}{7}$; je multiplie ces vitesses par leurs masses & la quantité de mouvement de P est $\frac{1 \times 16}{7} = \frac{16}{7}$, celle de B $\frac{1 \times 4}{7} = \frac{4}{7}$, & celle de D aussi $\frac{4}{7}$, & les sommes de ces quantités de mouvement est $\frac{16+4+4}{7} = \frac{24}{7}$; donc il reste pour la quantité de mouvement de A $\frac{4}{7}$, ou $\frac{2 \times 2}{7}$, c'est-à-dire que A suivra sa direction après le choc avec une vitesse égale à $\frac{2}{7}$, & ainsi des autres.

612. PROBL. VII. Connoissant la direction CA (Fig. 223.) & la quantité de mouvement d'une boule A non élastique qui choque plusieurs autres boules égales, non élastiques, en nombre impair plus grand que trois, dont l'une est sur la direction CA & les autres prises deux à deux ont des directions également éloignées de la direction CA, trouver les vitesses des boules après le choc.

Je nomme CA = a, FA ou EA = b, AH ou AM = c & la vitesse inconnue AX de A ou de P après le choc = x, la vitesse VQ de B ou de D selon la direction AX sera donc $\frac{bx}{aa}$, & celle de R ou de K sera $\frac{cx}{aa}$; nommant donc M la masse de A, m celle de K = D = P = B = R; & multipliant les masses par les vitesses, la quantité de A après le choc sera Mx, celle de P, mx; celle de B ou de D, $\frac{bbmx}{aa}$, & par conséquent les deux ensemble feront $\frac{2bbmx}{aa}$, & celles de R & de K jointes ensemble seront $\frac{2ccmx}{aa}$; or la somme de ces quantités doit être égale à la quantité de mouvement Ma de A avant le choc, donc nous avons $Mx + mx + \frac{2bbmx}{aa} + \frac{2ccmx}{aa} = Ma$, & par conséquent $Maax + maax + 2bbmx + 2ccmx = Ma^2$, d'où je tire $x = \frac{Ma^2}{Ma + maa + 2bb + 2cc}$ vitesse de A ou de P après le choc.

Et mettant cette valeur de x dans les vitesses $\frac{bx}{aa}$ de B ou D, & $\frac{cx}{aa}$ de R ou de K, nous aurons $VQ = \frac{Mabb}{Ma + maa + 2bb + 2cc}$ & $IN = \frac{Macc}{Ma + maa + 2bb + 2cc}$.

Supposons M = 5, m = 1, l'angle BMX ou CAF de 30 degrés, & l'angle IAX ou CAH de 60, nous aurons donc en sup-

posant $CA = 2$, $FA = \sqrt{3}$ & $HA = 1$, ainsi mettant ces valeurs dans les vitesses trouvées, nous aurons $x = \frac{40}{32}$ $VQ = \frac{10}{32}$ & $IN = \frac{10}{32}$, & multipliant ces vitesses par leurs masses, la quantité de mouvement de A après le choc sera $\frac{1 \times 40}{32} = \frac{40}{32}$, celle de P sera $\frac{1 \times 40}{32} = \frac{40}{32}$, celle de B jointe à celle de D sera $\frac{60}{32}$, & celle de R jointe à celle de K sera $\frac{20}{32}$, & toutes ces quantités jointes ensemble seront $\frac{200 + 40 + 60 + 20}{32} = \frac{320}{32} = 10$; or la quantité de mouvement de A avant le choc est $2 \times 5 = 10$, donc les quantités de mouvement avant & après le choc étant égales, le Problème est résolu.

Si l'on vouloit trouver les vitesses des boules B ou D, R ou K sur leurs directions, on feroit attention que les triangles VTO, ACF étant semblables, on a $CA, AF :: VT, VO$, ou $2, \sqrt{3} :: \frac{40}{32}, \frac{40\sqrt{3}}{64} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = VO$, & par conséquent la vitesse de B sur sa direction est $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; de même les triangles ILS, CAH étant semblables donnent $CA, AH :: IL, IS$, donc $2, 1 :: \frac{40}{32}, \frac{40}{64} = \frac{1}{2}$, & par conséquent la vitesse IS de B sur sa direction est $\frac{1}{2}$, & ainsi des autres.

613. PROBL. VIII. *Trouver les mêmes choses que dans le Problème précédent en supposant les boules élastiques.*

Je double les vitesses des boules R, B, P, D, K, trouvées par le Problème précédent, & j'ai pour la vitesse de P, $\frac{10}{32}$, pour celle de B ou de D $\frac{60}{32}$ & pour celle de R ou de K $\frac{20}{32}$, donc les quantités de mouvement des cinq boules jointes ensemble est $\frac{80 + 120 + 40}{32} = \frac{240}{32}$, donc il reste pour la boule A $\frac{80}{32}$, ou $\frac{1 \times 16}{32}$, c'est-à-dire que la boule A après le choc suivroit sa direction avec $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}$ de vitesse.

Si on vouloit trouver les vitesses des boules R, B, D, K, selon leurs directions, on doubleroit les vitesses trouvées dans le Problème précédent, & l'on auroit $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ pour la vitesse de B ou D, & $\frac{1}{2}$ pour celle de R ou de K.

R E M A R Q U E.

614. De tout ce que nous venons de dire dans les Problèmes précédens, il est aisé de conclure 1°. Que si les corps ne sont pas élastiques, & qu'on tire du point C les perpendiculaires CE,

CF, CM, CH (Fig. 223.) sur les directions, les vitesses après les chocs des boules choquées & de la boule qui les choque, prises chacune selon sa direction, sont entr'elles comme les directions en prenant pour directions les droites EA, FA, MA, HA comprises entre les perpendiculaires CE, CF, CM, CH, & l'autre extrémité A de la direction CA; car les triangles ILS, CAH étant semblables IL, IS :: CA, AH, de même les triangles semblables TOV, CFA donnent VT ou IL, VO :: CA, FA, or les antecedens de ces deux proportions sont les mêmes, donc IS, VO :: AH, AF, c'est-à-dire les vitesses des boules R, B, selon leurs directions, sont entr'elles comme leurs directions AH, AF, il est visible que la vitesse IH ou VT de la boule A est à la vitesse de R comme CA est à AH, & à celle de B comme CA est à AF.

2°. Si les boules sont élastiques les vitesses des boules choquées sont encore entr'elles comme leurs directions, puisqu'elles sont les doubles des vitesses des boules qui ne seroient pas élastiques.

Or en prenant pour sinus total la direction CA, la direction AH est le sinus de complement de l'angle CAH ou RAX, fait par la direction de la boule R, avec la direction CX de la boule A, & la direction AF est le sinus de complement de l'angle CAF ou BAX fait par la direction de la boule B avec la direction de la boule A, donc les vitesses des boules R, B sont entr'elles comme les sinus de complement des angles fait par leurs directions avec la direction CA.

R E M A R Q U E II.

615. Nous avons résolu le Problème dans les deux cas de M. Bernoulli, non-seulement pour les boules élastiques, mais encore pour des boules non élastiques; voyons à présent de le résoudre d'une manière générale pour tous les autres cas.

616. PROBL. IX. Connoissant la vitesse & la direction CA (Fig. 224.) d'une boule non élastique A qui choque deux autres boules B, D égales entr'elles, non élastiques, & dont les directions forment des angles inégaux BAX, DAX avec la direction AC, connoître les vitesses des trois boules après le choc.

La difficulté de ce Problème, que personne n'a encore résolu, m'oblige de faire une hypothèse qui sera justifiée par la solution même de la question; or voici qu'elle est ma pensée.

Si

Si la boule A ne choquoit que la boule B, sa direction CA seroit composée des deux AE, & CE; supposant donc les trois boules égales, la boule A donneroit au corps B une vitesse VO égale à $\frac{1}{2}$ AE selon la direction VO, & elle devroit aller aussi selon la même direction avec une vitesse AH égale à $\frac{1}{2}$ AE, mais comme la direction CE qui ne choque point B agiroit toujours sur A, la boule A prendroit un mouvement composé de AH = $\frac{1}{2}$ AE, & de HS égale & parallele à CE; tout le monde convient de ceci. Par la même raison, si la boule A ne choquoit que la boule D, sa direction AC seroit composée des deux CF, FA, & par conséquent D recevrait sur sa direction une vitesse NM = $\frac{1}{2}$ FA, & A prendroit un mouvement composé des deux AL = $\frac{1}{2}$ AF & LR égale & parallele à CF; & il est visible que les directions NS, LR se couperoiént en un point X qui seroit sur la direction CX, car l'angle HAL étant égal à l'angle FAE, & les angles droits AHX, ALX étant égaux aux angles droits AEC, AFC, & de plus les côtés HA, AL du trapeze HALX étant proportionnels aux côtés AE, FA du trapeze EAFC, il s'ensuit que les deux trapezes sont semblables; c'est pourquoi tirant la diagonale AX dans le trapeze HAX, les triangles HAX, EAC seront semblables, de même que les triangles LAX, FAC; donc l'angle HAX sera égal à l'angle EAC, & par conséquent les lignes CA, AX seront en ligne droite puisque les angles HAX, EAC sont opposés au sommet & égaux entr'eux.

Maintenant concevons que la boule A choque à la fois les deux boules B, D, sa direction CA sera composée des quatre CE, AE, CF, AF, ou pour mieux dire des moitiés de ces quatre directions, car les deux ensemble CE, AE étant équivalentes à CA, & les deux CF, FA lui étant aussi équivalentes, il est clair que CA ne peut être composée que des moitiés de ces quatre vitesses; je dis donc que ces quatre demi-vitesses agissent ensemble de façon que les boules B, D reçoivent sur leurs directions des vitesses proportionnelles aux droites AE, EF, & qu'en même tems que la boule A se trouve poussée de part & d'autre, selon ces mêmes directions, les directions CE, CF lui donnent aussi des vitesses proportionnelles à CE, EF, de façon que ces vitesses communiquées aux trois boules, donnent selon la direction CA des vitesses, lesquelles étant multipliées par leurs masses forment une quantité de mouvement égale à la quantité de mouvement de la boule A avant le choc.

Or dans cette supposition, il est évident que la boule AX doit suivre après le choc sa première direction, car les vitesses AH , AL , étant proportionnelles aux droites EA , FA , & les vitesses HX , CX , étant aussi proportionnelles aux droites CE , CF , le trapeze $AHXL$ & le trapeze $AECF$ sont semblables, d'où il suit que la direction AX que le corps A prendra en conséquence des quatre directions AH , AL , HX , LX , dont il sera poussé, se trouvera en ligne droite avec CA ; il ne reste donc plus qu'à trouver la vitesse AX de A après le choc, & tout le reste se trouvera comme dans les Problèmes précédens.

Je sçai que l'hypothèse sur laquelle je me fonde semble choquer les règles du mouvement, la boule A trouve plus de résistance du côté de B que du côté de D ; donc elle devrait se déranger de sa direction, c'est l'idée qui se présente d'abord, lorsqu'on commence à examiner ce Problème, mais dès-lors qu'on veut approfondir la chose, on trouve à chaque pas tant de difficultés & de contradictions, qu'il n'est pas possible qu'on ne soupçonne de faux ce que l'on regardoit comme une vérité; au contraire qu'on admette pour un instant mon hypothèse, toutes les difficultés s'applanissent, & les principes s'accordent parfaitement. Les boules se séparent & ne se séparent qu'autant qu'il est nécessaire pour la liberté du mouvement, les vitesses qu'elles reçoivent de la boule A sont proportionnelles aux directions, l'égalité de mouvement selon la direction AC subsiste avant & après le choc; & de plus, lorsque les boules sont élastiques, les produits des masses par les quarrés de leur vitesses selon leur directions sont égaux au produit de la boule A par le quarré de sa vitesse CA avant le choc; il est bien difficile qu'une supposition qui réunit tant de vérités à la fois puisse porter le caractère de la fausseté, mais venons à la solution.

SOLUTION.

Je nomme x , la vitesse AX de A après le choc, M sa masse, m la masse de B ou de D , b la direction AE , & c la direction FA ; des points V & N où les boules B , D , touchent la boule A dans l'instant du choc, je mène les droites VT , NZ égales & parallèles à AX ; ainsi les points V , N , de la boule A seront parvenus en T & en Z , lorsque le centre A sera parvenu en X ; des points T , Z , j'abaisse les perpendiculaires TO , ZM , sur les directions AB , AD , & les droites VO , NM , seront les

vitesse des boules B, D, sur leur directions ; des points O, M, j'abbaisse les perpendiculaires OQ, M₄, sur les droites HT, NZ, & les droites VQ, N₄, marqueront les vitesses de B & de D, selon la direction CA ; enfin des points E, F, je mene sur CA les perpendiculaires EK, FY.

Les triangles semblables CKE, EKA, donnent CA, EA : EA, AK, ou $a, b :: b, \frac{bb}{a} = AK$, & les triangles semblables CFA, FYA, donnent CA, FA : FA, YA, ou $a, c :: c, \frac{cc}{a} = YA$; or les triangles CAE, VOT étant semblables, & leur bases CA, HT étant coupées proportionnellement par les perpendiculaires EK, OQ, nous avons CA, AK : VT, VQ ; donc $a, \frac{bb}{a} :: x, \frac{bb}{a} x = VQ$, c'est-à-dire la vitesse de B selon la direction CA est $= \frac{bb}{aa} x$; on trouvera de même que CA, YA : NS, N₄, ou $a, \frac{cc}{a} :: x, \frac{cc}{a} x = N_4$, & que par conséquent la vitesse de D selon la direction CA est $= \frac{cc}{aa} x$.

Je multiplie les masses par les vitesses que je viens de trouver, & j'ai Mx pour la quantité de mouvement de A après le choc $\frac{mbbx}{aa}$ pour la quantité de mouvement de B selon la direction CA, & $\frac{mccx}{aa}$ pour celle de D selon la même direction ; or ces quantités jointes ensemble sont égales à la quantité Ma du mouvement de A avant le choc ; donc $Mx + \frac{mbbx}{aa} + \frac{mccx}{aa} = Ma$, ou $aaMx + mbbx + mccx = Ma^2$, d'où je tire $x = \frac{Ma^2}{aaM + mbb + mcc}$, & mettant cette valeur de x dans les vitesses de B & de D, j'ai $\frac{Mabb}{aaM + mbb + mcc}$ pour la vitesse de B, & $\frac{Macc}{aaM + mbb + mcc}$ pour celle de la boule D.

Pour trouver les vitesses de B & de D selon leur directions, on observera que les triangles CAE, VTO étant semblables, donnent CA, AE : TV, VB ; mettant donc les valeurs de ces grandeurs, on aura $a, b :: \frac{Ma^2}{aaM + mbb + mcc}, \frac{Ma^2 b}{aaM + mbb + mcc}$ pour la vitesse de B, & de la même façon on trouvera $\frac{Ma^2 c}{aaM + mbb + mcc}$ pour celle de D.

Supposons que les trois boules soient égales, que l'angle

Ppp ij

BAX soit de 45 degrés, l'angle DAX de 60, & que CA soit égal à 2, nous aurons $AE = \sqrt{2}$, & $AF = 1$; mettant donc ces valeurs dans la vitesse trouvée, nous aurons $x = \frac{8}{7}$ vitesse de A après le choc, $\frac{bbx}{aa} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$ vitesse de B selon la direction CA, & $\frac{ccx}{aa} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ vitesse de D selon la même direction; or à cause de l'égalité des masses, les quantités de mouvement sont comme les vitesses; ajoutant donc les trois vitesses que nous venons de trouver, nous aurons $\frac{8}{7} + \frac{8}{7} + \frac{4}{7} = \frac{20}{7} = 2$ pour la somme des quantités de mouvement des trois boules après le choc, mais la quantité de mouvement de A avant le choc est aussi $= 2$; donc, &c.

De même, supposons $M = 2$, $m = 1$, l'angle BAX de 45 degrés, & l'angle DAX de 30, nous aurons dans cette supposition $AE = \sqrt{2}$, $FA = \sqrt{3}$, & mettant ces valeurs dans les vitesses des boules, nous aurons $x = \frac{2 \times 8}{8 + 2 + 3} = \frac{16}{13}$, $\frac{bbx}{aa} = \frac{2 \times 16}{4 \times 13} = \frac{8}{13}$, $\frac{ccx}{aa} = \frac{3 \times 16}{4 \times 13} = \frac{12}{13}$, & multipliant ces vitesses par leur masses, nous aurons $Mx = \frac{2 \times 16}{13} = \frac{32}{13}$, quantité de mouvement de A après le choc, $\frac{mbbx}{aa} = \frac{1 \times 8}{13} = \frac{8}{13}$, quantité de mouvement de B selon la direction CA, & $\frac{mccx}{aa} = \frac{1 \times 12}{13} = \frac{12}{13}$, quantité de mouvement de D selon la même direction, & ajoutant ensemble ces quantités, nous aurons $\frac{32 + 8 + 12}{13} = \frac{52}{13} = 4$; or la quantité de mouvement de A avant le choc est $2 \times 2 = 4$; donc, &c. & ainsi des autres.

617. PROBL. X. Trouver les mêmes choses que dans le Problème précédent, en supposant les boules élastiques.

SOLUTION.

Supposons les trois boules égales, la direction $CA = 2$, l'angle BAX de 45 degrés, & l'angle DAX de 60; par le Problème précédent, la vitesse de B selon la direction CA est $\frac{8}{7}$, & celle de D est $\frac{4}{7}$, je double ces vitesses, ce qui donne $\frac{16}{7}$ pour la vitesse de B, en supposant les boules élastiques, & $\frac{8}{7}$ pour celle de D; ajoutant donc ensemble ces deux vitesses, la somme $\frac{16 + 8}{7} = \frac{24}{7}$ est la quantité de mouvement des boules B, D, à cause de l'égalité des masses, & comme il faut $\frac{16}{7}$ pour faire

égalité de mouvement avant & après le choc, la boule A a encore $\frac{2}{7}$ selon la direction AC.

Maintenant quand les boules ne sont pas élastiques, la vitesse de B selon sa direction AB, est $\frac{Maab}{Maa + mbb + mcc} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$, & celle de D, $\frac{Maac}{Maa + mbb + mcc} = \frac{4}{7}$; doublant donc ces vitesses, nous aurons $\frac{8\sqrt{2}}{7}$ pour la vitesse de B selon sa direction AB, lorsque les boules sont élastiques, $\frac{8}{7}$ pour la vitesse de D selon sa direction AD, & $\frac{2}{7}$ pour la vitesse de A; élevant donc ces vitesses au quarré, nous aurons $\frac{128}{49}$ pour le quarré de la vitesse de B, $\frac{64}{49}$ pour celle de D, & $\frac{4}{49}$ pour celle de A; supposant donc $M = m = 1$, la somme des quarrés des vitesses multipliées par leur masses sera $\frac{128 + 64 + 4}{49} = \frac{196}{49} = 4$; or le quarré de la vitesse CA de A avant le choc est aussi $2 \times 2 = 4$; donc, &c.

De même supposant $M = 2$, $m = 1$, $CA = 2$, l'angle BAX de 45 degrés & l'angle DAX de 30, nous avons par le Problème précédent $\frac{8}{13}$ pour la vitesse de B selon CA lorsque les boules ne sont pas élastiques, & $\frac{2}{13}$ pour celle de D; donc en doublant ces vitesses, nous avons $\frac{16}{13}$ pour la vitesse de B selon CA lorsque les boules sont élastiques, & $\frac{4}{13}$ pour celle de D; multipliant donc ces vitesses par leur masse, la somme des produits ou des quantités de mouvement de B & D sera $\frac{160}{13}$, & comme il faut $\frac{12}{13}$ pour égaler la quantité de mouvement de M avant le choc, il restera $\frac{12}{13} = \frac{2 \times 6}{13}$ pour la quantité de mouvement de A après le choc, c'est-à-dire A continuera de se mouvoir selon la même direction avec une vitesse $= \frac{6}{13}$.

Par le même Problème précédent, nous avons $\frac{Maab}{Maa + mbb + mcc} = \frac{2 \times 4 \times \sqrt{2}}{8 + 2 + 3} = \frac{8\sqrt{2}}{13}$ pour la vitesse de B selon sa direction AB lorsque les boules ne sont pas élastiques, & $\frac{Maac}{Maa + mbb + mcc} = \frac{2 \times 4 \times \sqrt{3}}{13} = \frac{8\sqrt{3}}{13}$ pour celle de D; doublant donc ces vitesses, nous aurons $\frac{16\sqrt{2}}{13}$, $\frac{16\sqrt{3}}{13}$ pour les vitesses de B & D selon leur directions, lorsque les boules sont élastiques; faisant donc les quarrés des vitesses $\frac{16\sqrt{2}}{13}$, $\frac{16\sqrt{3}}{13}$, $\frac{6}{13}$ des boules B, D, A, après le choc, nous aurons $\frac{12}{13}$ pour le quarré de la vitesse de B,

$\frac{7 \cdot 18}{1 \cdot 00}$ pour celui de la vitesse de D, & $\frac{26}{1 \cdot 00}$ pour celui de la vitesse de A, & multipliant ces quarrés par les masses, nous aurons $\frac{512 + 768 + 72}{169} = \frac{1328}{169} = 8$; or le quarré de la vitesse de A avant le choc multiplié par la masse, est aussi $4 \times 2 = 8$; donc, &c.

R E M A R Q U E.

618. Avant d'aller plus loin, je suis bien aise de faire observer un cas particulier auquel on n'a peut être pas fait attention, & qui confirmera de plus en plus mon hypothèse.

Supposons que la boule A non élastique poussée selon la direction CA vienne à choquer les deux boules B, D non élastiques égales entr'elles, & dont les directions faisant l'une un angle BAX moindre de 90 degrés; par exemple de 30, & l'autre un angle DAX de 90 degrés; je demande d'abord si la boule A donnera quelque mouvement à la boule D, ou si elle n'en donnera point.

Si l'on répond que la boule D ne recevra aucun mouvement, à cause que la direction AC est parallèle à la tangente LS, il s'en suivra que la boule B fera choquée de même que si elle étoit seule; or en ce cas la direction CA étant composée des deux CF, FA, si nous supposons les boules égales, la boule B recevra par le choc une vitesse égale à $\frac{1}{2}$ AF selon sa direction, & le corps A devroit aller aussi du même côté avec la même vitesse $\frac{1}{2}$ AF = AH, mais comme la direction CF qui n'agit point sur B agit toujours sur A, la boule A prendra une direction composée de la direction AH & de la direction HM égale & parallèle à CF, donc la boule A prendra la direction AM, & l'on prouvera aisément que la quantité de mouvement selon la direction CA, avant & après le choc sera la même; car la vitesse NO = AH = $\frac{1}{2}$ AF du corps B, donnera selon la direction AC une vitesse = $\frac{1}{4}$, la vitesse AH du corps A donnera aussi selon AC une vitesse = $\frac{1}{4}$, & la vitesse HM du même corps A donnera selon la même direction AC une vitesse = $\frac{1}{4}$; ainsi supposant la masse A = B = 1, les quantités de mouvement de ces deux masses après le choc seront $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3 + 3 + 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$, & par conséquent elles seront égales à la quantité A x AC = 2 du corps A avant le choc.

Mais voici la difficulté; si le centre de la boule A prend la direction AM, le point P ou la boule A touche la boule D prendra

la direction PN égale & parallèle à AM, mais AM passe entro AX, & AP, car les triangles rectangles AHX, AFC étant semblables, on a $AH, AF :: HX, CF$; or $AH = \frac{1}{2} AF$, donc $HX = \frac{1}{2} CF = \frac{1}{2} HM$, & par conséquent l'extrémité M de HM tombe en delà de AX; or PN étant parallèle à AM, & AX parallèle à LS, il est visible que PN passera entre LS & PD, & que par conséquent le point P ne peut suivre la direction PN sans donner du mouvement à la boule D; ce qui est contraire à ce qu'on prétendoit.

Que si on répond que la boule A choque la boule D, la direction AM étant composée des deux AZ, ZM, la boule D prendra la direction Pp égale & parallèle à $\frac{1}{2} ZM = zZ$, & la boule A prendra la direction Az composée de zZ & de AZ, & on démontrera de même que la quantité de mouvement selon la direction CA avant & après le choc est la même, mais voici l'inconvenient; si le centre A prend la direction Az, au lieu de la direction AM, je mene la droite zH, & l'angle AHZ n'est plus droit, car l'angle MHA est droit par la construction; menant donc du point V la droite VT égale & parallèle à Az, & menant les droites TO, Tz le point V de la boule B se trouvera en O quand le point V de la boule A sera en T, & que le centre de la même boule sera en z; or les angles OTV, YOT étant aigus, il est clair que les boules B, A couperont la ligne OT, & que par conséquent les deux boules B, A ne se sépareront pas dans l'instant du choc, ce qui est cependant nécessaire, ainsi que nous l'avons démontré ci-dessus (N. 602).

Il y a donc ici de la difficulté de part & d'autre, car si l'on veut que la boule D ne reçoive aucun mouvement & que la boule A agisse sur B comme si elle étoit seule, je fais voir que la boule D recevra du mouvement; si au contraire on veut que la boule D reçoive du mouvement, je prouve que les boules B, A ne peuvent se mouvoir toutes deux d'une manière uniforme; il faut donc nécessairement avoir recours à d'autres principes, & mon hypothèse est l'unique que l'on puisse employer; les directions AF, CF agissant proportionnellement, il arrive qu'autant le corps A se trouve éloigné de sa direction par la force AF, autant en est-il rapproché par la force CF, & par conséquent la boule D ne reçoit rien puisqu'il ne reste aucune force selon la direction AP, qui puisse la passer. Venons au calcul.

Je nomme x la vitesse AX du corps A après le choc, M la

masse de A ou de B, b la direction AF & a la direction AC; mène Vt égale & parallèle à AX , VO perpendiculaire à la direction AB, & OQ perpendiculaire sur Vt ; ainsi VO marque la vitesse de B selon sa direction, & VQ marque la vitesse selon la direction CA; or à cause de AC, $AK :: Vt, VQ$, j'ai $a, \frac{bb}{a} :: x, \frac{bb}{aa} x = VQ$, donc la vitesse de B selon CA est $\frac{bb}{aa} x$ multipliant donc les vitesses de A & de B par les masses, j'ai $Mx + \frac{Mbbx}{aa}$ pour la somme de leurs quantités de mouvement après le choc; or cette somme est égale à la quantité de mouvement avant le choc, donc $Mx + \frac{Mbbx}{aa} = Ma$, ou $aaMx + bbMx = Ma^2$, d'où je tire $x = \frac{Ma^2}{aaM + bbM}$ vitesse de A après le choc & mettant cette valeur dans $\frac{bbx}{aa}$, j'ai $\frac{Ma^2b}{aaM + bbM}$ vitesse de B selon la direction CA, & faisant CA, AF :: Vt, VO , ou $a, b :: \frac{Ma^2}{aaM + bbM}, \frac{Ma^2b}{aaM + bbM} = VO$, j'ai la vitesse de B selon sa direction AB.

Supposons $M = 1$ & $a = 2$, ce qui donne $b = \sqrt{3}$, donc $\frac{8}{4+3} = \frac{8}{7}$ & $\frac{bbx}{aa} = \frac{3 \times 8}{4 \times 7} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$, donc la vitesse de A après le choc est $\frac{8}{7}$, & celle de B selon la direction CA est $\frac{6}{7}$, & multipliant ces vitesses par les masses, la somme des quantités de mouvement après le choc est $\frac{1 \times 8}{7} + \frac{1 \times 6}{7} = \frac{14}{7} = 2$, & cette somme est égale à la quantité de mouvement $1 \times 2 = 2$ de A avant le choc.

Si les boules sont élastiques je double la vitesse $\frac{6}{7}$, ce qui donne $\frac{12}{7}$ pour la vitesse de B selon CA lorsque les boules sont élastiques, & comme il faut $\frac{14}{7}$ pour faire égalité de mouvement avant & après le choc, la boule A doit donc avoir $\frac{2}{7}$ après le choc, or la vitesse de B selon sa direction AB lorsque les boules ne sont pas élastiques est $\frac{Ma^2b}{Ma^2 + Mb^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, donc doublant cette vitesse j'ai $\frac{8\sqrt{3}}{7}$ pour la vitesse de B selon sa direction; je fais le carré de $\frac{8\sqrt{3}}{7}$ & de la vitesse $\frac{2}{7}$ de la boule A, ce qui donne $\frac{192}{49}$ & $\frac{4}{49}$, je multiplie ces carrés par les masses, & la somme des produits est $\frac{1 \times 192}{49} + \frac{1 \times 4}{49} = \frac{196}{49} = 4$; or le carré de la vitesse de A après le choc

choc étant multiplié par la masse A est aussi $= 4$, donc, &c.

619. PROBL. XI. Connoissant la vitesse & la direction AC, (Fig. 226.) d'une boule A non élastique qui choque un nombre de boules B, D, L, I, non élastiques au-dessus de deux, & dont les directions prises deux à deux ne font pas des angles égaux avec la direction CA, connoître les viesses des boules après le choc.

SOLUTION.

Je me fers de la même hypothèse du Problème précédent, c'est-à-dire qu'en considérant la boule A comme si elle ne choquoit que B, sa vitesse après le choc seroit composée de la vitesse Ad égale à la vitesse que B recevrait, & d'une vitesse selon la direction dX qui seroit égale & parallèle à CG, de même si A ne choquoit que D sa vitesse après le choc seroit composée de la vitesse Aa égale à la vitesse que D recevrait, & d'une vitesse selon la direction aX, laquelle seroit égale & parallèle à CE, & ainsi des autres; or en supposant que la boule A choque à la fois les quatre boules, je conçois que le mouvement CA est composé du quart des huit directions, GA, HA, FA, EA, CG, CH, CE, CF, & que les quatre premières se communiquant proportionnellement aux boules dont elles sont les directions & à la boule A, les quatre autres se communiquent aussi proportionnellement à la boule A, laquelle prendra par conséquent la direction AX, & que tout se fasse de façon que les quantités de mouvement après le choc selon la direction CA soient égales à la quantité de mouvement de A avant le choc.

Je nomme $CA = a$, $EA = b$, $GA = c$, $HA = f$, $FA = l$, la masse $A = M$, la masse $B = D = L = I = m$, & la vitesse AX de la boule A après le choc $= x$; par les raisonnemens que nous avons faits dans les Problèmes précédens, nous aurons $\frac{ccx}{aa}$ pour la vitesse de B selon la direction CA, $\frac{bbx}{aa}$ pour celle de D, $\frac{ffx}{aa}$ pour celle de I & $\frac{llx}{aa}$ pour celle de L; multipliant donc ces vitesses par les masses la somme des quantités de mouvement sera $Mx + \frac{mccx}{aa} + \frac{mbbx}{aa} + \frac{mffx}{aa} + \frac{mllx}{aa}$, & par conséquent $Mx + \frac{mccx}{aa} + \frac{mbbx}{aa} + \frac{mffx}{aa} + \frac{mllx}{aa} = Ma$, d'où l'on tire $x = \frac{Ma}{Ma + mcc + mbb + mff + mll}$ vitesse de A après le choc; & mettant cette valeur de x dans les

autres vitesses, nous aurons $\frac{ccx}{aa} = \frac{Macc}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ vitesse de B selon la direction CA, $\frac{bbx}{aa} = \frac{Mabb}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ vitesse de D, $\frac{ffx}{aa} = \frac{Maff}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ vitesse de I, & $\frac{llx}{aa} = \frac{Mall}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ vitesse de L.

Pour trouver les vitesses des boules selon leurs directions on observera que les triangles semblables CGA, VTO donnent CG, CA :: VT, VO, donc $a, c :: \frac{Ma^3}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ & $\frac{Miac}{Maa + mcc + mbb + mff + mll} = VO$ vitesse de B selon sa direction, & par un semblable raisonnement on trouvera $\frac{Maab}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ vitesse de D selon sa direction, $\frac{Maaf}{Maa + mcc + mbb + mff + mll}$ vitesse de I selon sa direction, & $\frac{Maal}{Maa + mbb + mcc + mff + mll}$ vitesse de L selon sa direction.

Supposons $M = IO$, $m = 1$, l'angle BAX ou CAG de 60 degrés, l'angle IAX ou CAH de 45 degrés, l'angle LAX ou CAF de 30 degrés & l'angle DAX, ou CAE d'environ 14 degrés 29 minutes, de façon qu'en nommant le sinus total CA = 2, le sinus CE soit $= \frac{1}{2}$, nous aurons AG = 1, FA = $\sqrt{3}$, HA = $\sqrt{2}$, & EA $\sqrt{\frac{3}{2}}$, & mettant ces valeurs dans les vitesses trouvées, nous aurons $x = \frac{10 \times 8}{40 + 1 + \frac{1}{4} + 2 + 3} = \frac{120}{199}$ vitesse de A après le choc ; $\frac{ccx}{aa} = \frac{80}{199}$ vitesse de B selon la direction CA, $\frac{bbx}{aa} = \frac{160}{199}$ vitesse de D, $\frac{ffx}{aa} = \frac{160}{199}$ vitesse de I, & $\frac{llx}{aa} = \frac{240}{199}$ vitesse de L, & multipliant ces vitesses par leurs masses la somme des quantités de mouvement après le choc sera $\frac{3200 + 80 + 300 + 160 + 240}{199} = \frac{1990}{199} = 20$; or la quantité de mouvement de A avant le choc est aussi $Ma = 10 \times 2 = 20$, donc &c.

620. PROBL. XII. Trouver les mêmes choses que dans le Problème précédent, en supposant les boules élastiques.

SOLUTION.

Je double les vitesses trouvées par le Problème précédent, & j'ai $\frac{160}{199}$ pour la vitesse de B selon la direction CA lorsque les bou

les sont élastiques, $\frac{600}{199}$ pour celle de D, $\frac{120}{199}$ pour celle de I, & $\frac{400}{199}$ pour celle de L, & multipliant ces vitesses par leurs masses, la somme des quantités de mouvement des quatre boules choquées est $\frac{1600 + 600 + 120 + 480}{199} = \frac{2800}{199}$, & comme il faut $\frac{2800}{199}$ pour faire égalité de mouvement avant & après le choc, il reste pour la quantité de mouvement de A selon sa direction $\frac{2400}{199} = \frac{10 \times 240}{199}$, c'est-à-dire que A après le choc s'avancera selon sa direction avec une vitesse égale à $\frac{240}{199}$.

Maintenant par le Problème précédent la vitesse de B selon sa direction AB est $\frac{Maac}{Maa + mbb + mce + mff + mll} = \frac{160}{199}$ & celle de D est

$$\frac{Maab}{Maa + mbb + mce + mff + mll} = \frac{160\sqrt{2}}{199}, \text{ celle de I est }$$

$$\frac{Maaf}{Maa + mbb + mce + mff + mll} = \frac{160\sqrt{2}}{199} \text{ \& celle de L est }$$

$$\frac{Maal}{Maa + mce + mbb + mff + mll} = \frac{160\sqrt{3}}{199}, \text{ doublant donc ces vitesses,}$$

& faisant leurs quarrés de même que le quarré de la vitesse $\frac{240}{199}$ de A, puis multipliant tout par les masses la somme des quarrés des vitesses multipliés par les masses après le choc, sera $\frac{585640 + 101400 + 384000 + 204800 + 307200}{39601} = \frac{1584040}{39601} = 40$; or le pro-

duit des quarrés de la vitesse CA par la masse A est aussi $4 \times 10 = 40$, donc, &c.

REMARQUE.

621. La maniere dont nous venons de résoudre la question est generale pour un nombre quelconque de boules pair ou impair, c'est-à-dire, soit qu'il y en ait un même nombre de part & d'autre, soit qu'il y en ait plus d'un côté que de l'autre, on peut aussi en mettre une qui soit sur la direction CA comme nous avons fait ci-dessus, enfin la question se résoudra également lorsque les boules choquées sont inégales entr'elles; au reste le prétendu principe des forces vives n'a nulle part dans cette question, il est vrai que lorsque les corps sont élastiques les quarrés des vitesses selon les différentes directions multipliés par les masses sont égaux au quarré de la vitesse primitive CA multipliée par la masse, mais nous avons fait observer que cela n'étoit ainsi que parce que la vitesse primitive étoit composée elle-même d'un même nombre de vitesses dont les

quarrés multipliés par les masses seroient aussi égaux au quarré de la vitesse CA multipliée par la masse A. D'ailleurs cette propriété ne peut servir tout au plus que pour faire découvrir ce qui doit arriver lorsque A ne choque que deux boules égales & dont les directions sont également éloignées de la direction CA, mais elle ne sert de rien pour la solution générale de la question, & tout l'usage qu'on en tire n'est autre que celui de faire voir que la solution trouvée se trouve d'accord avec elle; c'est donc à tort que M. Bernoulli relève ici l'efficacité de la théorie des forces vives, s'il a résolu une partie de la question, c'est le principe dont nous venons de parler qui l'y a conduit, encore y a-t-il trouvé de grandes difficultés, comme il l'avoue lui-même, & comme il paroît par la façon dont il traite la matière lorsqu'il s'agit d'un nombre pair de boules choquées plus grand que deux: il est étonnant qu'un si célèbre Geomètre n'ait pas pu pousser la chose plus loin, mais les plus grands génies ne sont pas toujours à l'abri de l'offuscation des préjugés.

Du choc des Corps projetés qui se rencontrent pendant leur mouvement.

622. Deux corps égaux H, R (Fig. 229.) étant projetés des points A, F avec une même force & sous des angles égaux PAC, QFD tournés vers les côtés opposés, en sorte qu'ils viennent à se rencontrer pendant leur mouvement, trouver le point où ils se rencontrent, la force du choc, & leur route après le choc.

La force & l'angle d'élevation étant connus, l'amplitude AC ou DF de l'un ou l'autre corps sera aussi connue, puisqu'il n'y a qu'à faire un coup d'épreuve avec la même force & sous le même angle; & comme la distance des points A, F des batteries est aussi connue, il est visible qu'on connoitra aisément la distance KL des points K, L qui coupent les deux amplitudes AC, FD en deux également.

Je retranche de KL la somme HR des rayons des deux bombes, & prenant la moitié du reste, l'ordonnée NH ou RO doit être égale à cette moitié, car il est visible que $NH + HR + NO = KL$; il s'agit donc de trouver l'abscisse BN ou EO correspondante à l'ordonnée NH ou RO; or par la propriété de la parabole $\overline{NH} = BN \times p$, donc $\frac{\overline{NH}}{p} = BN$, c'est-à-dire qu'en faisant

le carré de l'ordonnée NH, & divisant ce carré par le parametre lequel se connoit aisément quand l'amplitude & la hauteur sont connus, le quotient sera l'abscisse cherchée; ainsi prenant BN ou EO égal à ce quotient, & menant l'ordonnée NH ou OR, les bombes se rencontreront lorsqu'elles seront aux points H, R.

Maintenant si la bombe R choquoit un corps qui fut perpendiculaire sur sa direction MA, son choc seroit MA divisé par le tems (N. 591), ainsi nommant a le parametre de l'axe EO, ou BK, x l'abscisse EO ou BN, le tems seroit \sqrt{x} , & la force du choc seroit $\sqrt{a+4x}$ (N. 591), ou MA divisé par le tems, ou la racine du parametre du diametre qui passe par le point H ou R; or MR étant composée des deux MO, OR, MR divisé par \sqrt{x} sera aussi composée de MO, OR divisées chacune par \sqrt{x} ; mais MO ne choque point la bombe H, car la direction TH de cette bombe étant composée des deux TN, NH, il est visible que les deux forces TN, MO qui sont paralleles, ne se choquent point, & qu'il n'y a que les deux OR, NH dont les directions sont contraires qui influent au choc; donc la bombe R choque avec une force égale à OA divisé par \sqrt{x} , & la bombe H choque avec une force égale à NH divisé par \sqrt{x} ; or par la propriété de la parabole on a $\overline{RO} = \overline{NO} = ax$, donc $RO = \sqrt{ax}$, & $\frac{RO}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{x}} = \sqrt{a}$; nommant donc M la masse de chacune des bombes, la force du choc sera $2M\sqrt{a}$

Les deux bombes étant égales de même que leurs vitesses après le choc, elles doivent rebrousser chemin après le choc avec la même vitesse (N. 327); ainsi la vitesse de la bombe R vers O doit être encore \sqrt{a} , & la vitesse de la bombe H vers N est aussi \sqrt{a} , mais les vitesses MO, TN divisées chacune par \sqrt{x} agissant toujours sur ces bombes, & ces vitesses étant $\frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} = \sqrt{4x}$ les bombes prendront des directions Rr, Hh composées des forces \sqrt{a} , $\sqrt{4x}$ & par conséquent la vitesse de chacune des bombes sera $\sqrt{a+4x}$ de même qu'avant le choc; mais R prendra une direction Rr parallele à la direction TH de H avant le choc, & H prendra une direction Hh parallele à la direction MR de R avant le choc; & comme la force avec laquelle R parcourra sa direction est la même que la force avec laquelle H auroit continué de parcourir sa direction TH s'il n'y avoit point eu de choc, il est visible que la pesanteur agira sur R dans sa nouvelle direction,

comme elle auroit agi sur H dans la première direction, & par conséquent R parcourra un arc de parabole parallèle, égal & semblable à l'arc HC dans le même tems que H auroit parcouru HC; par la même raison la bombe H après le choc décrira un arc de parabole parallèle, égal & semblable à l'arc RD dans le même tems que R auroit parcouru RD.

623. Supposant les bombes égales, les hauteurs BK, EL égales, & les amplitudes AC, DE inégales, trouver les mêmes choses que dans le nombre précédent (Fig. 231).

Je nomme la distance connue $KL = c$, la somme des deux rayons des deux boules $= b$, le paramètre de l'axe BK $= a$, celui de l'axe LL $= p$, la hauteur EO ou BN à laquelle les deux bombes se rencontreront $= x$; il est visible que lorsque les bombes viendront à se choquer on aura $NH + HR + RO = KL$; or par la propriété de la parabole, j'ai $\overline{NH} = BN \times a = ax$, donc $NH = \sqrt{ax}$; de même j'ai $\overline{RO} = EO \times p = px$, donc $RO = \sqrt{px}$; mettant donc les valeurs de NH, RO, & KL dans $NH + HR + RO = KL$, j'ai $\sqrt{ax} + b + \sqrt{px} = c$, & par conséquent $c - b = \sqrt{ax} + \sqrt{px}$, c'est-à-dire que si de KL je retranche la somme b des rayons, le reste sera composé de deux parties qui seront comme \sqrt{ax} , \sqrt{px} , ou comme \sqrt{a} , \sqrt{p} , à cause du multiplicateur commun x ; donc si après avoir retranché HR de KL, je divise le reste en deux parties qui soient comme \sqrt{a} , \sqrt{p} , j'aurai les deux ordonnées NH, RO correspondantes au point du choc; ainsi pour trouver l'abaisse EO, je divise le carré de RO par le paramètre p , & le quotient est la hauteur EO, car par la propriété de la parabole, j'ai $\overline{RO} = EO \times p$, d'où je tire $\frac{\overline{RO}}{p} = EO$, donc le point du choc est trouvé.

Si les bombes se choquoient mutuellement selon leurs directions, le choc de H seroit $\frac{TH}{\sqrt{x}}$, & celui de R seroit $\frac{MR}{\sqrt{x}}$, mais H ne choque que selon la direction NH, & R ne choque que selon OR, donc le choc de H est $\frac{NH}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{x}} = \sqrt{a}$, & le choc de R est $\frac{OR}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{px}}{\sqrt{x}} = \sqrt{p}$, & par conséquent le choc total est $M\sqrt{a} + M\sqrt{p}$.

Les deux bombes étant égales, leurs vitesses après le choc,

selon les directions HN, RO se trouvent échangées (N. 328), c'est-à-dire R après le choc aura selon la direction RO une vitesse $=\sqrt{a}$, & H aura selon la direction HN une vitesse $=\sqrt{p}$; or la force $\frac{TN}{\sqrt{x}}$ n'ayant point agi sur R, agit toujours sur H, & la force $\frac{MO}{\sqrt{x}}$ n'ayant point agi sur H, agit toujours sur R, donc H prendra une direction composée des deux \sqrt{p} , $\frac{TN}{\sqrt{x}}$, & R prend une direction composée des deux \sqrt{a} , $\frac{MO}{\sqrt{x}}$; or la direction de H avant le choc étoit composée de \sqrt{a} , $\frac{TN}{\sqrt{x}}$ & $\frac{TN}{\sqrt{x}} = \frac{MO}{\sqrt{x}}$, donc cette direction étoit composée de \sqrt{a} , $\frac{MO}{\sqrt{x}}$, mais nous venons de voir que la direction de R après le choc est composée aussi de \sqrt{a} , $\frac{MO}{\sqrt{x}}$, donc la direction Rr de R après le choc est parallèle à la direction TH de H avant le choc; par un semblable raisonnement on prouvera que la direction Hh de H après le choc est parallèle à la direction MR de R avant le choc.

Puis donc que R a la même direction & la même vitesse que H avoit dans l'instant du choc, il s'ensuit que la pesanteur de R après le choc l'abaissera de la même façon qu'elle auroit abaissé H, s'il n'y avoit point eu de choc, & que par conséquent R décrira un arc de parabole égal, parallèle & semblable à l'arc de parabole HC dans le même tems que H auroit décrit cet arc s'il n'y avoit point eu de choc, & par la même raison H après le choc décrira un arc de parabole égal, parallèle & semblable à l'arc RD, dans le même tems que R auroit décrit cet arc s'il n'y avoit point eu de choc.

624. *Les bombes étant égales, & les hauteurs & les amplitudes inégales, trouver les mêmes choses que ci-dessus, & de plus de combien de tems l'une des bombes doit être poussée plutôt que l'autre, afin qu'elles viennent à se choquer dans leurs projections (Fig. 230).*

Les hauteurs BK EO étant connues, leur différence sera aussi connue; je nomme donc cette différence $=r$, le parametre de l'axe BK $=a$, celui de l'axe EL $=p$, la somme des rayons des bombes $=b$; la distance KL $=c$, la hauteur EO de EL à laquelle les bombes se rencontreront $=x$, donc BN $=x+r$; or par la propriété de la parabole j'ai $\overline{NH} = \overline{NB} \times a$, donc $\overline{NH} = ax$

+ ar, & $NH = \sqrt{ax + ar}$; de même $\overline{RO} = EO \times p$, donc $\overline{RO} = px$ & $RO = \sqrt{px}$.

$NH + HR + RO = KL$, donc $\sqrt{ax + ar} + b + \sqrt{px} = c$, & $\sqrt{ax + ar} + \sqrt{px} = c - b$, & quarrant chaque membre, j'ai $ax + ar + 2\sqrt{apxx + arpx} + px = c^2 - 2bc + bb$, & par conséquent $2\sqrt{apxx + arpx} = c^2 - 2bc + bb - ax - ar - px$, & pour abréger faisant $c^2 - 2bc + bb = mm$, j'ai $2\sqrt{apxx + arpx} = mm - ax - ar - px$; & quarrant chaque membre, j'ai $4apxx + 4arpx = m^4 - 2am^2x + aax^2 - 2armin + 2aarx + aarr - 2pmmx + 2apxx + 2arpx + ppx^2$, & corrigeant l'expression, j'ai $2apx^2 + 2arpx = m^4 - 2am^2x + aax^2 - 2armin + 2aarx + aarr - 2pmmx + ppx^2$, & ordonnant l'équation, j'ai

$$\begin{aligned} + 2apx^2 + 2arpx - m^4 &= 0 \\ - aax^2 + 2am^2x + 2armin \\ - ppx^2 - 2aarx - aarr \\ + 2pmmx \end{aligned}$$

& divisant chaque terme de cette équation par $2ap - aa - pp$, puis faisant le coefficient du second terme égal à une seule grandeur $\pm l$ qui sera négative ou positive, selon que l'évaluation de ce coefficient sera positif ou négatif, & faisant aussi le troisième terme égal à une seule grandeur $-f$ qui sera nécessairement négative, à cause que le Problème ne pouvant pas avoir deux solutions, l'équation doit avoir une racine fautive auquel cas le signe du troisième terme est toujours $-$, soit que celui du second soit $+$ ou qu'il soit $-$, on aura une équation préparée $x^2 \pm lx - f = 0$, donc $x^2 \pm lx = f$, & ajoutant de part & d'autre le carré $\frac{1}{4}ll$ de la moitié du coefficient du second terme, on aura $x^2 \pm lx + \frac{1}{4}ll = f + \frac{1}{4}ll$, & tirant la racine quarrée on aura $x \pm \frac{1}{2}l = \sqrt{f + \frac{1}{4}ll}$ & $x = \mp \frac{1}{2}l + \sqrt{f + \frac{1}{4}ll}$, ainsi on aura la valeur de EO ; donc menant l'ordonnée OR prolongée jusqu'en N on aura $HR = b$, & par conséquent les bombes étant venues en H & R se choqueront.

Maintenant les bombes ne se choquant que selon leurs directions NH , OR divisées par les tems, c'est-à-dire $\frac{NH}{\sqrt{x+r}} = \frac{\sqrt{ax+r}}{\sqrt{x+r}}$

$=\sqrt{a}$, & $\frac{OR}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{p^2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{p}$, il est visible que le choc fera $M\sqrt{a} + M\sqrt{p}$.

Les deux bombes étant égales feront échange de leurs vitesses après le choc (N. 328), donc R ira selon la direction RO avec une vitesse $=\sqrt{a}$, & H ira selon la direction HN avec une vitesse $=\sqrt{p}$, mais comme les vitesses $\frac{MO}{\sqrt{x}} = \frac{mR}{\sqrt{x}} = \sqrt{4x}$ & $\frac{TN}{\sqrt{x+r}} = \frac{rH}{\sqrt{x+r}}$ n'ont pas agi pendant le choc, la bombe H prendra une direction vers K composée des deux \sqrt{p} & $\frac{rH}{\sqrt{x+r}}$, & la bombe R prendra une direction vers L composée des deux \sqrt{a} & $\frac{mR}{\sqrt{x}}$.

Pour connoître les paraboles que les bombes décriront en conséquence de leur pesanteur, je multiplie les deux forces composantes de leurs vitesses après le choc par leurs tems, c'est-à-dire, je multiplie les vitesses \sqrt{a} , & $\frac{mR}{\sqrt{x}}$ par \sqrt{x} , afin de savoir l'espace que R parcourra dans un tems égal à celui qu'elle a employé à parvenir en R, & j'ai \sqrt{ax} , mR ou \sqrt{ax} , $2x$, à cause que $mR = MO = 2EO = 2x$, c'est-à-dire qu'en prenant sur RO une partie $Ru = \sqrt{ax}$, les vitesses composantes de R après le choc dans un tems égal à celui que R a employé à parvenir en R feront RV, mR , & par conséquent la composée sera $=mV$, ainsi menant Rr parallele & égale à mV , la bombe R prendra la direction Rr, d'où il suit que si R avant le choc avoit été poussée par les vitesses composantes d'après le choc, sa direction sur rR prolongée du côté de T auroit été égale à Rr ou à mV .

Or comme les directions MO, OR qui auroient fait parcourir à R la direction MR, sont toutes deux uniformes, & que pour avoir les forces qui lui ont fait parcourir l'arc parabolique ER, il faut substituer à la place de la force verticale & uniforme MO, une autre force verticale & accélérée, qui à la fin du même tems donnât une vitesse acquise, égale à la vitesse MO, & qui par conséquent ne fît parcourir dans le même tems qu'un espace EO moitié de l'espace MO (N. 63); de même en supposant que les deux vitesses composantes avant le choc fussent mR , RV, il n'y auroit qu'à substituer à la place de la verticale & uniforme mR , une accélérée qui à la fin du même tems donnât une vitesse acquise égale à la vitesse mR , & qui par conséquent ne fît parcourir qu'un espace $\frac{1}{2}mR$ moitié de mR , & l'on auroit l'arc para-

R r r

bolique $7V$, qui seroit égal, semblable & parallèle à l'arc parabolique, que R auroit décrit en venant du côté de T vers R .

Maintenant les directions mV , & RV ou $7u$ son égale, étant parcourues dans le même tems, il s'ensuit que la bombe poussée par la force horisontrale $8u$, se trouvant abaissée par sa pesanteur de la quantité $uV = 7m$, la même bombe poussée par la force oblique Vm de V en m , ne se trouveroit abaissée par sa pesanteur que de la même quantité $7m$, & par conséquent elle décriroit la même parabole, ainsi qu'il a été prouvé ci-dessus (*N. 295*), donc si cette bombe au lieu d'être poussée avec la force Vm de V en m étoit poussée selon la direction Vx , en sorte que Vx fût égal à Vm , elle se trouveroit abaissée à la fin de Vx d'une quantité $xy = m7$, & par conséquent elle décriroit dans ce mouvement un arc parabolique Vy qui seroit la continuation de la parabole $8V$, comme il a été démontré plus haut (*N. 295*), donc puisque R après le choc seroit poussé avec une force $Rr = Vx$, elle décriroit à cause de sa pesanteur un arc parabolique égal, parallèle & semblable à l'arc Vy , ce qui doit s'entendre en cas que la ligne horizontale AF ne la retint dans sa course, auquel cas il seroit facile de déterminer par nos principes, dans combien de tems elle se trouveroit arrêtée par cette horizontale.

Il est visible que le parametre de l'axe $7R$ de la parabole $7Vy$ est le même que le parametre a de l'axe BK de la parabole ABC , car puisque $RV = \sqrt{ax}$, son quarré sera $ax = OR$; or ce quarré est égal à l'abscisse $7R$ ou x multipliée par le parametre, donc le parametre doit être a ; ainsi si sur la hauteur $7R = EO$ on décrit une parabole avec un parametre $= a$, c'est-à-dire égal au parametre de la parabole de la bombe H , la bombe R après son choc décrira un arc de parabole parallèle, égal & semblable à un arc qui seroit la continuation de la parabole $8V$.

On prouvera de la même façon que si on multiplie les deux forces composantes de H après le choc par leur tems, c'est-à-dire \sqrt{p} , $\frac{TH}{\sqrt{x+r}}$ par le tems $\sqrt{x+r}$, ce qui donnera $\sqrt{px} + pr$ & TH , & qu'après avoir pris $Hq = \sqrt{xx + pr}$, on décrive sur la hauteur $nH = BN = \frac{1}{2}TN$ une parabole nq avec un parametre égal au parametre p de la parabole ER de l'autre bombe R , & qu'on mene la tangente qr , la bombe H après le choc prendra une direction Hh , parallèle à rq , & à cause de sa gravité elle décrira un arc de parabole parallèle & semblable à l'arc qui seroit

la continuation de la parabole nq & qui seroit décrit dans un tems égal à celui qui avoit été employé à décrire nq .

De peur qu'on ne soit embarrassé à trouver en quel tems la bombe R seroit arrêtée par l'horizon, on fera attention que dans les triangles rectangles mRV , $mC4$, les droites mR , RV , mC , étant connues, on connoitra $C4$ en faisant mR , $RV :: mC$, $C4$; de même la hauteur $7C$ & le parametre de la parabole $7Vy$ étant connus, on connoitra l'ordonnée CS en multipliant $7C$ par le parametre va , & tirant la racine du produit, donc retranchant de la droite $C4$ la droite CS , le reste sera la valeur de $8, 4$; & élevant en 8 la perpendiculaire 89 , on connoitra cette perpendiculaire en faisant $C4$, $CM :: 84$, 89 ; maintenant à la fin du tems $V9$ la bombe R se seroit abaissée de la hauteur 89 , de même qu'à la fin du tems Vx elle se seroit abaissée de la hauteur xy ; or ces hauteurs sont comme les quarrés des tems, donc les tems sont comme les racines de ces hauteurs, & par conséquent on dira comme la racine de xy est à la racine de 89 , ainsi le tems connu VX est au tems cherché $V9$.

Il ne reste plus qu'à savoir quelle distance de tems on doit mettre, entre le moment où l'on tire l'une des bombes, & celui où l'on tire l'autre pour faire en sorte qu'elles se rencontrent; or cela est facile après qu'on a trouvé la hauteur EO , car le tems que la bombe employera à parcourir la demi-parabole EF sera \sqrt{EL} , & celui qu'elle employera à parcourir l'arc ER sera \sqrt{EO} , ainsi le tems employé depuis son depart en F jusqu'au point R sera $\sqrt{EL} + \sqrt{EO}$, & par la même raison le tems que H employera depuis son depart en A jusqu'en H sera $\sqrt{BK} + \sqrt{BN}$, & comme celui-ci sera plus grand que le tems $\sqrt{EL} + \sqrt{EO}$, si on retranche $\sqrt{EL} + \sqrt{EO}$ de $\sqrt{BK} + \sqrt{BN}$, le reste $\sqrt{BK} + \sqrt{BN} - \sqrt{EL} - \sqrt{EO}$, sera le tems qu'il faut mettre entre le depart de H & celui de R .

625. Les bombes, les hauteurs & les amplitudes étant inégales, trouver les mêmes choses que ci-dessus (Fig. 232).

La force du choc, la hauteur EO correspondante au point de rencontre, & la distance de tems qu'il faut mettre entre le depart de l'une & le depart de l'autre se trouveront comme dans le cas précédent; il n'y a donc ici de difficulté qu'à l'égard de ce qui arrivera après le choc, & c'est ce que nous allons examiner.

Si les masses H , R sont reciproques à leurs vitesses, c'est-à-

dire, si $H, R :: \frac{RO}{\sqrt{x}}, \frac{NH}{\sqrt{x+r}}$ les bombes après le choc rebrousseront chemin avec les vitesses qu'elles avoient auparavant (N. 339); ainsi en supposant que ces vitesses sont multipliées par leurs tems pour voir ce que les bombes parcourront après le choc dans des tems égaux à leur descente, la bombe HN retournera en N & la bombe R en O, & comme les vitesses TN, MO qui n'ont point choqué agissent toujours; si je prolonge HN en 2, RO en 3, & que je mene les tangentes T_2, M_3 , il est visible que H prendra une direction Hh égale & parallèle à T_2 , & R une direction Rr égale & parallèle à M_3 , & qu'ainsi H, à cause de sa pesanteur décrira un arc égal parallèle & semblable à l'arc de parabole qui est la continuation de l'arc B_2 , & qui seroit décrit dans un tems égal à T_2 , & que R décriroit un arc de parabole égal parallèle & semblable à l'arc qui est la continuation de E_3 , & qui seroit décrit dans un tems égal à M_3 .

Si les Masses H, R ne sont pas reciproques aux vitesses, les forces des deux bombes seront inégales, & il pourra se faire que la force de H soit plus grande ou moindre que celle de R selon que le rapport des vitesses NH, RO variera; supposons que la force de H soit plus grande, & nommons la masse de $H = M$, celle de $R = m$, la vitesse $NH = V$ & $RO = u$, je ne divise point les vitesses NH, RO , ni TN, MO par leurs tems, à cause que nous voulons savoir les vitesses après le choc dans des tems égaux aux tems employés par les bombes à descendre en H & R avant le choc.

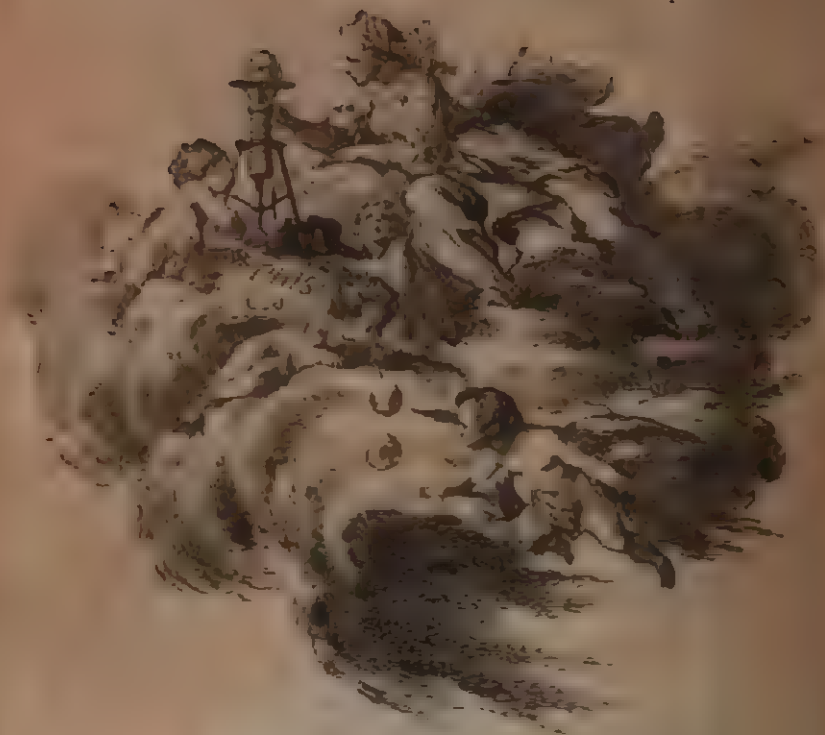
La vitesse de H après le choc sera $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$ laquelle sera négative si MV est moindre que $mV + 2mu$, & celle de R sera $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$ & comme les directions TN ou tH , MO ou mR agissent toujours, le corps H prendra une direction composée de $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$ & de tH ; ainsi si la vitesse de H après le choc est négative prenant sur H_2 la partie $Hx = \frac{2mu + mV - MV}{M + m}$, & menant la diagonale xt , le corps suivroit une direction Hh parallèle & égale à xt , c'est pourquoi comme en reduisant la force uniforme & verticale tH en une force accélérée capable de donner à la fin du même tems une force acquise égale à la force tH , le corps H supposé qu'il eût été mû avant le choc par les deux forces Hx & tH rendue accélérée, auroit parcouru l'arc de parabole

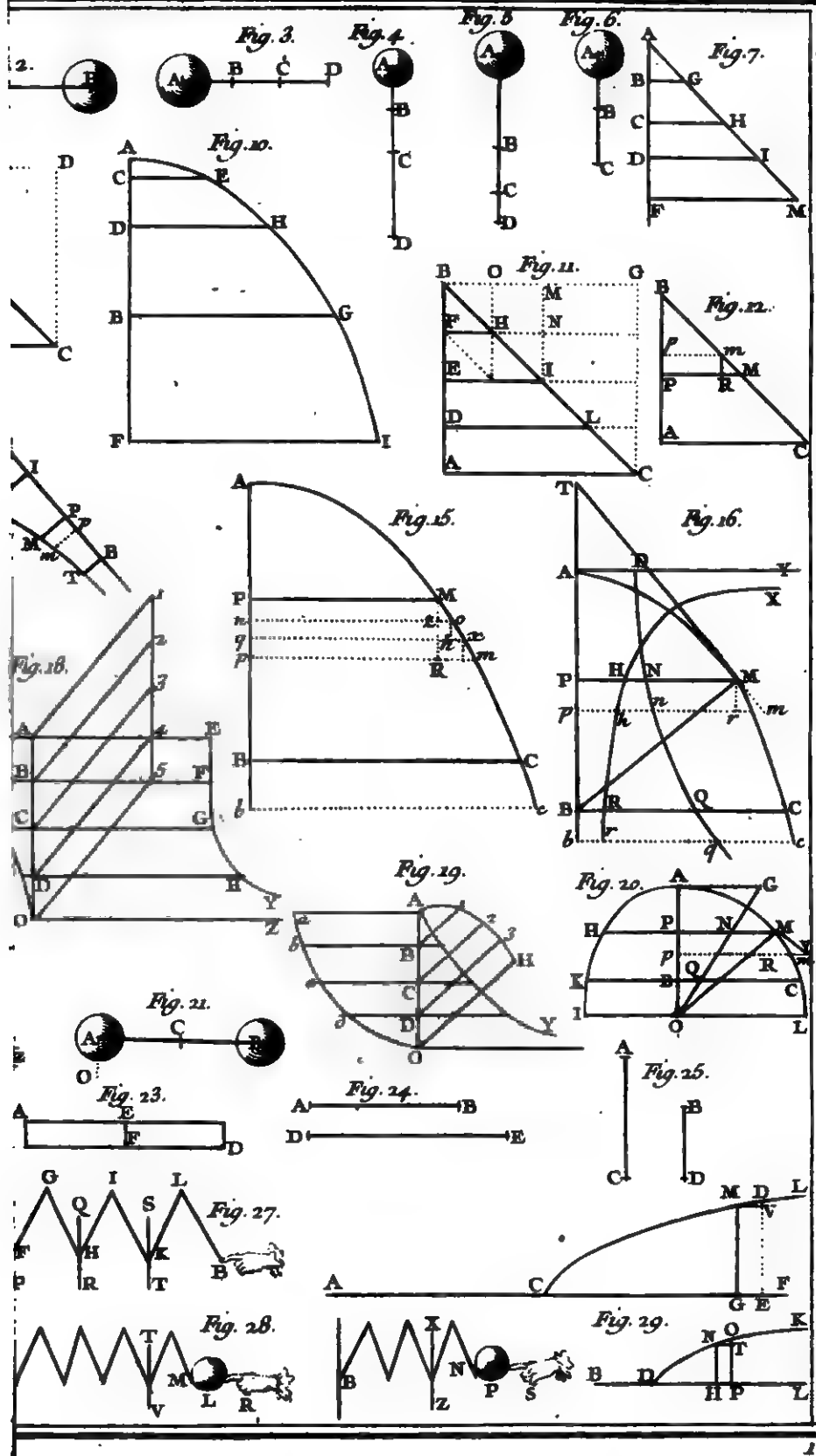
$x4$, & qu'en ce cas la bombe poussée par Hx ou 48 se seroit abaissée en vertu de la pesanteur de la quantité $4H$, il s'ensuit que si elle avoit été poussée par la force xt qui auroit agi dans un tems égal à celui de la force $2H$, la pesanteur l'auroit abaissée d'une quantité $14 = 4H$, & par conséquent si elle avoit été poussée avec la même force xt dans un sens opposé de x en y , sa pesanteur l'auroit abaissée dans un tems égal d'une quantité égale à 14 ; donc elle auroit parcouru un arc de parabole qui auroit été la continuation de la parabole $4x$, donc H en suivant la direction Hh égale & parallele à xy , décrira en vertu de sa pesanteur un arc de parabole égal, parallele & semblable à l'arc qu'elle auroit décrit en suivant la direction xy .

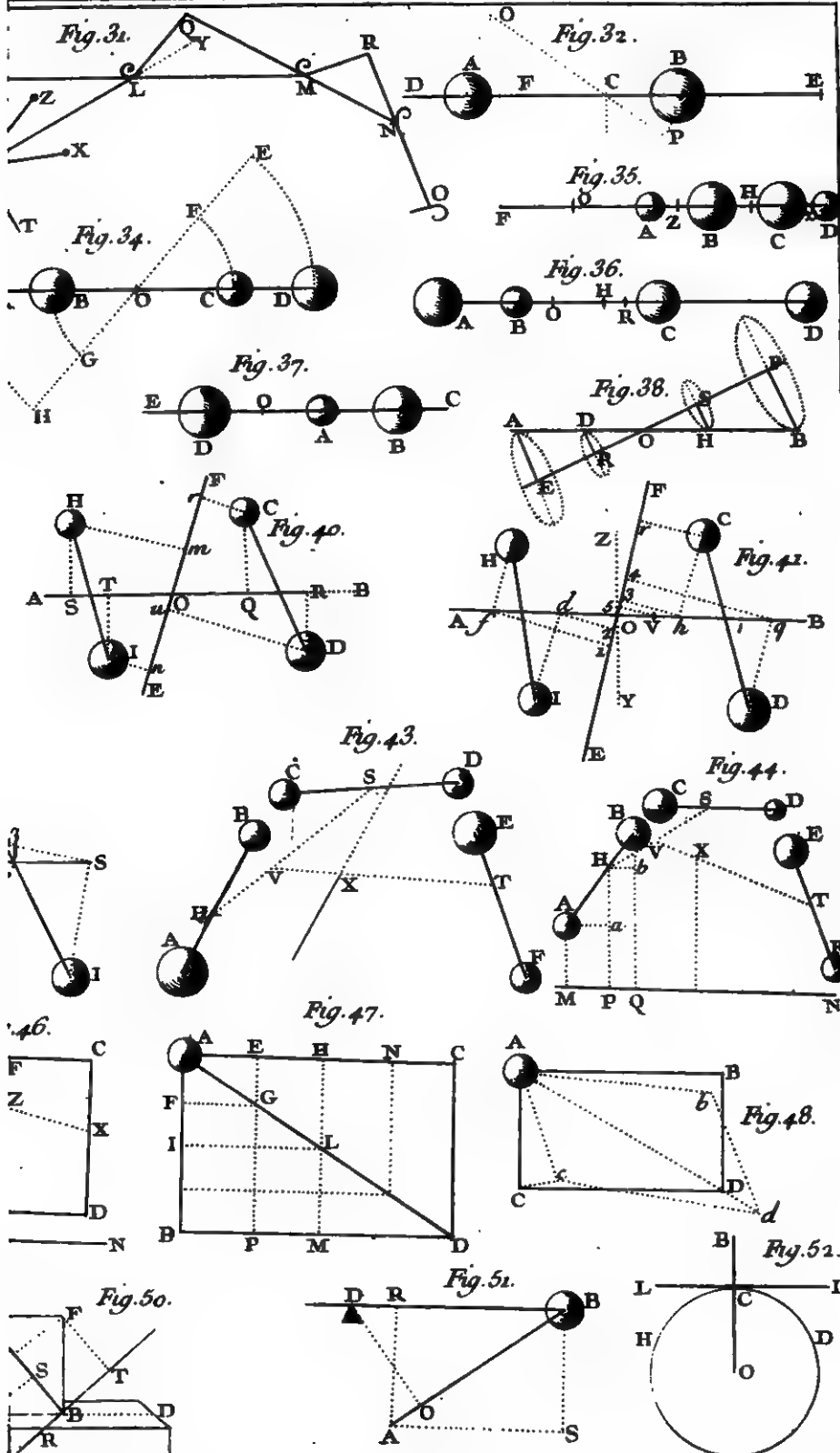
Si la force de H après le choc étoit positive on prendroit sur HO une partie égale à $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$, & achevant le reste comme auparavant, le corps H prendroit une direction qui tourneroit du côté de C , & l'on détermineroit l'arc de parabole qu'elle devoit décrire comme il vient d'être dit; on trouvera de la même façon ce qui doit arriver à R après le choc.

Fin du premier Livre.









ASTOR LIBRARY
114

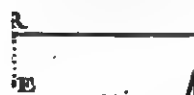


Fig. 54.

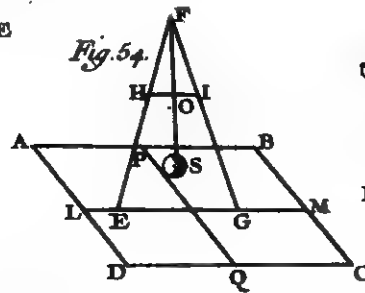


Fig. 55.

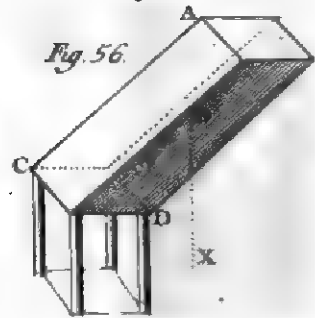


Fig. 56.

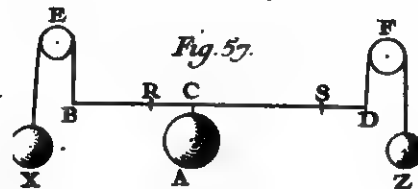


Fig. 57.

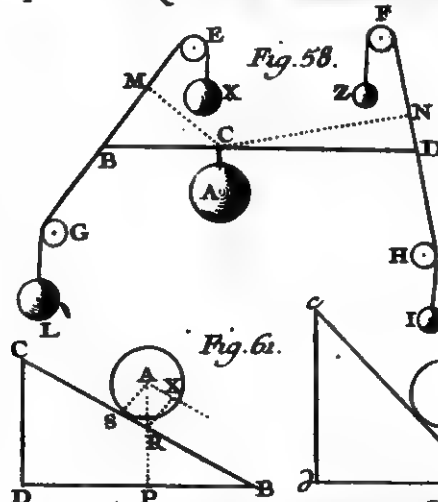


Fig. 58.

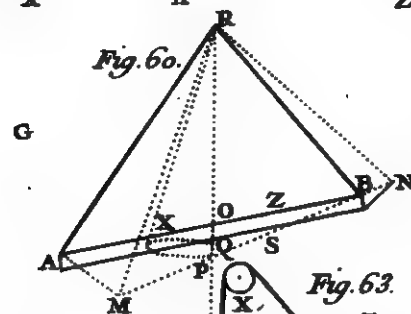


Fig. 60.

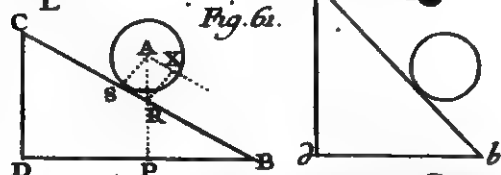


Fig. 61.

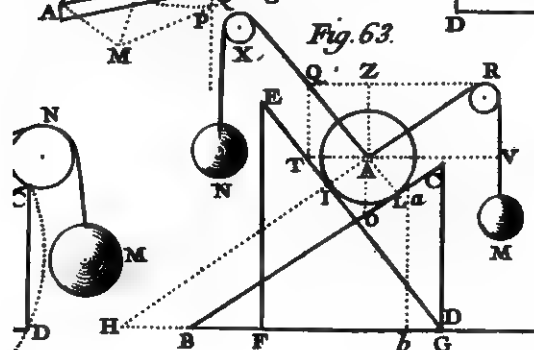


Fig. 63.

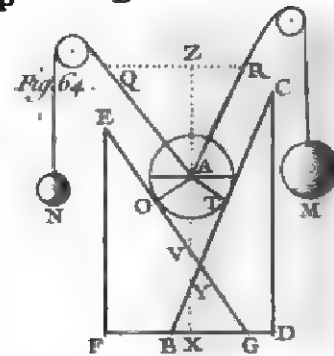


Fig. 64.

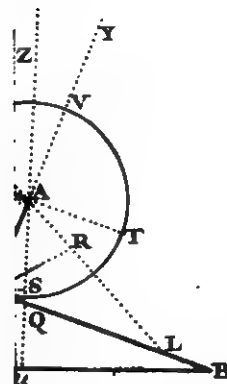
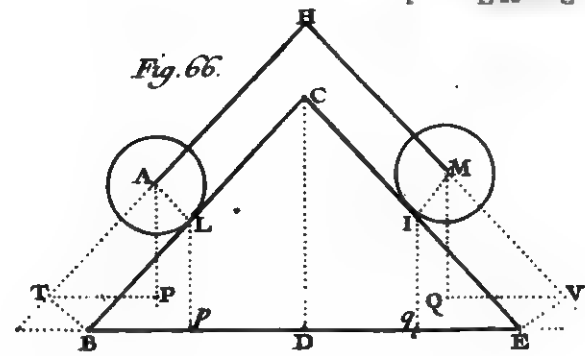


Fig. 66.



10

11

12

13

14

15

16

17

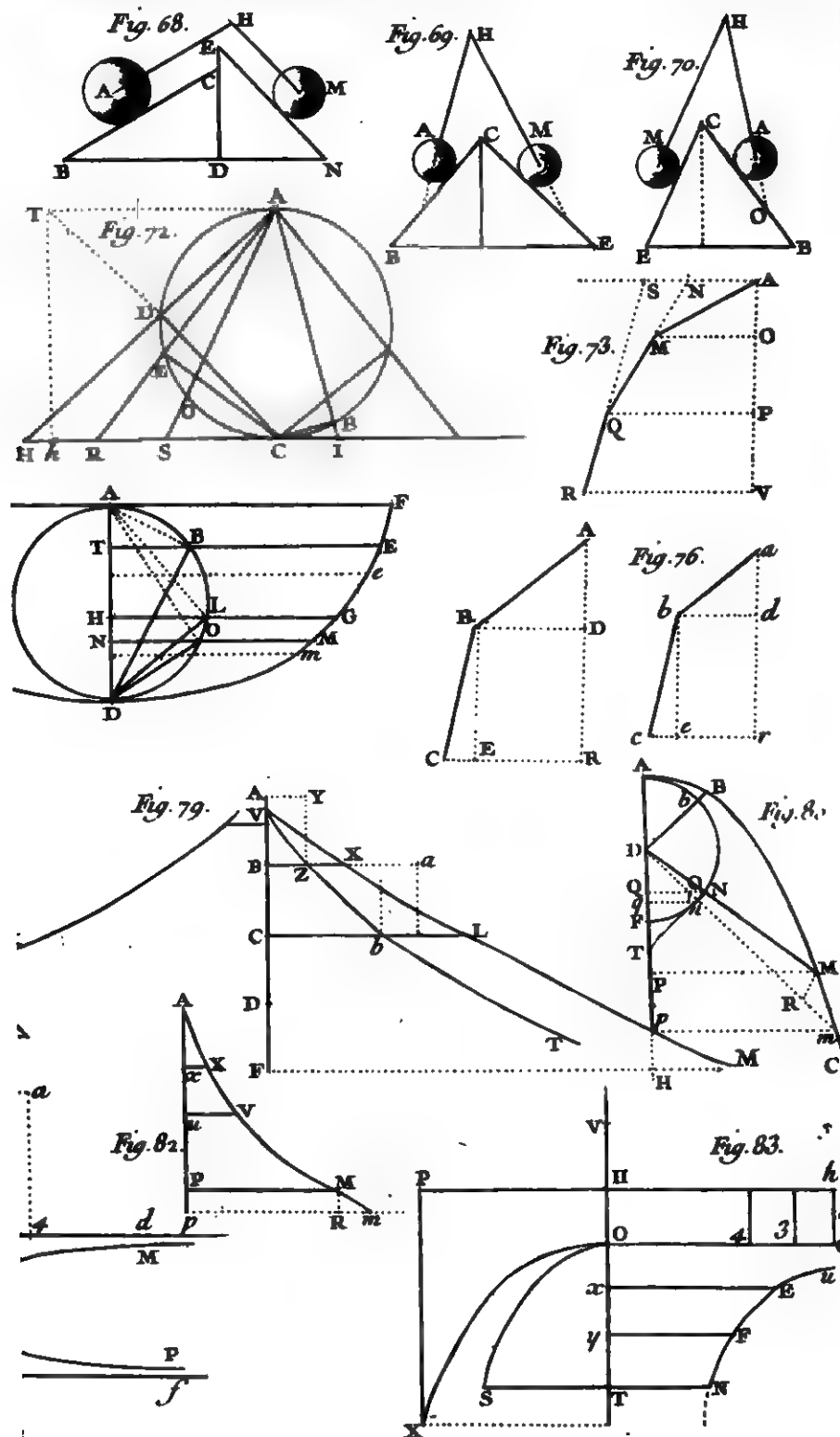




Fig. 85.

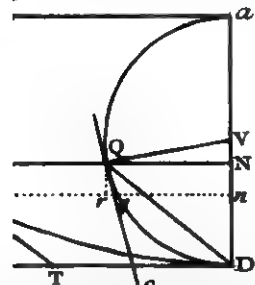


Fig. 86.

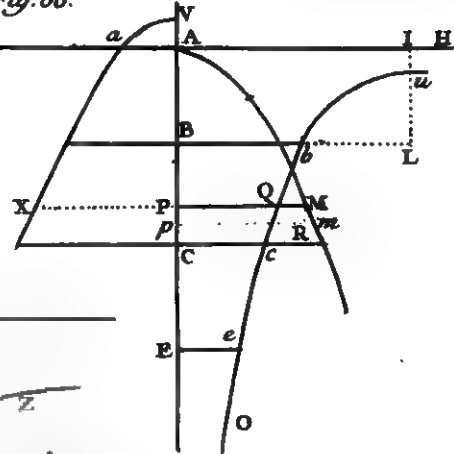


Fig. 88.

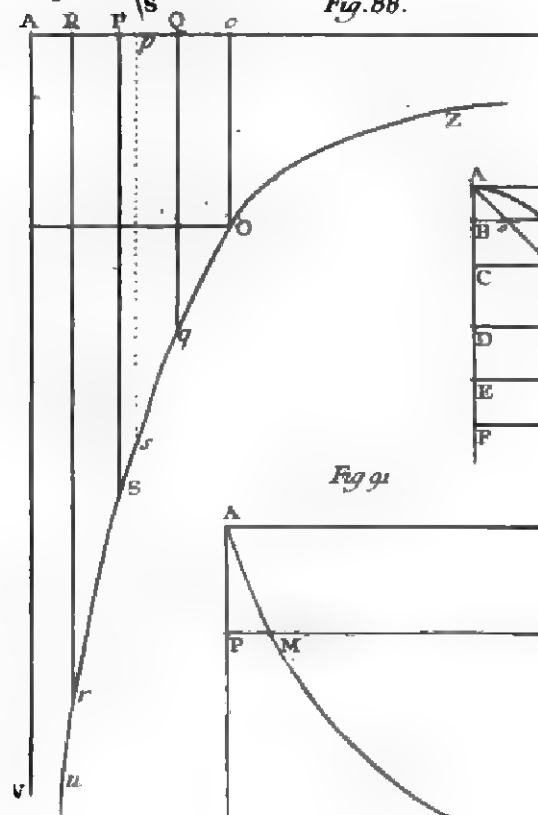


Fig. 89.

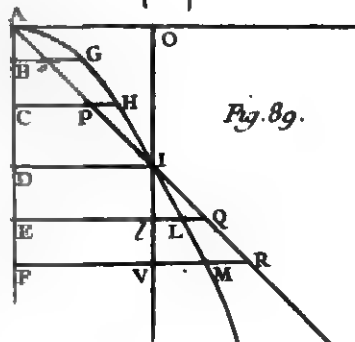


Fig. 91.

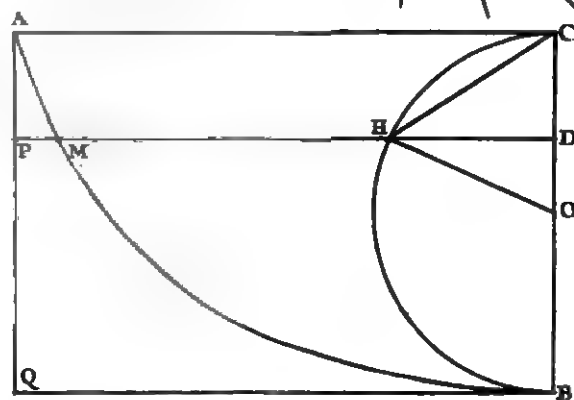
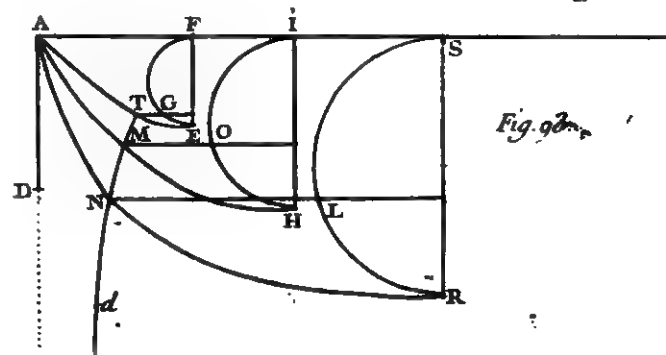
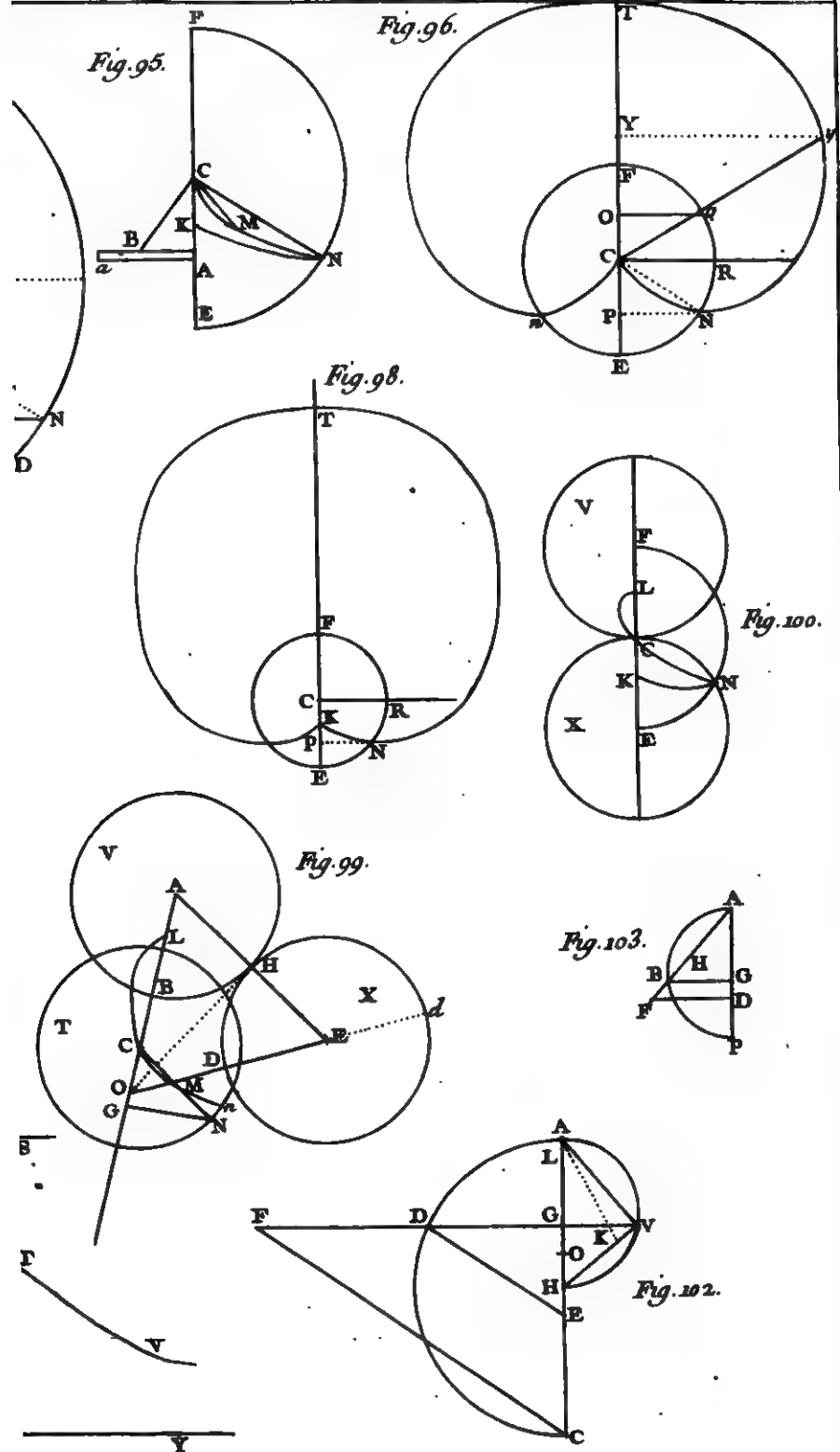
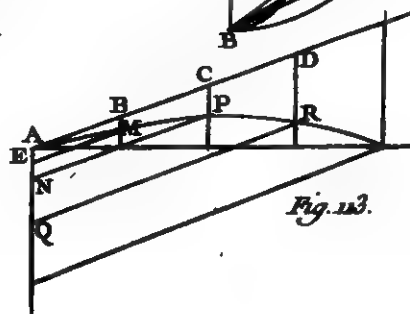
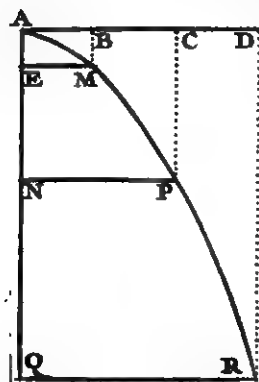
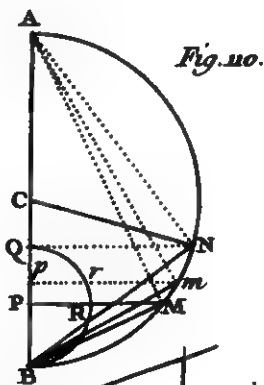
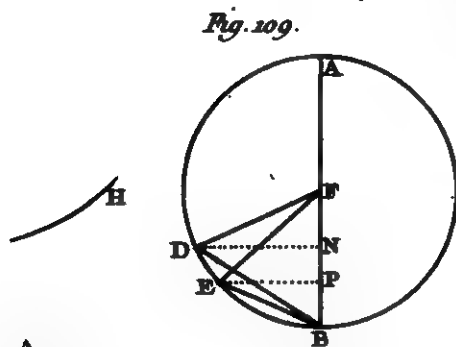
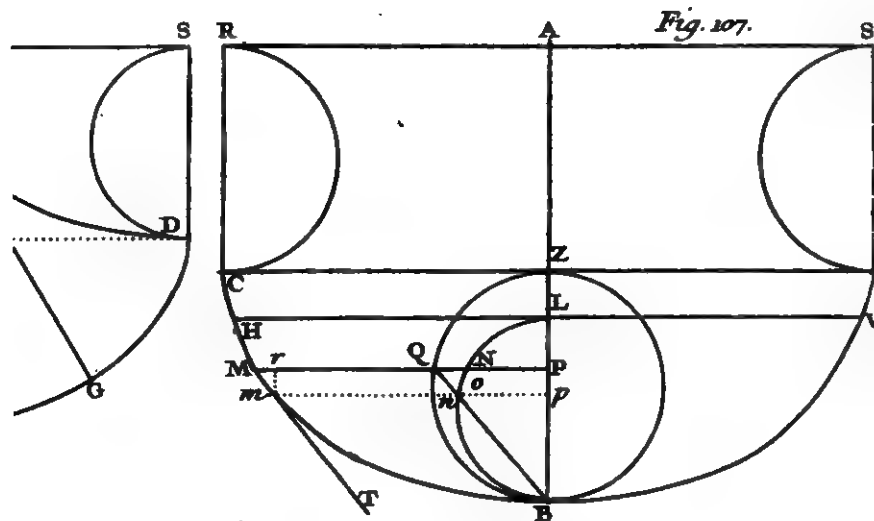
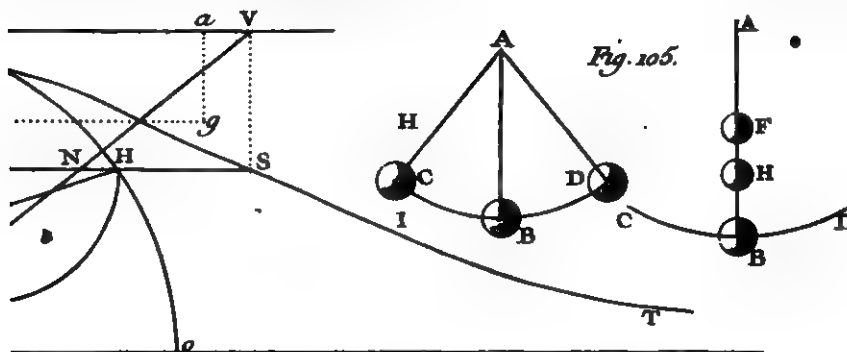


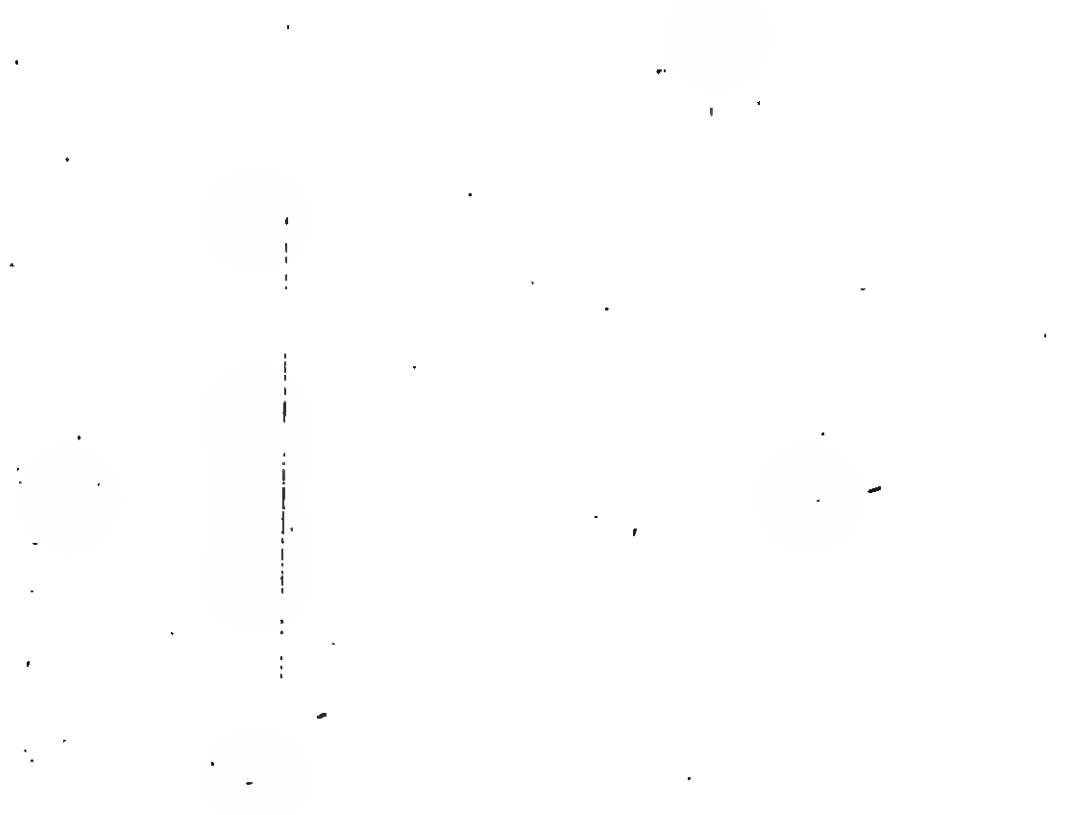
Fig. 92.

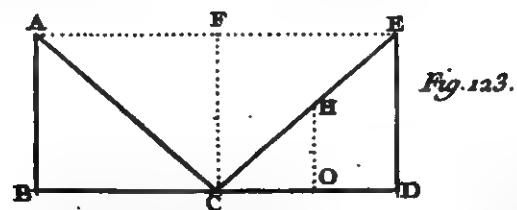
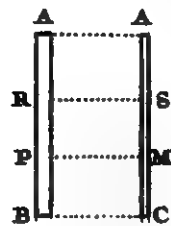
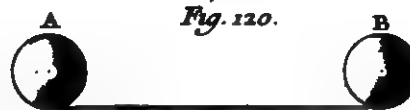
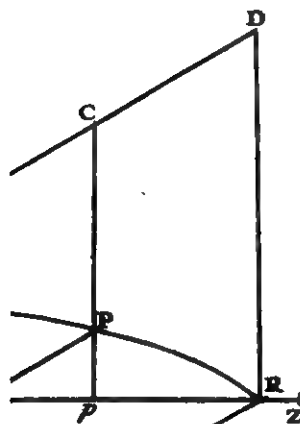
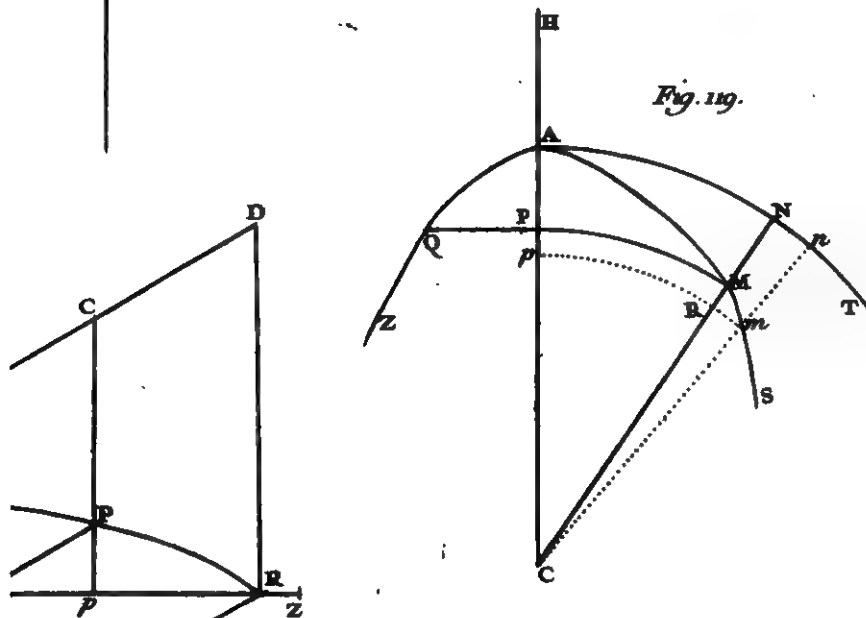
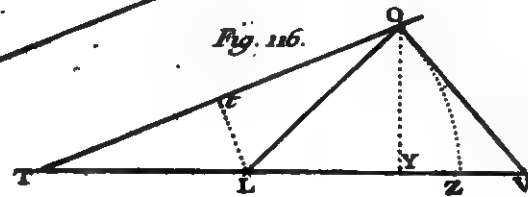
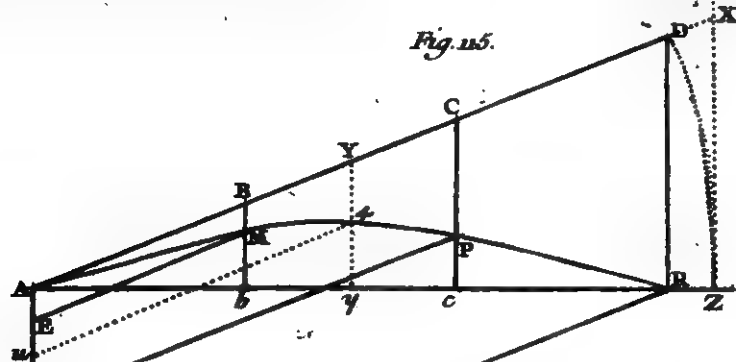




1









127

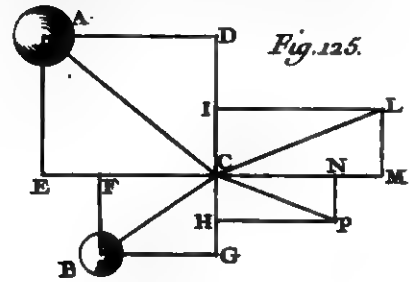


Fig. 125.

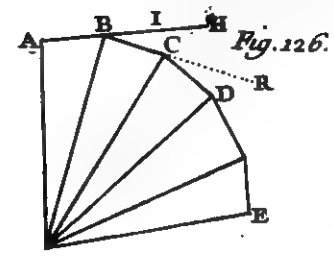


Fig. 126.

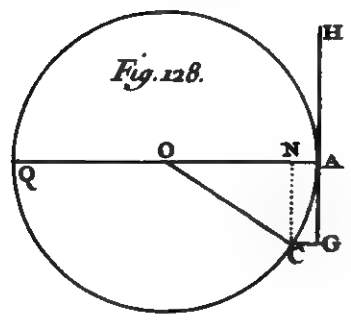


Fig. 128.

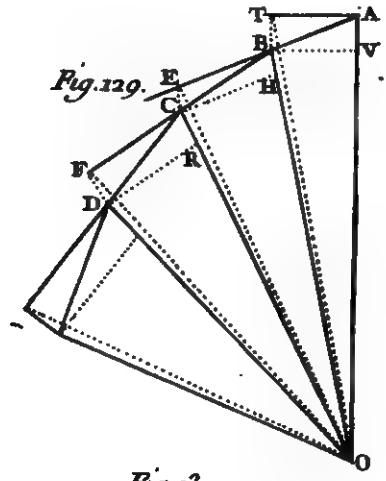


Fig. 129.

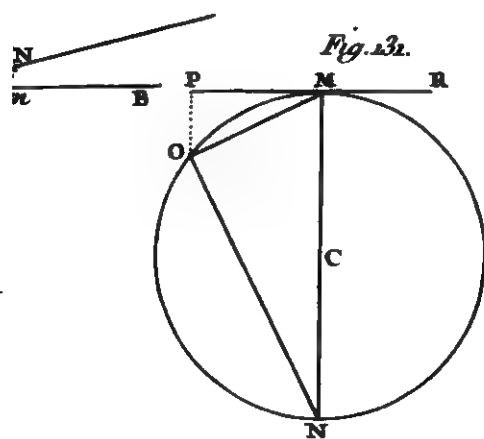


Fig. 131.

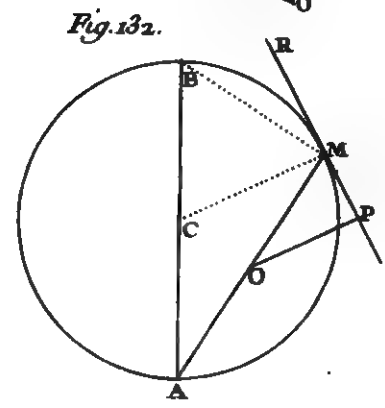


Fig. 132.

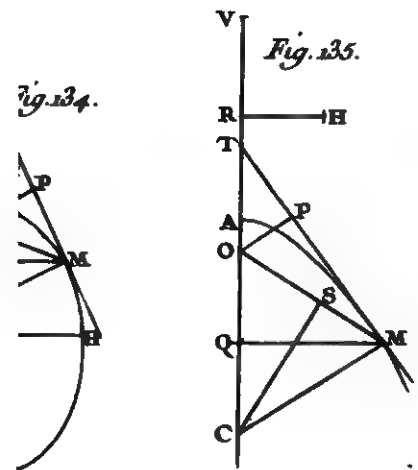


Fig. 134.

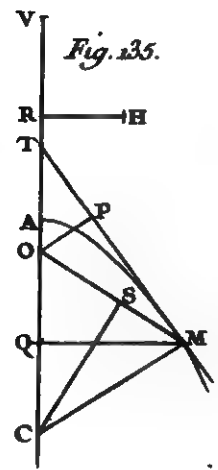


Fig. 135.

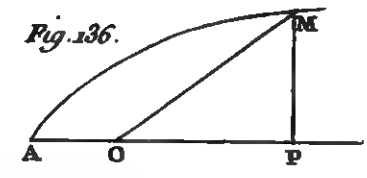


Fig. 136.

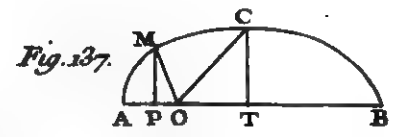


Fig. 137.

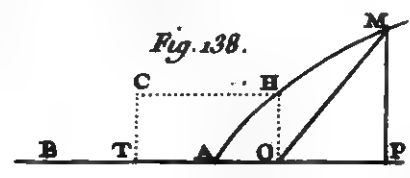
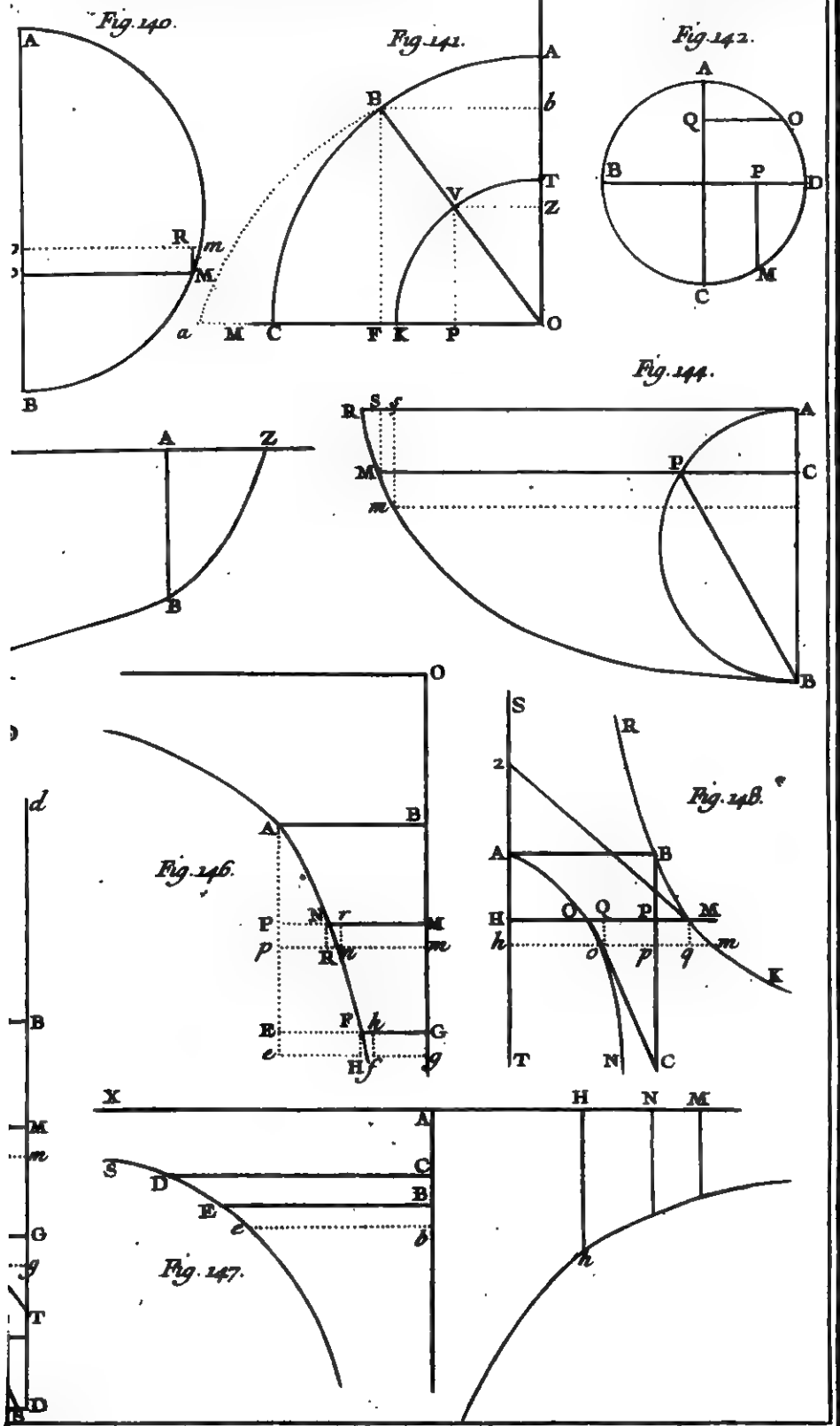
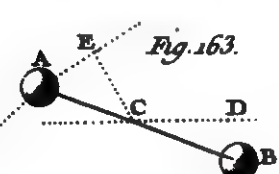
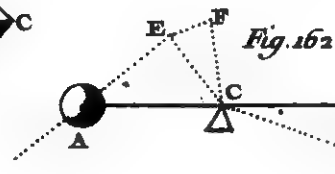
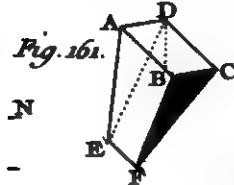
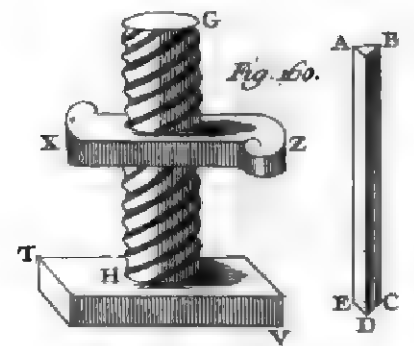
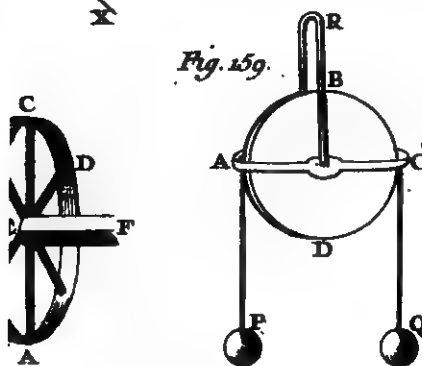
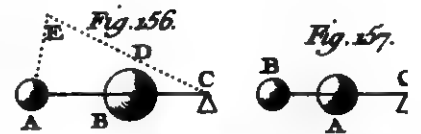
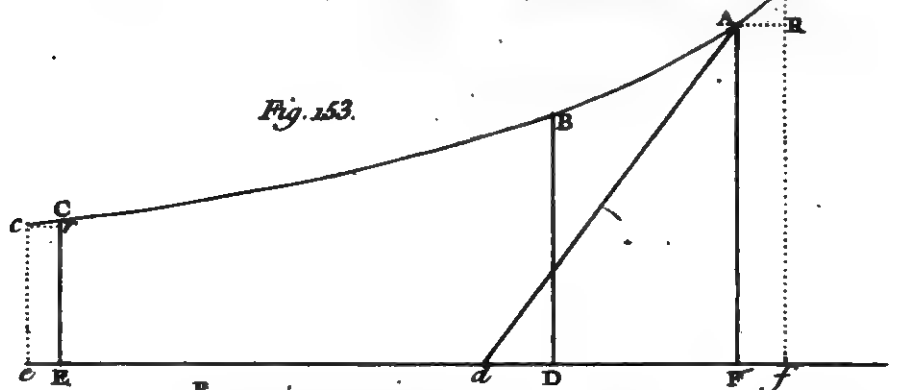
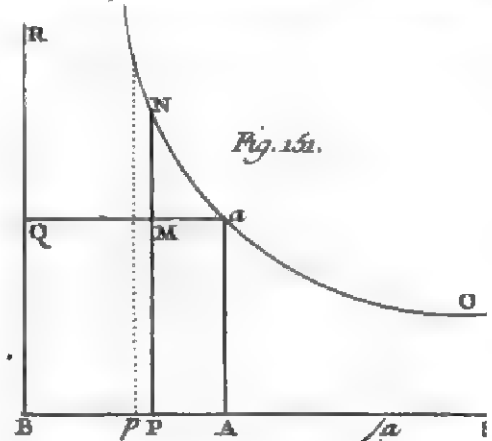
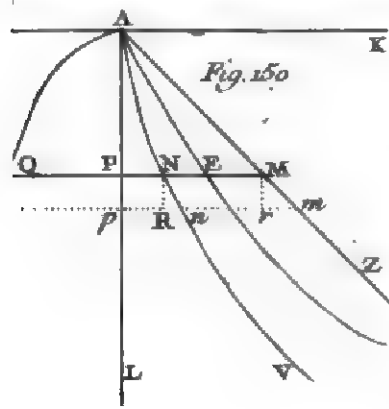


Fig. 138.







189

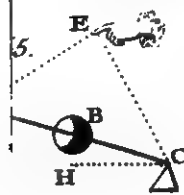


Fig. 166.



Fig. 167.

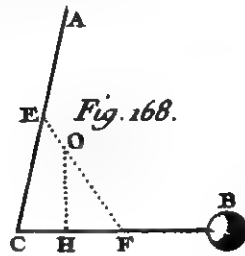


Fig. 168.

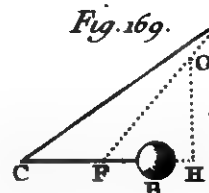


Fig. 169.

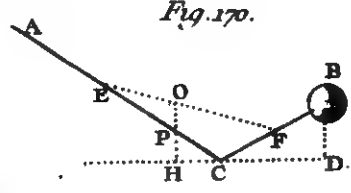


Fig. 170.

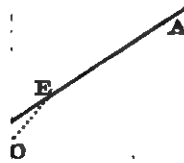


Fig. 173.

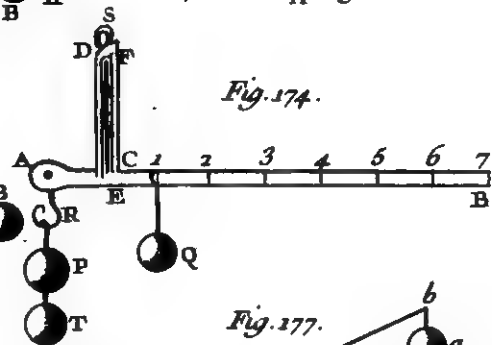


Fig. 174.

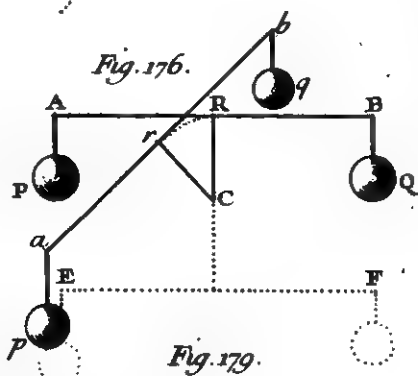


Fig. 176.

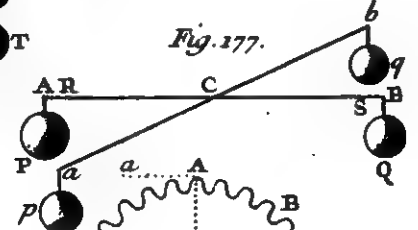


Fig. 177.

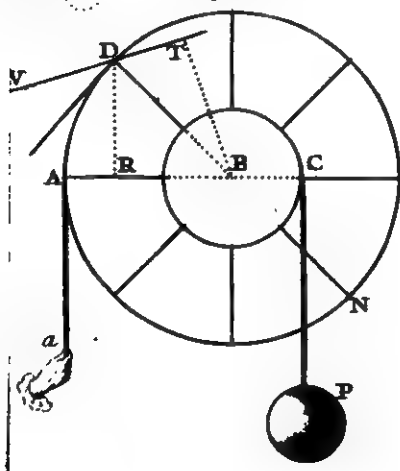


Fig. 179.

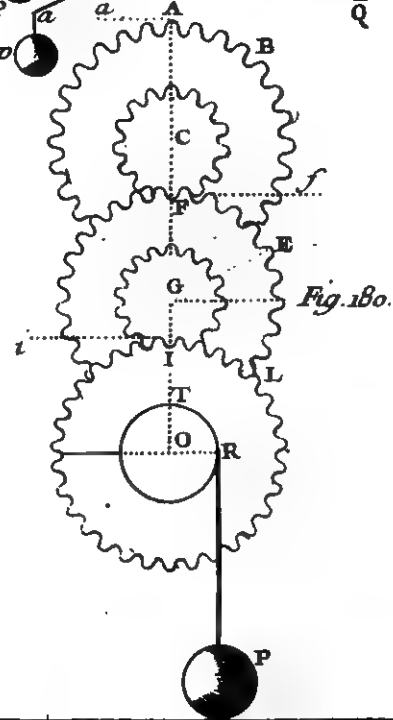
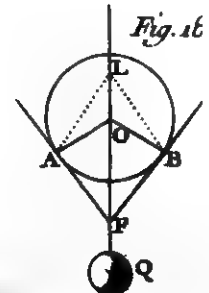
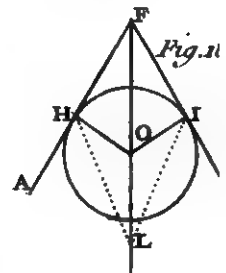
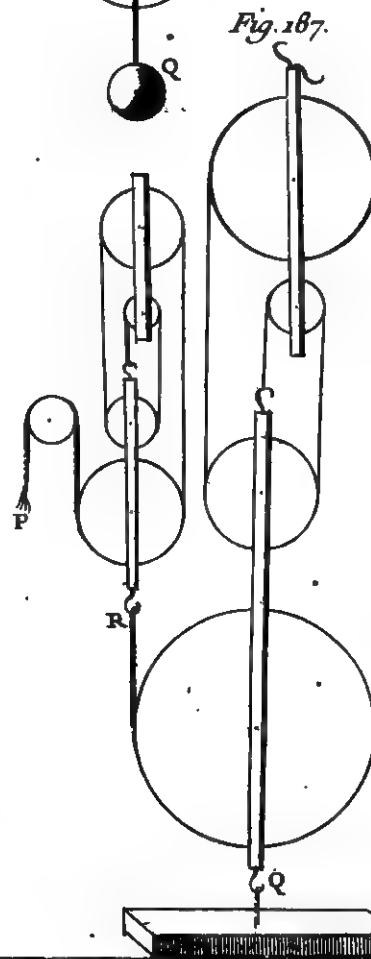
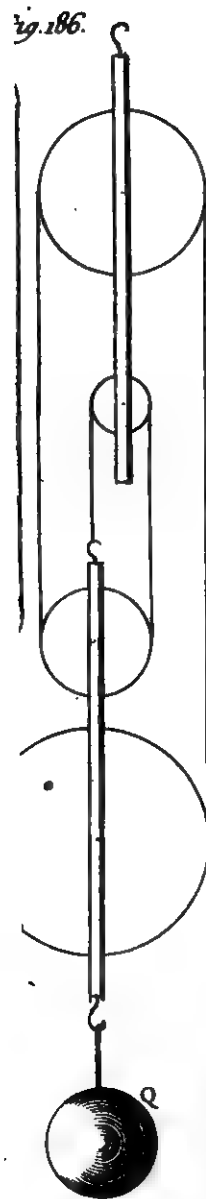
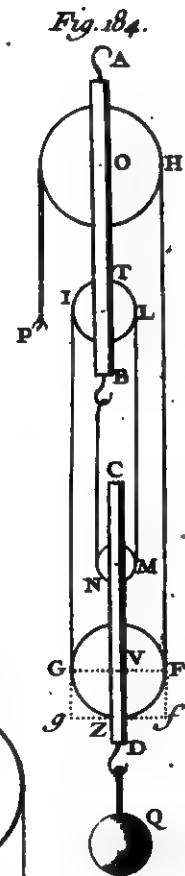
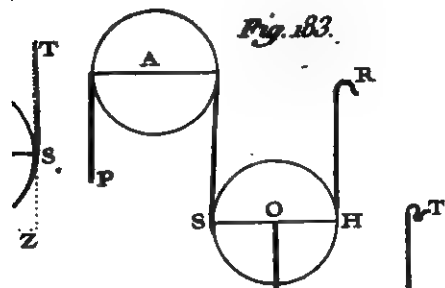


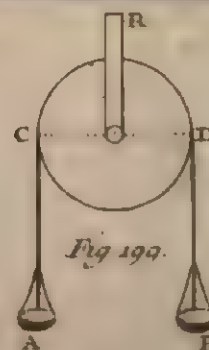
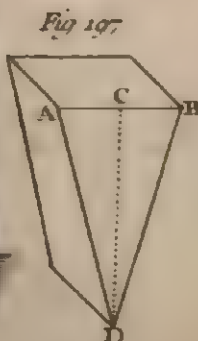
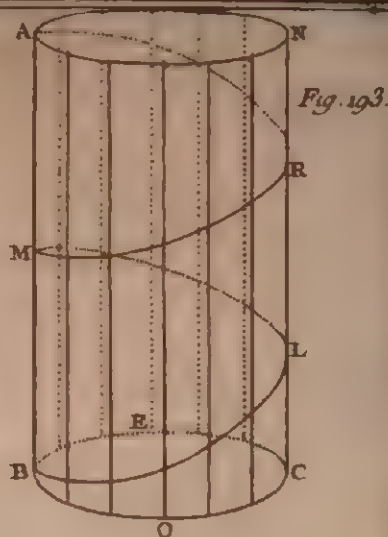
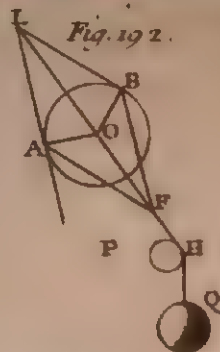
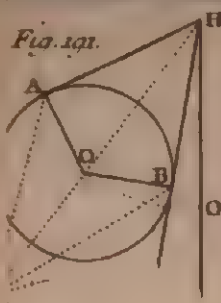
Fig. 180.

10

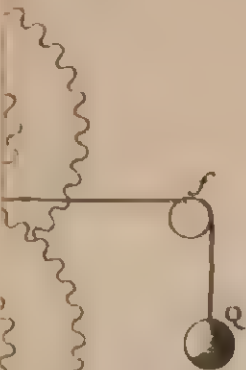
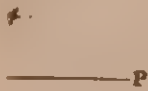
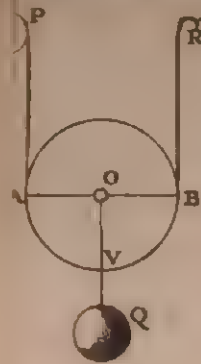
17/1



42.018
111







R



Fig 202

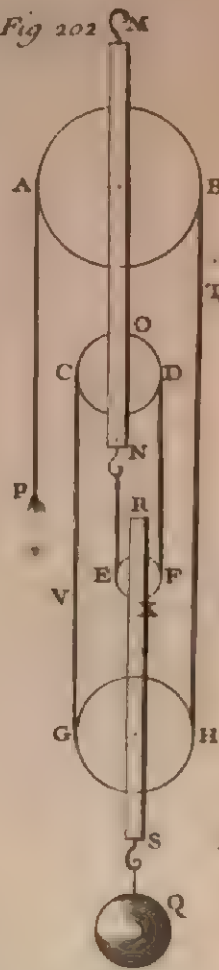


Fig 203

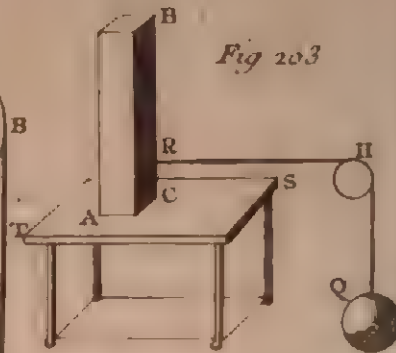


Fig. 205.

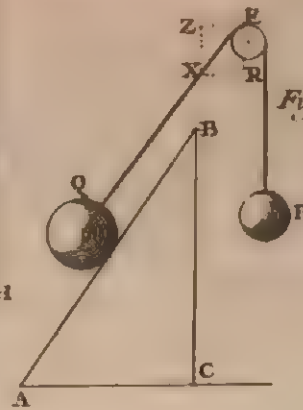
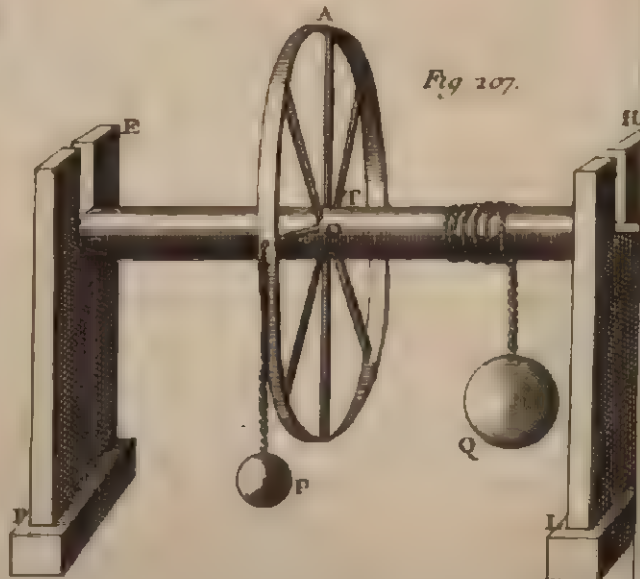


Fig 207.





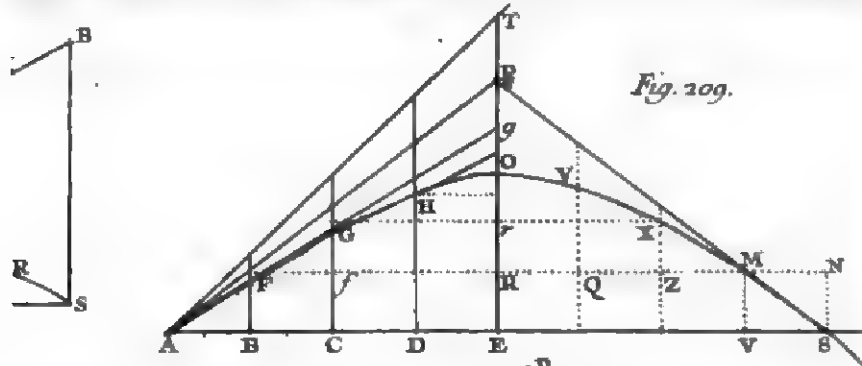


Fig. 109.

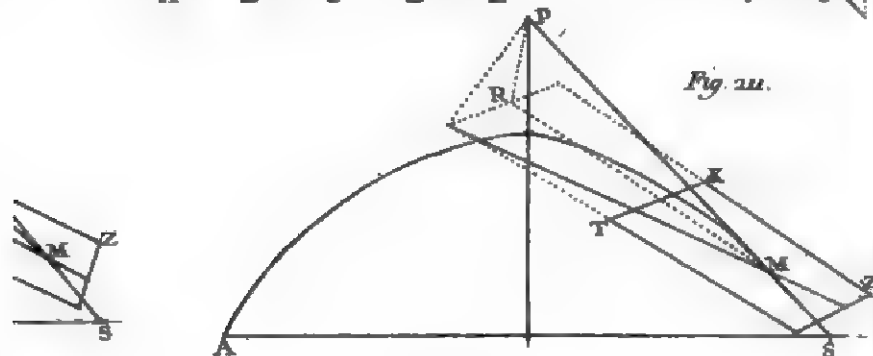


Fig. 111.

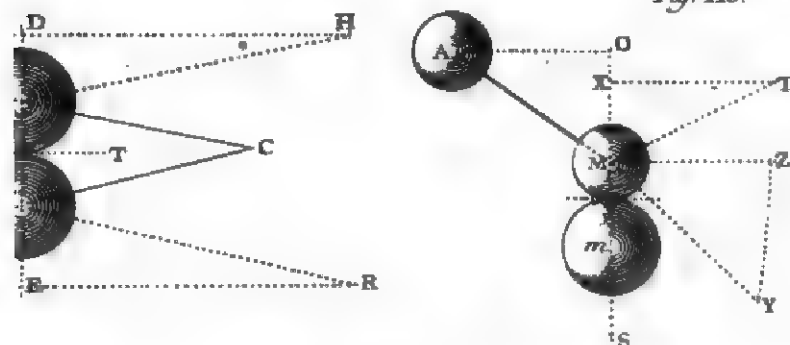


Fig. 113.

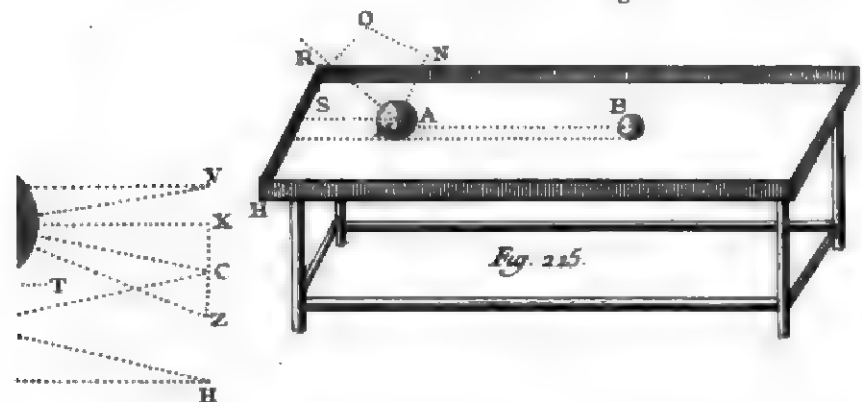


Fig. 115.

DIR
12/1

Fig 217.

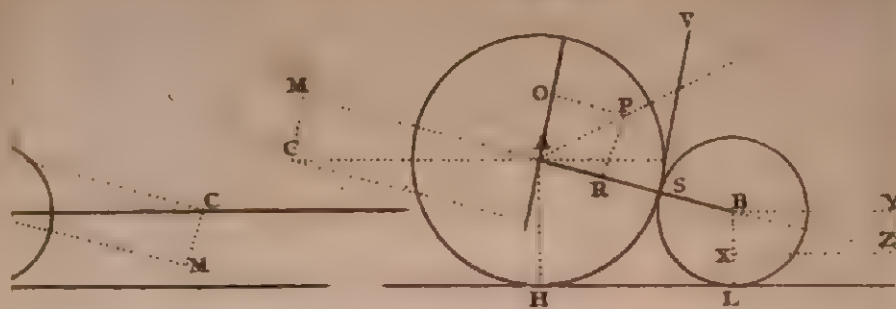


Fig. 219.

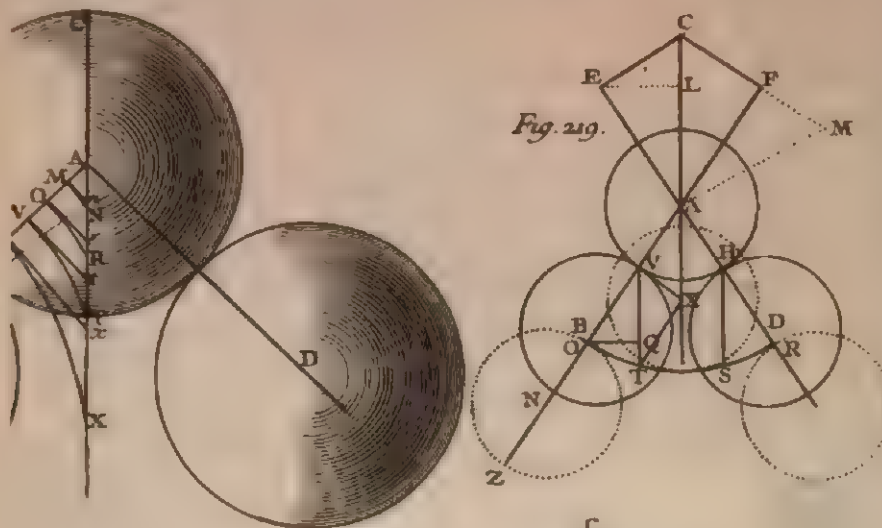
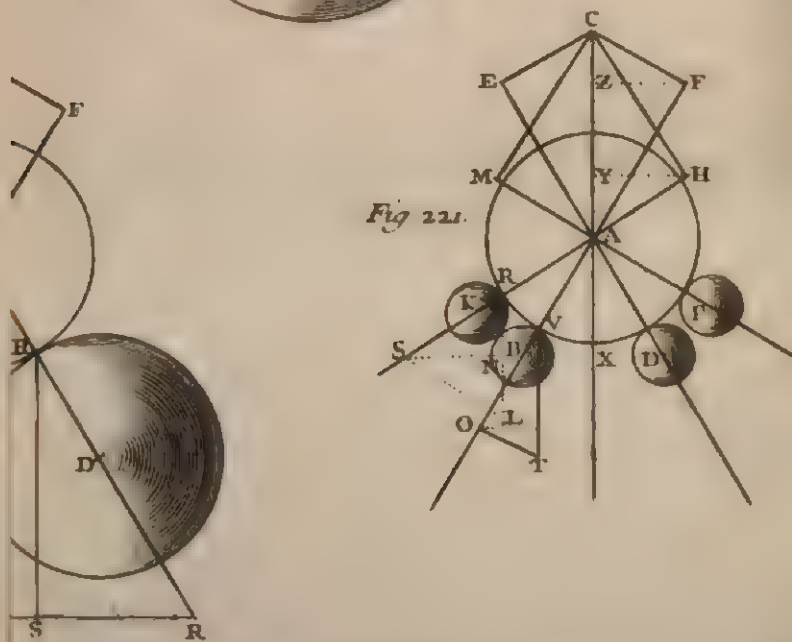


Fig 221.





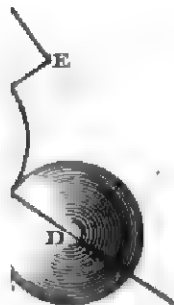


Fig. 223.

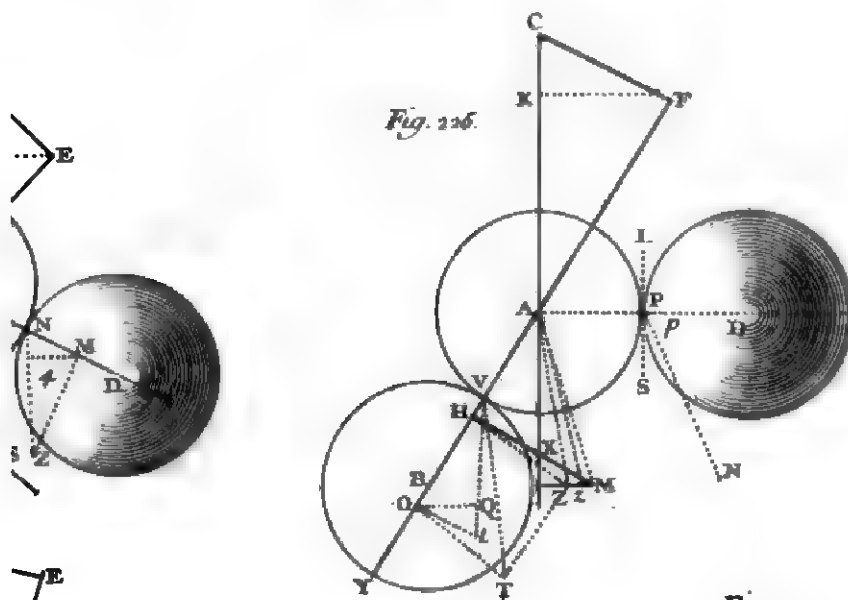


Fig. 226.

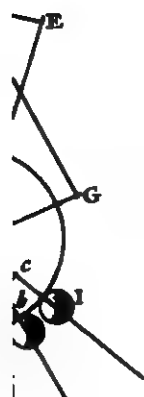
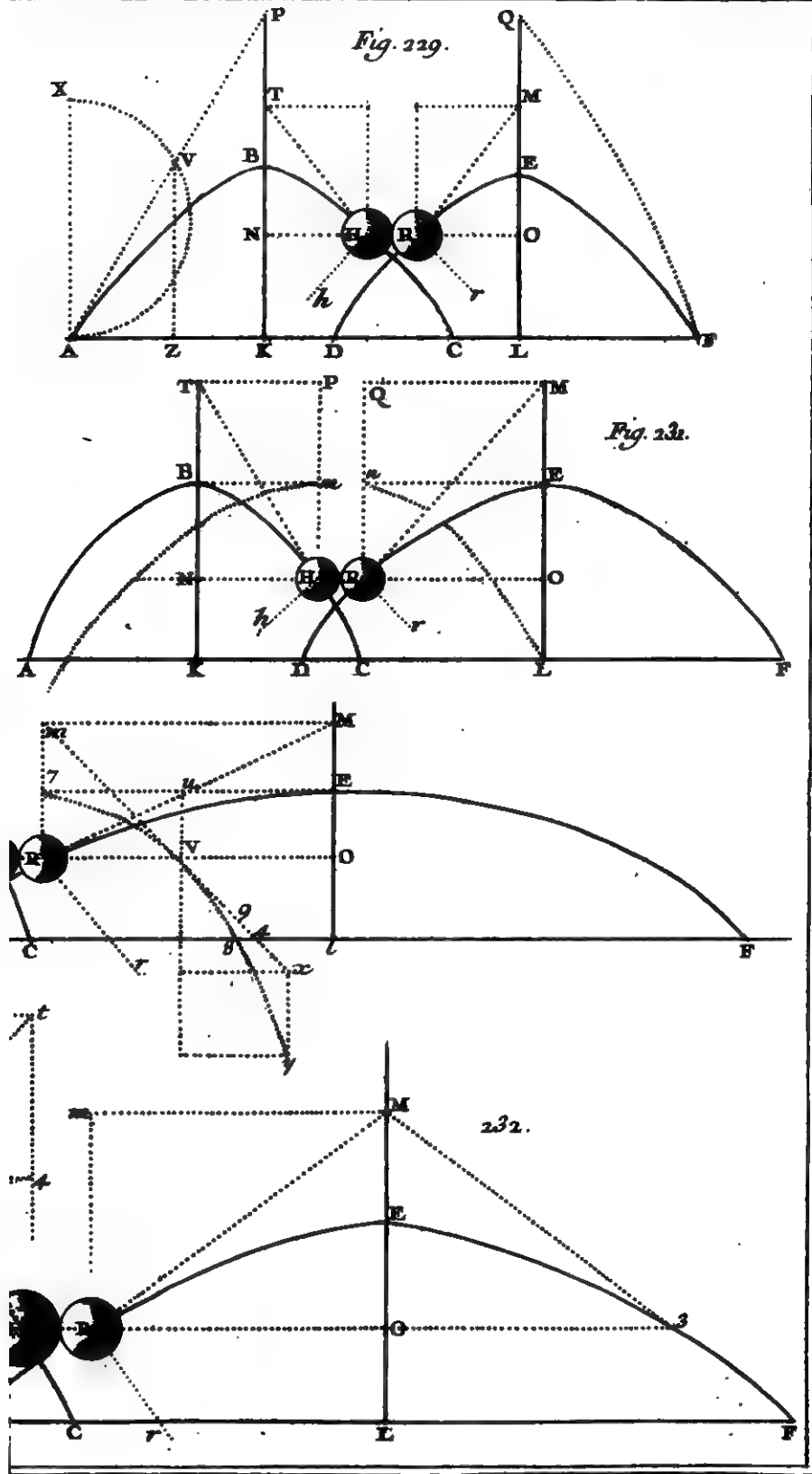
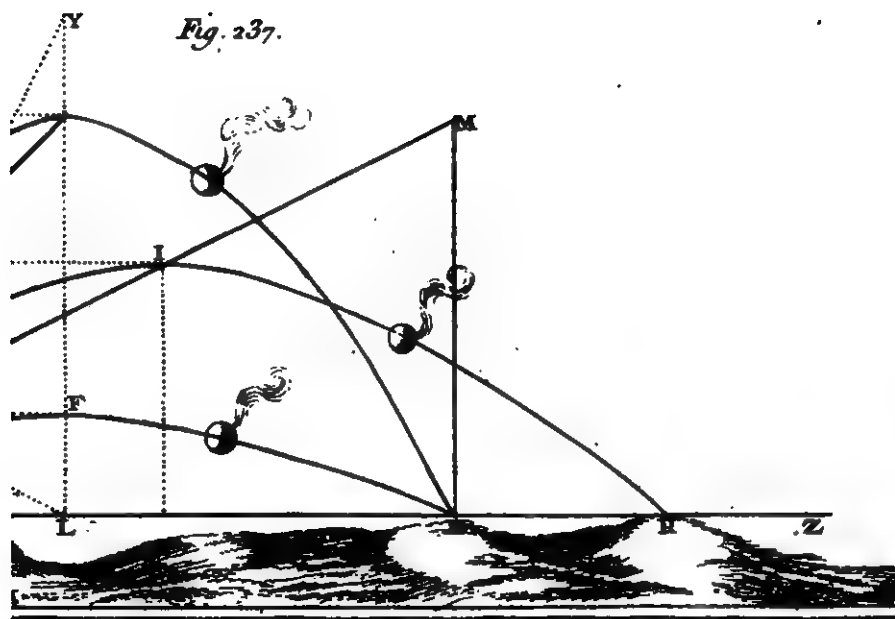
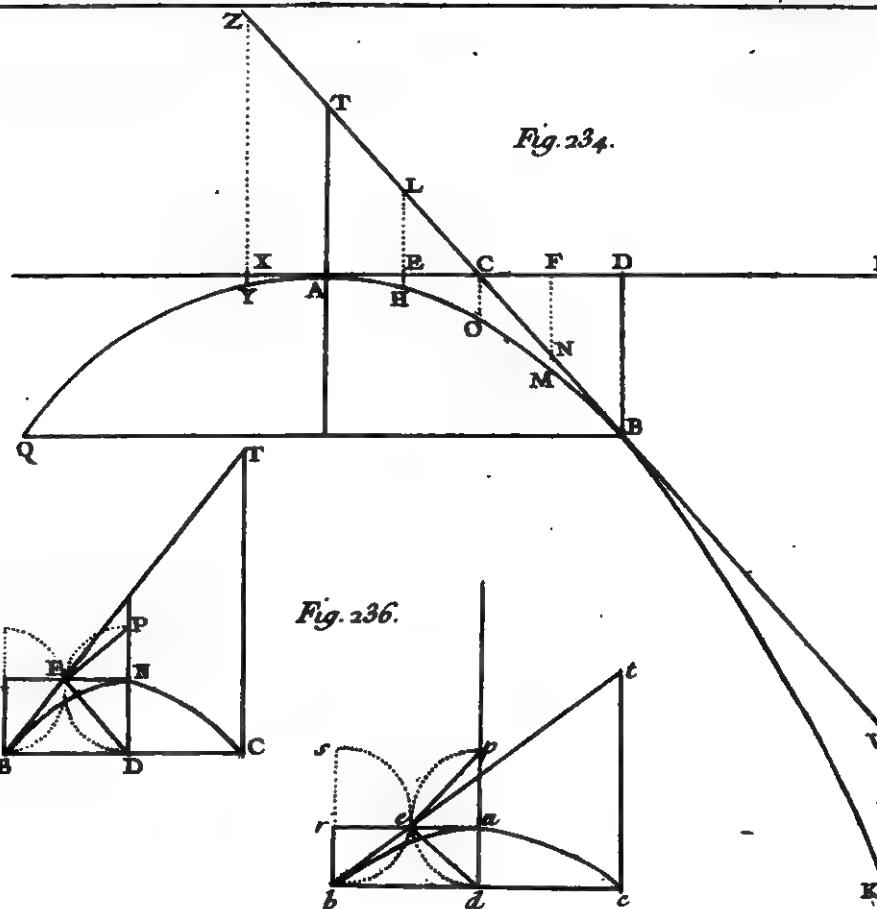


Fig. 227.

23



12/1





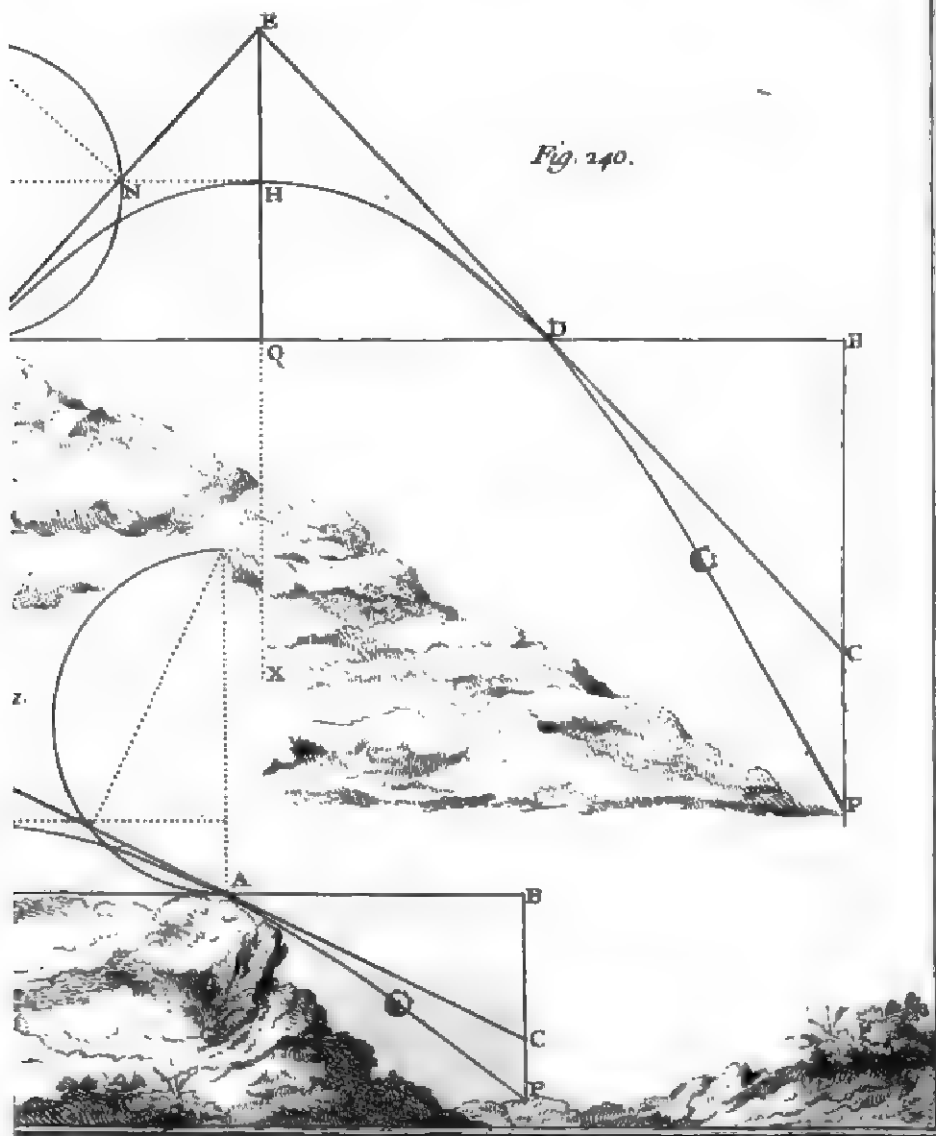
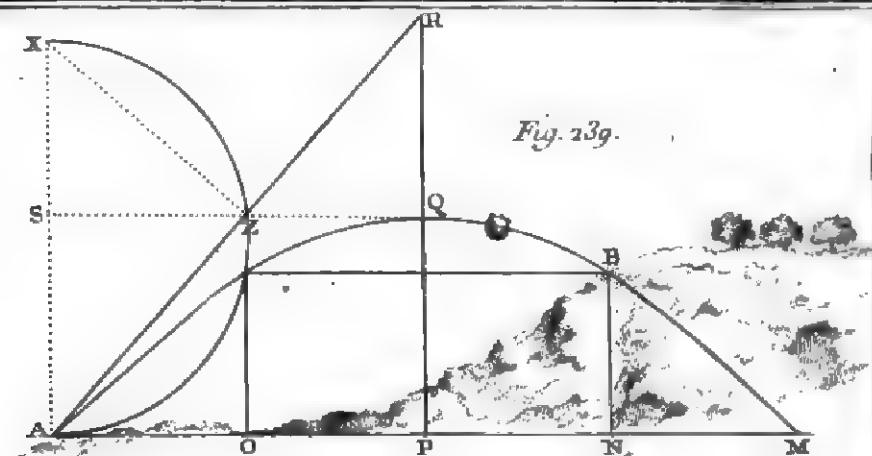




Fig. 243.

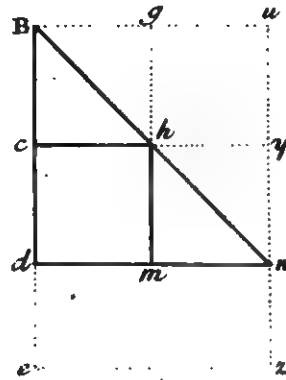
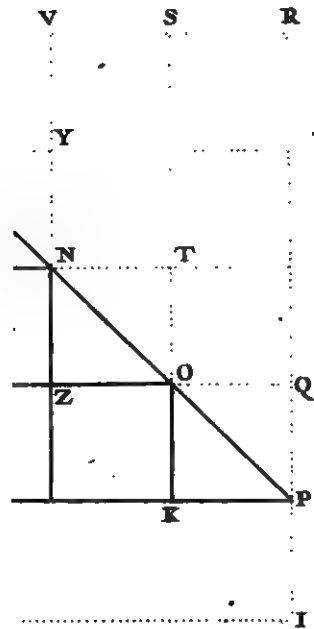


Fig. 244.

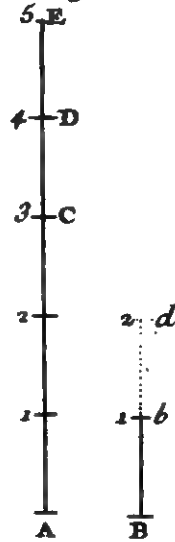


Fig. 245.

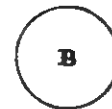
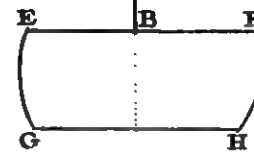
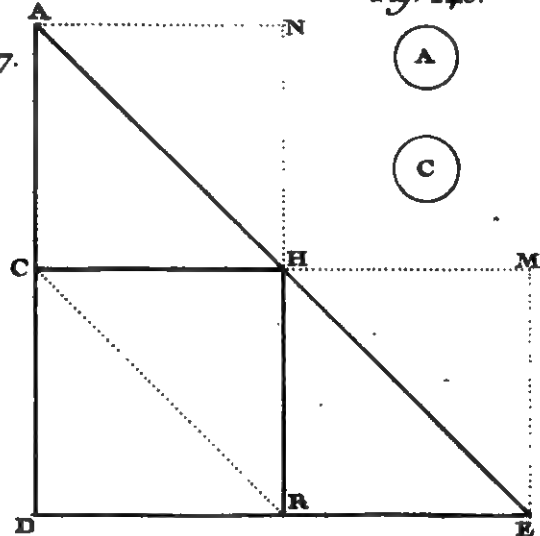
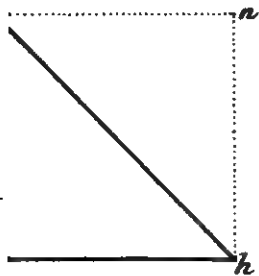


Fig. 248.



Fig. 247.









LA MECHANIQUE
 GENERALE.
 CONTENANT
 LA STATIQUE, L'AIROMETRIE,
 L'HYDROSTATIQUE,
 ET
 L'HYDRAULIQUE, &c.
 LIVRE SECOND.
 De l'Hydrostatique.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions & Principes.

1°



Hydrostatique est la Science qui apprend de quelle manière les corps pesent dans les fluides.

2. On dit qu'un corps est *dur* lorsque ses parties sont liées ensemble & résistent à leur séparation, & qu'il est *fluide*, lorsque ses parties ne sont point unies & se séparent sans peine.

On distingue deux sortes de corps fluides, les uns dont les

surfaces se mettent de niveau, lorsque rien ne les empêche; comme l'eau, & tout ce que nous nommons *liqueurs*; les autres dont les surfaces ne se mettent point de niveau, comme la flamme, l'air, &c. nous ne parlons ici que des fluides de la première espèce.

3. Le *Volume* d'un corps est son étendue en longueur, largeur & profondeur.

4. Si deux corps ont des volumes égaux & des pesanteurs différentes, celui qui pèse davantage est dit être plus pesant *spécifiquement*, ou avoir plus de pesanteur *spécifique*, & celui qui pèse moins, est dit être moins pesant *spécifiquement*, ou avoir moins de pesanteur *spécifique*.

5. Si deux corps ont des volumes égaux & des pesanteurs inégales, celui qui a plus de pesanteur est dit être plus *dense*, ou avoir plus de *densité*; & celui qui pèse moins, est dit être moins *dense*, ou avoir moins de *densité*.

6. Comme la pesanteur absolue des corps est toujours proportionnelle aux masses, ainsi qu'il a été dit dans le livre précédent. Il suit des deux définitions précédentes, 1°. Que si deux corps ont des volumes égaux & des masses inégales, celui qui a plus de pesanteur ou plus de densité, a aussi plus de masse que l'autre. 2°. Que si les deux corps ont les volumes égaux & les densités ou les pesanteurs égales, ils ont aussi les masses égales. 3°. Que si deux corps ont des volumes égaux, leurs pesanteurs ou leurs densités sont comme les masses. 4°. Que si deux corps ont des densités égales, leur masses ou leur pesanteurs sont comme les volumes; car puisqu'avec des densités égales & des volumes égaux, les masses ou les pesanteurs sont égales, il est clair que les densités étant égales & les volumes inégaux, les masses doivent être dans le rapport des volumes. 5°. Que les corps qui ont des densités égales ont des pesanteurs spécifiques égales; car il est clair qu'en faisant les volumes égaux, les masses seront égales. 6°. Que ceux qui ont des pesanteurs spécifiques égales, ont des densités égales. 7°. Enfin, que si deux corps ont les volumes égaux, leur pesanteurs spécifiques sont comme leur masses ou leur pesanteurs absolues; car les pesanteurs spécifiques viennent du plus ou moins de pesanteur absolue ou de masse sous un même volume.

PROPOSITION I.

7. Les *Masses* de deux corps sont en raison composée des densités & des volumes.

DEMONSTRATION

DEMONSTRATION.

Les masses des corps ne sont autre chose que la somme des parties plus ou moins denses qu'ils contiennent sous leur volumes plus ou moins grands ; car on ne sçauroit concevoir que les masses soient composées d'autre chose ; donc dans la comparaison que l'on fait de différentes masses, il faut nécessairement avoir égard & aux densités & aux volumes ; que si l'on veut confirmer ce raisonnement par une démonstration géométrique, la voici.

Soient les deux corps A, C, (Fig. 1.) dont je suppose que les densités & les volumes soient différens ; j'en prens un troisième B dont le volume soit égal au volume de A, & la densité égale à la densité de C ; je nomme V le volume de A ou de B, u le volume de C, D la densité du premier, & d la densité du second ou du troisième ; les corps A, B, ayant les volumes égaux, leur masses sont comme leur densités (N. 6.) ; donc $A, B :: D, d$, de même les corps B, C, ayant les densités égales, leur masses sont comme leur volumes ; donc $B, C :: V, u$, & multipliant les termes de cette dernière proportion par ceux de la précédente, j'ai $A \times B, B \times C :: DV, du$, & divisant la première raison par B, j'ai $A, C :: D \times V, d \times u$; donc, &c.

COROLLAIRE I.

8. Si les masses sont égales, les densités sont réciproquement comme les volumes ; car $A, C :: D \times V, d \times u$, mais par la supposition $A = C$; donc $D \times V = d \times u$, & par conséquent $D, d :: u, V$.

COROLLAIRE II.

9. Les densités sont en raison composée de la raison directe des masses, & de la raison réciproque des volumes.

Puisque $A, C :: D \times V, d \times u$; donc $A \times d \times u = C \times D \times V$, & par conséquent j'ai $D, d :: A \times u, C \times V$.

COROLLAIRE III.

10. Les volumes sont en raison composée de la raison directe des masses & de la réciproque des densités.

Par le Corollaire précédent $A \times d \times u = C \times D \times V$; donc $V, u :: A \times d, C \times D$.

PROPOSITION II.

11. Si deux corps C, B, (Fig. 1.) pesent également, leur pesanteurs spécifiques sont réciproquement comme leur volumes.

DEMONSTRATION.

Soit le volume du premier corps $C = V$, celui du second $B = u$, & leur pesanteur commune $= p$; comme nous supposons que le corps C est homogène dans toutes ses parties, il est clair que si j'augmente son volume jusqu'à le rendre égal à celui du corps B, sa pesanteur absolue augmentera à proportion de l'augmentation de volume; ainsi la pesanteur absolue p qu'il avoit auparavant sera à celle qu'il aura après l'augmentation du volume comme son premier volume V à son second volume u ; donc faisant $V, u :: p, \frac{pu}{V}$, ce quatrième terme sera le poids du corps C sous un volume égal au volume de B; donc les pesanteurs de C & B sous un même volume u seront comme $\frac{pu}{V}$ est à p , ou comme pu est à pV , ou enfin comme u est à V , mais les pesanteurs spécifiques de C & B sont égales à leur pesanteurs sous un même volume; donc les pesanteurs spécifiques de C & B sont comme u, V , c'est-à-dire réciproquement comme le volume u du corps B est au volume V du corps C avant son augmentation.

COROLLAIRE.

12. Si les poids & les volumes sont égaux, les pesanteurs spécifiques sont égales, à cause de $u = V$.

PROPOSITION III.

13. Les pesanteurs absolues de deux corps sont en raison composée de leur volumes & de leur pesanteurs spécifiques.

DEMONSTRATION.

Soient les trois corps A, C, B, (Fig. 1.) dont les deux premiers ont des volumes inégaux & des pesanteurs absolues égales, & le premier A & le troisième B ont des volumes égaux & des pesanteurs spécifiques inégales; il est clair que les deux corps C, B, ont des volumes inégaux & des pesanteurs absolues inégales; car si la pesanteur absolue de B étoit égale à celle de C,

elle seroit aussi égale à celle de A, & par conséquent les pesanteurs spécifiques de A & de B seroient égales à cause de l'égalité des volumes (N. 12.) ce qui est contre la supposition. Il s'agit donc de faire voir que les pesanteurs absolues de C & B sont en raison composée de leur volumes & de leur pesanteurs spécifiques.

Je nomme a la pesanteur absolue de A ou de C, c la pesanteur absolue de B, p la pesanteur spécifique de A, q la pesanteur spécifique de B, r la pesanteur spécifique de C, u le volume de A ou de B, & t le volume de C.

Les corps A, B, ayant même volume leur pesanteurs absolues sont comme leur pesanteurs spécifiques (N. 6.) donc $a, c :: p, q$, & les corps A, C, ayant la même pesanteur absolue, leur pesanteurs spécifiques sont réciproquement comme leur volumes (N. 12.) donc $p, r :: t, u$, & multipliant les termes de cette proportion par ceux de la précédente, j'ai $ap, cr :: pt, qu$, ou $ap, pt :: cr, qu$; & divisant la première raison par p , j'ai $a, t :: cr, qu$, ou $a, t :: c, \frac{qu}{r}$, ou $a, c :: t, \frac{qu}{r}$, & enfin $a, c :: tr, qu$; c'est-à-dire la pesanteur absolue a du corps C, est à la pesanteur absolue c du corps B en raison composée de la raison t, u , des volumes de C & B, & de la raison r, q , des pesanteurs spécifiques de ces mêmes corps.

COROLLAIRE I.

14. Les pesanteurs spécifiques des corps C, B, sont en raison composée de la raison directe de leur pesanteurs absolues, & de la réciproque des volumes.

Puisque $a, c :: tr, qu$; donc divisant l'une & l'autre raison par la raison t, u , j'ai $\frac{a}{t}, \frac{c}{u} :: r, q$, & réduisant la première raison au même dénominateur, j'ai $r, q :: au, tc$, donc, &c.

COROLLAIRE II.

15. Les densités sont en raison directe des masses ou des pesanteurs absolues & de la réciproque des volumes (N. 9.) donc les pesanteurs spécifiques sont comme les densités, puisqu'elles sont dans la même raison par le Corollaire précédent.

CHAPITRE II.

De l'équilibre des Fluides.

16. **I**L n'en est pas des corps fluides de même que des solides. Ceux-ci ont toutes leur parties tellement unies ensemble, qu'elles restent en repos si la masse est en repos, & qu'elles se meuvent si la masse se meut, en suivant la direction de la masse, & conservant toujours entr'elles le même rapport de distance ou de proximité, ce qui fait que ces corps ont un point fixe appelé centre de gravité ou de pesanteur, autour duquel toutes leur parties sont dans un parfait équilibre; au contraire les corps fluides ont leur parties détachées les unes des autres, ces parties se meuvent en tout sens vers le haut, vers le bas, vers les côtés, &c. soit que la masse soit en repos, soit qu'elle se meuve, & delà vient que si ces corps étant sur une surface horizontale ne sont pas retenus par les côtés, leur parties s'étendent de toutes parts, de façon que leur surface est toujours de niveau, & que s'ils sont retenus comme dans un vase, leur surface supérieure est toujours aussi de niveau, n'étant pas possible qu'aucune de leur parties soit plus haute que l'autre, sans glisser sur celle qui est plus basse, puisque rien ne la retient.

La supposition du mouvement en tout sens des parties des fluides est appuyée sur une infinité d'expériences qui ne laissent aucun lieu d'en douter. Qu'on verse peu à peu du vin dans un verre dans lequel on aura mis de l'eau auparavant, on verra que les parties du vin se dispersent de tous les côtés, les unes à droite, les autres à gauche, d'autres vers le bas, &c. jusqu'à ce que les deux liqueurs se soient parfaitement mêlées, & alors si on ne voit plus ce mouvement, cela ne provient que de l'uniformité de la couleur que ce mélange prend, laquelle fait qu'on ne peut plus distinguer ce que la diversité des couleurs faisoit appercevoir auparavant. Si l'on jette du sel dans l'eau, toutes les parties de l'eau sont salées en peu de tems. Les corps durs deviennent fluides, lorsque leur parties sont détachées les unes des autres par la chaleur du feu, & qu'elles commencent à se mouvoir, &c..

17. J'ai dit que la surface supérieure de l'eau se mettoit toujours de niveau, soit que cette eau fut retenue par les côtés, soit qu'elle ne le fut pas, & sur cela on pourra m'objecter 1°. Que si on jette de l'eau sur un plancher couvert de poussière, on éprouve tous les jours que grand nombre de parties d'eau se mettent en petites boules qu'on voit rouler, & que par conséquent les surfaces de ces boules ne sont pas de niveau. 2°. Que si l'on verse de l'eau dans un vase, il arrive souvent que l'eau qui est autour des bords du vase, est moins haute que celle qui en est éloignée.

Or à cela je répons que ce que ces expériences font voir ne provient point de la nature de l'eau, mais de quelques causes étrangères dont nous faisons abstraction & que je vais expliquer en peu de mots.

Quand on jette de l'eau sur un plancher couvert de poussière, les parties de cette eau qui prennent assez de poussière pour faire un espece de parois entr'elles & le plancher, s'attachent à cette poussière & se l'incorporent en formant un espece de ciment; cependant leur vitesse acquise les obligeant à se réfléchir sous un angle oblique égal à l'angle d'incidence (car ce n'est ordinairement que dans cette supposition qu'on voit les petites boules qu'on nous objecte); il arrive que les petites parties qui sont plus proches du point d'où elles ont été jetées, ayant touché le plancher plutôt, se relevent aussi plutôt & se replient un peu sur les autres, à cause de la pesanteur de la poussière dont elles sont chargées, ce qui fait qu'elles forment avec les autres qui se relevent après elles ces boules que l'on voit courir sur le plancher; & plus ces boules ont du mouvement, plus elles se chargent de la poussière sur laquelle elles roulent, & plus aussi elles composent un corps dur. Ce raisonnement est confirmé par le contraire qui arrive lorsque l'eau qu'on jette est en si grande quantité que la poussière qui s'incorpore n'est pas capable de l'empêcher de toucher le plancher; car alors on voit que cette eau tend à s'étendre sur le plancher, & à former une surface supérieure parallèle à l'horizon.

Lorsqu'en mettant de l'eau dans un verre, on éprouve que les parties de cette eau qui ne sont pas près des bords sont plus élevées que celles qui touchent les bords, cela provient de la secheresse du verre, lequel dans cet état est toujours chargé d'une petite poussière imperceptible, laquelle s'incorporant avec les

parties de l'eau qui touchent le verre, augmente les pesanteurs de ces parties, & en diminue par conséquent les vitesses; d'ailleurs quelqu'unies que soient les parties laterales du verre, elles ont toujours des petites elevations & des enfoncemens qui diminuent la vitesse avec laquelle l'eau monteroit.

PROPOSITION IV.

18. Si l'on verse d'une même liqueur dans deux tubes ou tuyaux AB, CD, (Fig. 2. 3. 4.) qui ont communication entr'eux, & que la liqueur de l'un des tubes AB soit de niveau avec la liqueur de l'autre tube CD, les liqueurs des deux tubes seront en équilibre.

DEMONSTRATION.

Il peut arriver plusieurs cas différens, car ou les deux tubes auront les diametres égaux & seront perpendiculaires à l'horizon, ou les diametres étant égaux, l'un sera perpendiculaire & l'autre oblique à l'horizon, ou les diametres étant inégaux, les deux tubes seront perpendiculaires à l'horizon, ou l'un sera perpendiculaire & l'autre oblique, ou enfin les diametres étant égaux ou inégaux, tous les deux seront obliques; la démonstration des deux premiers & du troisiéme cas, fera aisément juger des autres.

Supposons 1°. que les diametres EF, TV, (Fig. 2.) soient égaux, & les tubes verticaux, les bases EF, TV, des colonnes EB, VD, seront égales; or leur hauteurs EB, VD, seront aussi égales, puisqu'on suppose que la ligne de niveau EV est parallele à la ligne BD; donc les masses ou colonnes EB, VD, qui pressent la colonne horizontale BD sont égales; or si la surface EF baïssoit jusqu'en GH, c'est-à-dire, si la colonne EB diminuoit de la quantité EH, il faudroit nécessairement que la colonne VD augmentât de la quantité VX égale à EH, & par conséquent les hauteurs EG, TX, seroient égales; or ces hauteurs étant parcourues dans le même tems, expriment les vitesses des colonnes égales EB, VD; donc ces colonnes ont des vitesses égales, & par conséquent leur forces étant égales, elles pressent également la colonne horizontale BD; donc l'une ne peut vaincre l'autre, & l'équilibre se trouve entre les deux.

Supposons 2°. que les diametres EF, TV, (Fig. 3.) soient inégaux & les tubes verticaux, la colonne EB est à la colonne VD comme la base EF est à la base TV à cause des hauteurs égales;

or supposant que la colonne EB diminue de la quantité EH, la colonne VD augmentera d'une quantité VX égale à EH; donc la base EF sera à la base TV réciproquement comme la hauteur TX de la quantité VX sera à la hauteur EG de la quantité EH; or les hauteurs TX, EG, marquent les vitesses des colonnes VD, EF, & ces colonnes sont comme les bases TV, EF; donc la colonne EB est à la colonne VD réciproquement comme la vitesse XT de la colonne VD est à la vitesse EG de la colonne EB; donc les momens ou les forces de ces deux colonnes sont égales, & par conséquent elles pressent également la colonne horizontale BD, d'où il suit qu'il y a équilibre entr'elles.

Supposons 3°. que les diamètres EF, TV, (Fig. 4.) soient inégaux, & que le tube AB étant perpendiculaire à l'horizon, le tube CD soit incliné; je fais passer un plan horizontal par le côté MN, & dès-lors il est visible qu'on peut regarder la partie LBDONM comme un vase auquel sont adaptés les tubes AB, CN, dont la liqueur presse la colonne horizontale LBDO, & on pourroit dire la même chose dans les deux cas précédens; cela posé. Je conçois une autre tube droit Oc, de même base & de même hauteur que le tube OC, & l'on prouvera comme dans le cas précédent que si la liqueur du tube OC étoit dans le tube Oc, & que la ligne de niveau RS passât par la surface de cette liqueur, les colonnes EL, rN seroient en équilibre; or les tubes Oc, OC, étant égaux à cause des bases & des hauteurs égales, les colonnes uO, VO, seront aussi égales, & leur vitesses de même, parce que dans le même temps que uO augmenteroit de la quantité uc, la colonne OC augmenteroit de la quantité VC, & que ces quantités uc, VC ont les hauteurs égales; donc la force de VO est égale à la force de uO, & par conséquent la colonne VO est en équilibre avec la colonne EL.

COROLLAIRE I.

19. Si les liqueurs sont en équilibre dans les deux tubes, leur surfaces sont de niveau. Car puisque lorsque les surfaces sont de niveau, il y a équilibre, il s'ensuit que si elles cessent d'être de niveau l'équilibre sera rompu; donc, &c.

COROLLAIRE II.

20. Si les deux tubes étoient adaptés l'un contre l'autre sans

avoir un tube horizontal entre deux, la démonstration subsisteroit la même.

Soit par exemple les deux tubes AB, CD (Fig. 5.) adaptés comme on les voit ici, je regarde leur partie LMNDB comme un vase sur lequel on auroit mis deux tubes AM, NC; car il est visible que ce n'est que jusqu'au plan LMN que l'eau du tube AM descendant celle du tube NC monte, & que si on veut ensuite faire descendre l'eau du tube AM plus bas, celle du tube NC au lieu de monter tombera sur celle du tube AM, à cause qu'elle auroit des parties qui ne seroient point soutenues; cela posé, il est visible que la colonne EM est à la colonne TN comme la base EF est à la base TV, & l'on prouvera comme ci-dessus que les vitesses de ces colonnes sont réciproques aux bases, & que par conséquent la colonne EM doit être en équilibre avec la colonne TN, &c.

PROPOSITION V.

21. Si l'on verse dans deux tubes AB, CD, (Fig. 6.) deux différentes liqueurs qui soient en équilibre, les pesanteurs spécifiques de ces liqueurs sont entr'elles réciproquement comme les hauteurs.

DEMONSTRATION.

Supposons que les tubes ayent des diamètres égaux, si j'augmente la colonne EB de la première liqueur jusqu'à ce qu'elle ait une hauteur HB égale à la hauteur TD de la colonne VD de la seconde liqueur, les volumes des colonnes GB, VD, seront égaux à cause de l'égalité des bases & des hauteurs; donc les gravités spécifiques de ces deux colonnes seront entr'elles comme leur pesanteurs absolues (N. 6.); or la pesanteur absolue de la colonne GB est à la pesanteur absolue de sa partie EB comme HB, FB, à cause de la base commune BI, & la pesanteur absolue de la colonne EB est à la pesanteur absolue de la colonne VD, comme FB est à TD, & ces deux dernières pesanteurs absolues sont entr'elles en raison composée des volumes & des pesanteurs spécifiques (N. 13.); donc à cause de l'égalité des pesanteurs absolues des liqueurs EB, VD, qui sont en équilibre, la raison composée des volumes & des pesanteurs spécifiques doit être une raison d'égalité, mais la première de ces raisons est FB, TD; donc la seconde, c'est-à-dire, celle des pesanteurs spécifiques doit être TD, FB, car faisant la
raison

raison composée de ces deux raisons, on a $FB \times TD$, $TD \times FB$ qui est une raison d'égalité; donc les pesanteurs spécifiques des liqueurs EB, VD, sont entr'elles réciproquement comme les hauteurs TD, FB.

On peut démontrer aisément la même chose quand les diamètres des tubes sont inégaux, ou quand l'un ou l'autre des tubes, ou tous les deux sont inclinés à l'horizon.

COROLLAIRE I.

22. Donc si l'on connoît la pesanteur spécifique d'une liqueur VD, on connoîtra sans peine la pesanteur spécifique de toute autre liqueur EB; car on aura toujours FB est à TD comme la pesanteur spécifique de VD est à la pesanteur spécifique de EB.

REMARQUE.

23. Comme il n'est gueres de liqueurs qui ne se mêlent les unes avec les autres, il faut pour obvier à cet inconvénient remplir le tube horizontal de mercure, & ensuite verser les deux différentes liqueurs dans les deux tubes, & quand on s'apercevra que les deux surfaces MO, RN, du mercure seront de niveau, ce sera une marque qu'il sera pressé également de part & d'autre par les deux liqueurs, lesquelles par conséquent seront en équilibre entr'elles, mais il faut observer que les hauteurs des colonnes des liqueurs ne doivent se prendre que jusqu'à la ligne horizontale MN, c'est à-dire, si la surface de la liqueur du tube A est EF, la hauteur de cette liqueur sera FO, & si la surface de la liqueur du tube B est TV, la hauteur de cette liqueur sera TR.

COROLLAIRE II.

24. Les densités étant entr'elles comme les pesanteurs spécifiques (N. 15), on peut connoître de la même façon les densités des liqueurs si la densité de l'une d'entr'elles est connue, & si cela n'est pas, on pourra toujours connoître le rapport de ces densités.

COROLLAIRE III.

25. Si au lieu des tubes cylindriques on mettoit des tubes prismatiques de quelque nombre de côtés que fussent leurs bases,

nent les liqueurs des tubes, de même que l'eau inférieure les soutient, ces deux fonds seront pressés également; puis donc que les fonds Rr , rs sont également chargés à cause que les hauteurs & les bases des tubes fr , rs sont égales, il s'ensuit que les fonds rd , GD des vases cd , CD , qui ont aussi les bases & les hauteurs égales, sont également pressés; mais les fonds EB , GD des vases AB , CD sont pressés en raison composée des bases & des hauteurs, donc les fonds EB , rd des vases AB , cd sont aussi pressés en même raison.

PROPOSITION VII.

29. Si la base supérieure $ABEF$ (Fig. 8.) d'un vase AD plein d'eau ou de quelqu'autre liqueur, est plus grande que la base inférieure $HCDG$, le fonds $HCDG$ n'est pas plus pressé que si la base supérieure lui étoit égale, & que les côtés du vase lui fussent perpendiculaires.

DEMONSTRATION.

Supposons un autre vase AM dont le fonds soit égal à la base supérieure, & les côtés perpendiculaires entre ces deux bases. Mettons dans ce vase deux cloisons TC , XD perpendiculaires sur les extrémités HC , GD de la base inférieure du premier vase, ce qui me donne trois vases AC , TD , XM , qui ont les bases supérieures égales aux inférieures, & dont les côtés sont perpendiculaires sur les bases; je remplis ces vases d'eau, & à cause des hauteurs égales leurs fonds sont pressés dans la raison des vases (N. 28), c'est-à-dire que chaque fonds IC , HD , GM supporte la colonne d'eau qui lui est perpendiculaire; j'ôte les deux cloisons TC , XD que je suppose infiniment minces, & les trois bases se trouvent pressées de la même façon; car si quelques parties de la colonne XM passent dans la colonne TD , il faut nécessairement qu'il passe un égal nombre de parties de la colonne TD dans la colonne XM , afin que la surface supérieure AE de toute la masse d'eau soit toujours de niveau, & par conséquent les colonnes ayant toujours une même quantité de matière, pressent de la même façon les fonds sur lesquels elles portent. Je conçois deux sections obliques EG , AC , passant par les extrémités FE , AB de la base supérieure, & par les extrémités GD , HC de la base inférieure HD , & les parties de l'eau de la colonne XM , qui sont sous la section, soutiennent les parties de l'eau de cette même colonne qui sont sur la section; car s'il s'en

DEMONSTRATION.

Je suppose un autre vase GB, dont la base supérieure GP soit égale à l'inférieure CB, & dont les côtés soient perpendiculaires entre ces deux bases, j'y conçois deux plans AF, HN perpendiculaires sur les côtés AT, HI de la base supérieure AI du premier vase; je remplis d'eau le vase GB, & le fonds RH n'est pressé que par la colonne AH qui lui est perpendiculaire, de même que les fonds CF, MB ne sont pressés que par les colonnes GF, NB; j'ôte les deux plans AF, HN, & les fonds se trouvent toujours pressés de la même façon parce que les colonnes d'eau étant toujours de niveau, gardent aussi toujours la même quantité de parties, de quelque façon que ces parties puissent passer d'une colonne à l'autre; je conçois deux sections NB, AD qui passent par les côtés NI, AT de la base supérieure AI du premier vase, & par les côtés EB, CD de la base inférieure; & il est visible que la quantité d'eau qui est sous ces sections dans les colonnes NB, GF, soutient la quantité d'eau qui est au-dessus de ces sections, laquelle pressant celle qui est au-dessous, forme avec elle la pression que souffrent les fonds MB, CF; je fais passer par les deux sections NB, AD deux cloisons qui tiennent l'eau inférieure dans la même situation en retranchant l'eau supérieure; & par conséquent l'eau inférieure étant pressée de la même façon qu'elle l'étoit par l'eau supérieure, les fonds MB, CF sont autant comprimés qu'ils l'étoient auparavant; or en mettant les cloisons NB, AD, & retranchant l'eau supérieure, ce qui reste n'est autre chose que le premier vase AB, donc le fonds CB de ce premier vase, qui n'est autre chose que la somme des trois fonds CF, RH, MB est autant pressé que si ces trois fonds étoient chargés des trois colonnes GF, AH, NB, c'est-à-dire que si la base supérieure étoit égale à l'inférieure.

COROLLAIRE I.

33. On prouvera la même chose de tout autre vase quelque figure que puissent avoir ses côtés (Fig. 13, 14).

REMARQUE.

34. On peut objecter que si cette proposition est vraie, il s'en suivra que le vase AB (Fig. 12.) plein d'eau pesera autant que le

dont tous les quarrés soient vuides, & que les tuyaux deviennent aussi solides; si leur solidité fait sortir quelques parties d'eau au-dessus des tuyaux, il est évident que ces parties se mettront de niveau avec la surface supérieure AH, & que par conséquent celle-ci se repandra en dehors par les côtés du vase jusqu'à ce qu'elle revienne à sa première hauteur BII, c'est-à-dire qu'elle revienne au niveau des tuyaux; dans cet état l'eau des tuyaux sera en équilibre avec l'eau qui est sous la section, ou avec l'eau de l'espace CRDOHLIB; je conçois que tous les quarrés de la section CD à l'exception d'un seul, soient bouchés avec des cloisons qui puissent soutenir l'effort de l'eau des tuyaux si l'on ôte l'eau inférieure, ou l'effort de l'eau inférieure si l'on ôte les tuyaux & l'eau qu'ils contiennent; j'ôte par pensée ces tuyaux, & leur eau, à l'exception du tuyau EF qui est sur le quarré qui n'a point été bouché; & l'eau de ce tuyau est encore en équilibre avec l'eau de l'espace CRDOHLIB, lequel devient alors un vase qui a un orifice sur l'un de ses côtés, & un tuyau perpendiculaire à l'horizon placé sur cet orifice; car l'eau du vase CRDOHLIB fait autant d'effort sur les cloisons qu'elle faisoit sur l'eau des tuyaux qui étoit sur ces cloisons, & par conséquent elle ne fait pas plus d'effort sur l'eau du tuyau EF qu'elle en faisoit auparavant; mais l'eau du tube EF étoit de niveau avec l'eau du vase CRDOHLIB lorsque les cloisons étoient ouvertes, donc elle est aussi de niveau, & par conséquent en équilibre lorsque les cloisons sont fermées; d'où il suit que si sur une partie quelconque des côtés d'un vase CRDOHLIB, on adapte un tuyau perpendiculaire à l'horison, & dont le sommet soit au niveau ou plus haut que la surface de l'eau du vase, & qu'on le remplisse d'eau jusqu'à la hauteur de l'eau du vase, l'eau du tuyau & celle du vase seront en équilibre puisqu'elles seront de niveau & que l'une des deux ne pourra forcer l'autre de s'élever.

COROLLAIRE IV.

37. La même chose subsistera quand même les tuyaux seroient inclinés, car il n'y a qu'à concevoir que le côté AB (Fig. 16.) soit incliné à l'horison, & que les tuyaux qui sont sur les quarrés de la section CB soient parallèles à ce côté, car alors on démontrera de même que l'eau des tuyaux sera de niveau avec celle du vase CRBOHLID, parce que si celle-ci descendoit & forçoit

celle des tuyaux à monter, l'eau des tuyaux se repandroit par le haut sur la surface de l'eau du vase & la remettrait encore de niveau; & fermant tous les quarrés de la section, & ôtant tous les tuyaux & l'eau qu'ils contiennent, à l'exception de celui dont le quarré n'est pas fermé, on prouveroit de même que ci-dessus que l'eau du tuyau EF étant à la hauteur de l'eau du vase seroit en équilibre avec elle.

COROLLAIRE V.

38. Il suit du Corollaire 4, que si après avoir fermé sous les quarrés de la section CD (*Fig. 15.*) on ôte l'eau du dessous, & qu'on laisse subsister les tuyaux & l'eau qu'il contiennent, chaque cloison, c'est-à-dire chaque partie du côté CD du vase CRDOHLIB soutient l'effort de la colonne d'eau qui est dans son tuyau; car quoique cette colonne ne porte qu'obliquement sur la cloison, cependant comme elle est retenue par les côtés, toute sa force se porte nécessairement sur la base qui la soutient; or il est visible que ces colonnes sont plus ou moins fortes à proportion de leurs hauteurs & de la grandeur ou de la petitesse des bases qui les soutiennent, & quelles sont sur ces bases le même effort que l'eau intérieure du vase feroit sur ces mêmes bases si on ôtoit l'eau supérieure, donc les paries des côtés d'un vase sont pressées par l'eau intérieure, lorsque les tuyaux & l'eau qu'ils contiennent sont ôtés, à proportion de leur grandeur & de leur distance à la surface supérieure CH (*Fig. 15.*) ou AH (*Fig. 16.*) de l'eau du vase.

COROLLAIRE VI.

39. Il suit du même Corollaire 4, que si sur le même orifice RH (*Fig. 17.*) fait sur un côté d'un vase AB, on adapte successivement différens tubes HC, HD, HE, &c. l'un perpendiculaire à l'horizon & les autres diversement inclinés, qu'après les avoir remplis d'eau jusqu'à la hauteur de la surface de l'eau du vase, on supprime l'eau du vase en mettant une cloison à l'orifice qui soutienne l'eau du tube qu'on aura mis de la même façon que l'eau du vase la soutenoit, cette cloison sera toujours également pressée, soit que le tube soit perpendiculaire à l'horizon, ou qu'il soit plus ou moins incliné, car l'eau de chacun de ces tubes étant en équilibre avec l'eau du vase lorsque l'orifice est ouvert, il s'ensuit que la colonne de l'un de ces tubes n'a pas plus de force

forée que la colonne de tel autre qu'on voudra mettre en sa place.

COROLLAIRE VII.

40. Si l'orifice PQ étoit sur un côté incliné vers l'horison, on concevroit un autre vase FB (*Fig. 18.*) de même hauteur que le premier, & qui étant rempli d'eau communiquât avec AB par le même orifice; ainsi l'eau AB seroit en équilibre avec l'eau FB. C'est pourquoi si cet orifice étoit bouché, & qu'on ôtât l'eau du vase AB, la cloison PQ, c'est-à-dire la partie PQ soutiendrait l'effort de l'eau FB; or si on adaptoit à l'orifice PQ du vase FB un tube QR, & qu'on le remplit d'eau jusqu'à la hauteur de l'eau de l'un ou de l'autre vase, la colonne de ce tube soutiendrait aussi l'effort de l'eau FB, de même que l'eau AB le soutenait, donc la partie PQ de l'un ou de l'autre vase soutient le poids d'une colonne qui peseroit sur elle, & dont la hauteur seroit égale à celle de la surface de l'eau de l'un ou de l'autre vase.

COROLLAIRE VIII.

41. Si l'orifice HO (*Fig. 19.*) est sur un côté perpendiculaire à l'horison, j'adapte un tube coudé TVH dont la branche VH est horizontale, & l'autre VT est perpendiculaire à l'horizon, & remplissant ce tube d'eau jusqu'à la hauteur de l'eau du vase, la colonne TY & la colonne AB sont en équilibre; ainsi ces deux colonnes pressent également la couche d'eau VO laquelle passe par l'orifice, donc si je mets une cloison à l'orifice, & que je supprime la colonne AB, cette cloison supportera la colonne TY, ainsi elle sera pressée en raison de sa grandeur HO & de la hauteur TY.

COROLLAIRE IX.

42. Un tube ER (*Fig. 20.*) ayant été adapté à un orifice lateral OR d'un vase HC plein d'eau, si sur le même orifice OR pris pour base on élève en dedans un tube BP perpendiculaire à OR, & dont la hauteur BP soit égale à la hauteur AB du tube, je dis que l'eau du vase venant à monter dans le cylindre BP contrebalance l'eau du tube ER, laquelle est à la hauteur de l'eau du vase; car la masse du cylindre ER est égale à sa base EF multipliée par sa hauteur moyenne AB, & la masse du cylindre BP est égale à sa base OR multipliée par sa hauteur BP égale à la hauteur AB; or les hauteurs de ces masses sont égales, donc les masses sont

qu'ayant adapté deux tubes EF, HI à ces ouvertures, on verse de l'eau dans le petit tube, l'eau du vase montera dans le grand jusqu'à ce qu'elle soit de niveau avec l'eau du petit, & alors l'une & l'autre eau seront en équilibre.

Si le vase n'avoit que l'orifice HG, son fonds seroit pressé avec toute la force du parallelepiped AD, & la même chose arriveroit si le vase n'avoit que l'orifice E, parce que les liqueurs pressent le fonds d'un vase, non selon l'ouverture de ce vase, mais selon leurs hauteurs, & la grandeur du fonds (N. 29, 32); or lorsque le tube FE est adapté à l'ouverture E, si l'on vient à y verser de la liqueur, la hauteur de cette liqueur augmente, & par conséquent le fonds est plus pressé qu'il n'étoit auparavant, donc puisqu'il y a plus de pression, ce fonds reagira sur l'eau, ou la liqueur, avec plus de force, & par conséquent il faut que cette eau s'échappe par l'endroit où elle trouve de la liberté, donc elle doit monter par le tube HI, qui est le seul endroit où elle n'est point pressée, & elle y doit remonter jusqu'à ce qu'elle soit de niveau avec l'eau du tube EF parce que ce n'est qu'alors que la pression sur le fonds est égale de part & d'autre, à cause de l'égalité des hauteurs.

Quand les liqueurs des deux tubes sont de niveau il y a équilibre entr'elles, car si l'eau du tube HI descendoit en RS, il passeroit nécessairement une égale quantité d'eau qui monteroit de F en K, ainsi les deux masses RI, LF étant égales, leurs hauteurs FK, SI, seroient reciproques aux bases RS, LK; or ces hauteurs sont les vitesses des liqueurs HI, EF qui sont de niveau, & ces liqueurs ou colonnes sont entr'elles comme leurs bases VI, XF ou RS, LK, donc ces colonnes sont entr'elles reciproquement comme leurs vitesses, & par conséquent elles sont en équilibre.

COROLLAIRE XI.

44. Si nous supposons que la base HG du grand tube soit 60 fois plus grande que la base E, & que quand les liqueurs seront à la hauteur EX, la colonne XE pese une livre, la colonne HI pesera 60 lb, & par conséquent une livre en tiendra en équilibre soixante; mais avant que cela arrive il faudra avoir versé par le tube EF soixante-une livre de liqueurs; de même si les liqueurs étoient de niveau à une hauteur double, la colonne du petit tube pesera deux livres, & elle en soutiendra 120, ce qui fait comme

V v v ij

on voit une augmentation de force qu'on peut pousser bien loin ; & qui peut même servir pour élever de grands fardeaux , mais avec beaucoup du tems employé.

Par exemple , supposons que la base HG soit 200 fois plus grande que la base E , si l'on introduit un piston dans le tube HI jusqu'à l'ouverture HG , & qu'on le charge d'un poids qui avec le poids du piston vaille 200 lb , & qu'on verse une livre d'eau dans le petit tube , cette eau sera en équilibre avec le piston sans pouvoir l'élever ; mais pour peu qu'on augmente la quantité de l'eau le poids montera à une hauteur d'autant moindre que la quantité sera moindre , par exemple , si l'on verse une livre d'eau , il faut que cette livre se distribue aux deux tubes à proportion de leurs bases , ainsi il faut la diviser en 201 parties & il en passera 200 dans le grand tube & l'autre restera dans le petit ; or $\frac{1}{201}$ d'une livre dans le petit tube ne monte qu'à la 201^e. partie de la hauteur d'une livre ; ainsi le poids ne se sera élevé qu'à la 201^e. partie de la hauteur d'une livre ; de même si on veut savoir combien il faudroit avoir versé de livres d'eau pour faire que le poids soit monté à la hauteur d'une livre , on voit d'abord qu'à cause de la base du grand tube qui est 200 fois plus grande que celle du petit tube , il faut verser 200 lb pour ce tube , & 1 lb pour le petit tube , & ainsi des autres.

COROLLAIRE XII.

45. S'il n'y a sur le fond supérieur du vase que le seul orifice E , & qu'on suppose que la grandeur du fonds supérieur soit à celle de l'orifice comme 500 à 1 , & qu'on mette dans le tube une livre d'eau , le fonds supérieur sera chargé de 500 lb de plus , car la livre d'eau qui est dans le tube peut soutenir une colonne de 500 ou dont la base seroit cinq cent fois plus grande que la sienne & la hauteur égale à la hauteur , & ainsi des autres.

COROLLAIRE XIII.

46. De tout ce que nous avons dit , il s'ensuit que les liqueurs pesent en tous sens vers le bas , vers le haut , à droite , à gauche , obliquement , &c. & que les parties des vases qui les contiennent sont toujours chargées à proportion de leurs grandeurs , & de leurs distances à la surface supérieure de l'eau.

CHAPITRE III.

De quelle maniere les Corps solides pesent dans les fluides qui ont moins de pesanteur spécifique qu'eux.

PROPOSITION IX.

47. *Si un corps est plongé dans un fluide qui a moins de pesanteur spécifique que lui, il perd une partie de son poids égale à une partie du fluide qui a même volume que ce corps.*

DEMONSTRATION.

Supposons qu'un ponce cubique de plomb soit enfoncé dans l'eau, il occupera la place d'un même volume d'eau; or le poids de cette eau étoit soutenu par l'eau qui l'entouroit, donc une même quantité de poids du ponce cubique de plomb sera soutenue par l'eau qui l'environne, & par conséquent le plomb pesera moins de toute cette quantité.

COROLLAIRE I.

48. Donc 1°. si le même ponce cubique de plomb est enfoncé dans une liqueur qui a plus de pesanteur spécifique que l'eau, il perdra de son poids; car un même volume de cette liqueur pesera plus qu'un pareil volume d'eau. 2°. Si deux corps homogènes pesent également dans l'air, & que l'un d'eux soit plongé dans l'eau & l'autre dans un fluide qui a plus de pesanteur spécifique que l'eau, le second perdra plus de son poids que le premier; & par conséquent il n'y aura plus d'équilibre entr'eux. 3°. Les pesanteurs spécifiques de deux corps qui ont même volume étant entr'elles comme leur pesanteurs absolues, la pesanteur spécifique d'un ponce cubique d'eau, est à la pesanteur spécifique d'un ponce cubique de plomb, comme la partie du poids que le plomb perd dans l'eau est à son poids total. 4°. Deux corps de même volume perdent une même quantité de poids, lorsqu'ils sont plongés dans une même liqueur, mais celui qui a plus de pesanteur spécifique perd une partie moindre de sa pesanteur, que la partie que l'autre perd de la sienne. 5°.

Si deux corps ont même poids & différens volumes, celui qui a le plus grand volume, perd une plus grande partie de son poids que celui qui a moins de volume.

COROLLAIRE II.

49. Les gravités spécifiques de différens fluides sont entr'elles comme les poids qu'un même solide perd lorsqu'il est plongé dans ces fluides ; car les parties de ces fluides dont le solide prend la place, sont toutes d'égal volume, & leur poids sont égaux aux poids perdus par le solide, mais les poids des corps qui ont même volume, sont les pesanteurs spécifiques de ces corps ; donc, &c.

COROLLAIRE III.

50. Pour trouver les pesanteurs spécifiques des différens fluides, on prend une balance AB (*Fig. 22.*) à l'une des extrémités de laquelle on suspend un crochet A qui pese autant que le bassin C qui est de l'autre côté ; on attache à ce crochet un crin de cheval d'où pend une bale de plomb E ; on pese cette bale dans l'air, après quoi on la plonge successivement dans chaque fluide, & les parties qu'elle perd de son poids, sont les différentes pesanteurs spécifiques de ces fluides.

Les densités étant comme les pesanteurs spécifiques, le rapport de celles ci étant trouvé, le rapport de celles-là est aussi connu.

COROLLAIRE IV.

51. On trouve de la même façon si les parties inférieures d'un même fluide sont comprimées par les supérieures, où si elles ne le sont pas ; car si on plonge la bale de plomb dans ce fluide, en sorte qu'elle se trouve successivement à différentes hauteurs de la surface supérieure, & que l'ayant pesé dans chacune de ses différentes situations, on trouve qu'elle perd toujours la même quantité, c'est une marque que les parties inférieures ne sont point comprimées ; mais si le contraire arrive, les différentes pertes des poids que perdra la bale marqueront les différentes pesanteurs spécifiques correspondantes aux différentes hauteurs, & par conséquent on connoîtra aussi les différentes densités de cette liqueur.

COROLLAIRE V.

52. C'est de la même maniere qu'on trouve le poids d'une liqueur contenue dans un vaisseau ; on mesure d'abord la capacité du vaisseau selon les regles de la Geometrie , ou selon celle du Jaugeage ; ensuite on suspend au crochet de la balance un ponce cubique de plomb que l'or pese dans l'air ; après quoi on le plonge dans la liqueur , & le pesant de nouveau , on examine qu'elle est la quantité de son poids qu'il a perdu , & cette quantité est le poids d'un ponce cubique de la liqueur ; c'est pourquoi il n'y a plus qu'à dire par regle de trois ; si un ponce cubique de la liqueur pese tant , combien peseront tant de pieds ou de ponces cubiques que le tonneau contient ?

PROPOSITION X.

53. *Si deux corps de poids égaux ont différens volumes , leur pesanteurs spécifiques sont réciproquement comme les poids qu'ils perdent lorsqu'ils sont plongés dans un même fluide.*

DEMONSTRATION.

Les pesanteurs spécifiques des corps également pesans , sont réciproquement comme leur volumes (N. 11.) ; or leur volumes sont comme les poids qu'ils perdent dans la même liqueur ; car ils perdent à proportion des volumes ; donc les gravités spécifiques de deux corps de même poids , sont réciproquement comme les poids qu'ils perdent dans un même fluide.

COROLLAIRE I.

54. On trouve donc la gravité spécifique des différens solides en les pesant dans une même balance jusqu'à ce qu'ils soient en équilibre ; par exemple on met l'or d'un côté & l'argent de l'autre , après quoi on met un poids égal à l'un ou à l'autre dans un des bassins C (Fig. 22.) ; & mettant le crochet A à la place de l'autre bassin , on y suspend l'or & on le plonge dans l'eau , examinant qu'elle est la quantité qu'il perd de son poids , ensuite on ôte l'or , & suspendant l'argent à sa place , on le plonge dans l'eau , & trouvant qu'il perd davantage , on conclut qu'il a une pesanteur spécifique moindre que celle de l'or , & que la pesanteur spécifique de l'argent est à celle de l'or , réciproquement comme le poids que l'or a perdu est au poids perdu par l'argent.

55. C'est de cette façon qu'on a trouvé les pesanteurs spécifiques des solides suivans, ayant tous un volume égal au volume d'une masse d'or de 100 lb.

LE MERCURE 71 lb $\frac{1}{2}$	L'ETAIM pur 38 lb $\frac{1}{2}$
LE PLOMB 60 $\frac{1}{2}$	L'AIMANT 26
L'ARGENT 54 $\frac{1}{2}$	LE MARBRE 21
LE LAITON 47 $\frac{1}{2}$	LA PIERRE 14
L'AIRAIN 45	LE SOUFFRE 12
LE FER 42	LA CIRE 5
L'ETAIM commun . . . 39	L'EAU 5

Dans cette Table, le rapport de l'eau au Mercure est commun $\frac{5}{14}$ à 71 lb $\frac{1}{2}$, mais communément on se sert du rapport à 14.

Par le moyen de cette Table, si l'on demande quelle est la pesanteur d'un solide de plomb dont le volume est égal à un volume d'eau de 200 lb, on dit : comme la pesanteur spécifique de l'eau est à la pesanteur spécifique du plomb ; ainsi la pesanteur absolue 200 lb d'un tel volume d'eau, est à la pesanteur absolue d'un même volume de plomb ; on prend donc dans la table les deux pesanteurs $5 \frac{1}{2}$, 60 $\frac{1}{2}$, & faisant la règle on trouve 2268 lb $\frac{1}{2}$ pour la pesanteur du plomb.

De même, si l'on veut sçavoir quel est le poids d'un volume d'étain égal à un volume de plomb pesant 30 lb, on dit : la pesanteur spécifique du plomb est à la pesanteur spécifique d'étain commun comme la pesanteur absolue 30 du plomb est à la pesanteur absolue de l'étain de même volume ; prenant donc dans la Table les deux pesanteurs spécifiques 60 $\frac{1}{2}$, & 39 $\frac{1}{2}$, & faisant la règle, on trouvera 19 $\frac{4}{11}$, & ainsi des autres.

PROPOSITION XI.

56. Connoissant le poids d'un solide composé d'un mélange de deux autres, & la quantité qu'il perd lorsqu'on le plonge dans un fluide trouver quelle est la quantité de l'un & de l'autre corps qui entrent dans le mélange.

SOLUTION.

SOLUTION.

Supposons qu'une masse composée d'étain & de plomb pese 120 lb, & qu'étant plongée dans l'eau elle perde 14 lb, par les expériences qui ont été faites, nous savons que 37 lb d'étain perdent 5 lb dans l'eau, & que 23 lb de plomb perdent 2 lb; c'est pourquoi je dis 37 lb d'étain perdent 5 lb, combien perdront 120 lb, & faisant la règle, je trouve $\frac{600}{17}$ lb. Je dis de même si 23 lb de plomb perdent 2, combien perdront 120 lb? & je trouve $\frac{240}{11}$ lb. Je sçai donc ce que perdent dans l'eau trois masses de même poids, l'une du mélange, l'autre d'étain, & la troisième de plomb.

Pour trouver la quantité du mélange, je nomme p le poids de chaque masse, a le poids perdu par le mélange, b le poids perdu par l'étain qui est plus léger que le plomb, c le poids perdu par le plomb, & x le poids de l'étain qui entre dans le mélange; donc le poids de plomb qui entre dans ce mélange est $p - x$.

Je dis: si le poids p d'étain perd b , combien perdra la partie x de ce poids? & je trouve $\frac{bx}{p}$; je dis de même si le poids p de plomb perd c , combien perdra la partie $p - x$ de ce poids? & je trouve $\frac{p^c - cx}{p}$; ajoutant donc ensemble ces deux parties perdues par les poids qui entrent dans le mélange, la somme $\frac{bx}{p} + \frac{p^c - cx}{p}$ est la perte faite par le mélange, & par conséquent j'ai $\frac{bx + p^c - cx}{p} = a$; donc $bx - cx = ap - pc$, & $x = \frac{ap - pc}{b - c}$, d'où je tire $b - c :: p, x$, c'est-à-dire, la différence de la perte du poids p d'étain à la perte du poids p de plomb, est à la différence de la perte du poids p de mélange à la perte du poids p de plomb, comme le poids p est à la partie de l'étain qui entre dans la composition, & mettant les valeurs ci-dessus des lettres a, b, c, p , je trouve $x = 74$ lb; donc il y a soixante-quatorze lb d'étain, & par conséquent 46 lb de plomb, & le tout ensemble fait le mélange 120 lb.

COROLLAIRE I.

57. C'est à peu près de cette façon qu'on peut connoître la bonté d'une certaine masse; par exemple, supposé que l'on sçache que 23 lb de plomb perdent deux livres dans l'eau, & qu'on

X x x

le volume dont il a pris la place, sera soutenu par le fluide qui l'environnera, de même que le volume chassé en étoit soutenu, & par la même raison en quelque endroit du fluide qu'on mette le corps au-dessous de la surface supérieure plus ou moins près du fonds ou des côtés, il y sera soutenu de la même façon; mais si le corps a plus de pesanteur spécifique que le fluide dans lequel il est jetté, il ne sera jamais soutenu par le fluide qui l'environnera, parce qu'il pèse plus que le volume dont il occupera la place, & par conséquent il descendra jusqu'au fonds.

COROLLAIRE II.

65. Si l'on pousse un corps au-dessous de la surface supérieure d'un fluide qui a plus de pesanteur spécifique que lui, ce corps étant abandonné à lui-même sera repoussé par le fluide qui l'environne avec une force égale à la quantité dont la pesanteur d'un volume du fluide égal au volume du corps surpasse la pesanteur du corps; car le fluide environnant soutenoit le fluide chassé avec une force égale à la pesanteur du fluide chassé, & par conséquent cette force étant plus grande que la pesanteur du corps qui prend la place du fluide chassé, doit repousser ce corps avec l'excès qu'elle a sur la pesanteur du corps; donc, &c.

COROLLAIRE III.

66. Si l'on met dans le fonds d'un vase un corps qui a moins de pesanteur spécifique qu'un certain fluide, & qu'on vienne à verser peu à peu du fluide dans le vase, ce fluide n'enlèvera le corps que lorsqu'il l'environnera de façon que le volume du fluide qui seroit mis à la place du corps pèsera un peu plus que ce corps.

COROLLAIRE IV.

67. La gravité spécifique du corps qui a moins de pesanteur spécifique que le fluide, est à la gravité spécifique du fluide comme le volume de la partie enfoncée dans le fluide est au volume du corps; car le corps & la partie du fluide dont il occupe la place pesant également, leur pesanteurs spécifiques sont réciproquement comme leur volumes (N. 11.), mais le volume de la partie du fluide dont le corps occupe la place est égal au volume de la partie du corps enfoncée dans le fluide; donc la

pesanteur spécifique du corps est à la pesanteur spécifique du fluide, comme le volume de la partie du corps enfoncée dans le fluide est au volume du corps.

COROLLAIRE V.

68. Si deux corps qui pesent également sont jetés dans un fluide qui a plus de pesanteur spécifique qu'eux, leur parties qui s'enfoncent dans ce fluide, ont des volumes égaux; car l'un & l'autre sont sortis un volume du fluide qui pèse autant que l'un ou l'autre; donc ces deux volumes de fluide sont égaux, mais ces volumes sont égaux aux volumes des parties qui s'enfoncent; donc, &c.

D'où il suit que si les deux corps ont des volumes égaux, les pesanteurs des parties enfoncées dans le fluide seront égales, & si les volumes sont inégaux, les pesanteurs des parties enfoncées seront réciproquement comme les volumes des corps. Supposons que le volume du premier corps soit 4, & le volume du second 8; si le volume de la partie enfoncée du premier est 1, celui de la partie enfoncée du second sera aussi 1; c'est pourquoi supposant que la pesanteur de l'un ou de l'autre corps soit 16, la pesanteur de la partie enfoncée du premier sera donc 4, c'est-à-dire le quart de 16, parce que le volume de la partie enfoncée n'est que le quart du volume total, & la pesanteur de la partie enfoncée du second sera 2 ou le $\frac{1}{4}$ de 16, à cause que le volume de cette partie n'est que le $\frac{1}{4}$ du volume total; donc la pesanteur de la partie enfoncée du premier est à la pesanteur de la partie enfoncée du second comme 4 à 2, ou comme 8 à 4, c'est-à-dire réciproquement comme le volume du second corps au volume du premier.

COROLLAIRE VI.

69. Si deux corps égaux en volume sont jetés dans un fluide qui a plus de pesanteur spécifique qu'eux, les volumes de leur parties enfoncées seront entr'eux comme les pesanteurs spécifiques des corps; car les parties du fluide qu'ils chassent ont des pesanteurs absolues égales aux pesanteurs absolues des corps; mais les deux corps ayant même volume leur pesanteurs absolues sont comme leur pesanteurs spécifiques; donc les parties du fluide chassées sont entr'elles comme les pesanteurs spécifiques des corps; or les parties chassées étant homogènes entr'elles sont comme leur

volumes, lesquels sont égaux aux volumes des parties enfoncées ; donc les volumes des parties enfoncées sont entr'eux comme les pesanteurs spécifiques des corps.

COROLLAIRE VII.

70. Connoissant le volume de la partie d'un solide enfoncée dans un fluide, on connoitra la pesanteur de ce solide en pesant un volume du fluide égal au volume de la partie enfoncée.

Supposons que le volume d'un corps enfoncé dans l'eau soit de 80 pieds cubiques ; je pese un pied cubique d'eau, & trouvant par exemple qu'il pese 70 lb, je dis : si un pied cubique d'eau pese 70 lb, combien pesera un volume de cette même eau qui a 80 pieds cubiques ? & faisant la regle, je trouve 5600 lb pour le poids de ce volume, & par conséquent le solide pese aussi 5600 lb.

Et si l'on connoissoit la pesanteur du corps, & qu'on demandât quel est le volume de la partie qui doit s'enfoncer dans l'eau, on chercheroit un volume d'eau qui pesât autant que le corps, & ce volume seroit celui de la partie qui doit s'enfoncer.

Supposons que le corps pese 5600 lb, je pese un pied cubique d'eau, & trouvant 70 lb, je dis si 70 lb d'eau ont un volume d'un pied cubique, quel volume auront 5600 lb ? & faisant la regle je trouve 80 pieds cubiques pour le volume d'eau que la partie enfoncée chassera, & par conséquent cette partie aura 80 pieds cubiques de volume.

Enfin si le poids & le volume du corps étant connu, l'on demande quelle force il faut employer pour tenir ce corps tout entier au-dessous de la surface de l'eau, on cherchera le poids d'un volume d'eau égal au volume du corps, on en retranchera le poids d'un volume d'eau qui pese autant que le corps, & le reste sera la force qu'il faudroit employer, à cause que cette force est égale à celle que l'eau seroit pour faire remonter le corps si on l'abandonnoit à lui-même (N. 65.).

Supposons que le corps pese 5600 lb, & que son volume soit 4480 pieds cubiques, un pareil volume d'eau sera donc 313600 lb, c'est-à-dire le produit de 4480 pieds par le poids 70 lb d'un pied cubique d'eau, je retranche de ce poids d'eau le poids 5600 lb d'un volume d'eau égal qui pese autant que le corps, & le reste 30800 lb marqueroit la force qu'il faudroit employer.

fonds du vase qui le contient soit égale à la force qui soutiendrait l'autre corps pour l'empêcher d'aller au fonds ; je dis que si on jette dans le fluide, les deux corps unis fermement, ils resteront entre la surface & le fonds du vase.

D E M O N S T R A T I O N .

La force qui empêcheroit le premier corps A de surnager (*Fig. 25.*) est égale à la force de l'eau qui repousseroit ce corps vers la surface, & la force qui empêcheroit le second B d'aller au fonds est égale à la force de l'eau qui le pousseroit pour le faire descendre ; donc quand ces deux corps étant unis ensemble ne forment qu'un seul corps, cette masse se trouve poussée par deux forces de l'eau qui sont égales & qui ont des directions contraires, ainsi ces deux forces se contrebalancent & soutiennent la masse sans la faire ni monter ni descendre.

C O R O L L A I R E .

74. En quelque endroit que la masse des deux corps soit mise entre la surface & le fonds du vase, elle ne montera ni ne descendra, mais si on vient à desunir les corps, dans l'instant le premier montera vers la surface, & le second descendra vers le fonds, parce qu'en ce cas les forces de l'eau agiront séparément sur deux masses séparées.

P R O P O S I T I O N X V I I .

75. *La force qui tient un corps sous la surface d'un fluide qui a plus de pesanteur spécifique que ce corps, est au poids de ce corps, comme le volume de la partie qui surnageroit si le corps n'étoit pas retenu est au volume de la partie qui seroit enfoncée dans le fluide.*

D E M O N S T R A T I O N .

Le volume du fluide égal à la grandeur de la partie enfoncée a autant de pesanteur que le corps (*N. 63*) ; donc le poids de ce volume doit être au poids d'un autre volume du même fluide égal à la grandeur du corps, comme le volume est au volume, à cause que le fluide est homogène dans toutes ses parties, & par conséquent le poids d'un volume est au poids de l'autre comme la grandeur de la partie enfoncée est à la grandeur de tout le corps ; ainsi l'excès dont le poids du premier volume est surpassé par le poids du second, est comme l'excès dont la grandeur de la partie en-

les pesanteurs absolues, & par conséquent les pesanteurs spécifiques du corps & du volume du fluide sont entr'elles comme le poids du corps est au poids qu'il a perdu ; mais la puissance qui soutient le corps doit être égale au poids qui lui reste, ou à la différence du poids total au poids perdu, donc cette puissance est au poids du corps comme la différence des pesanteurs spécifiques est à la pesanteur spécifique du corps.

COROLLAIRE III.

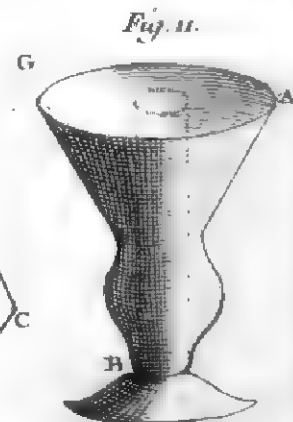
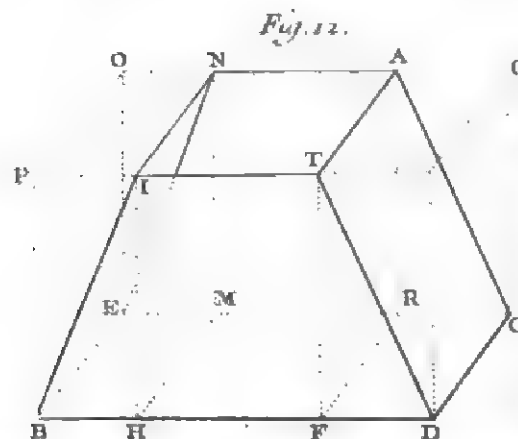
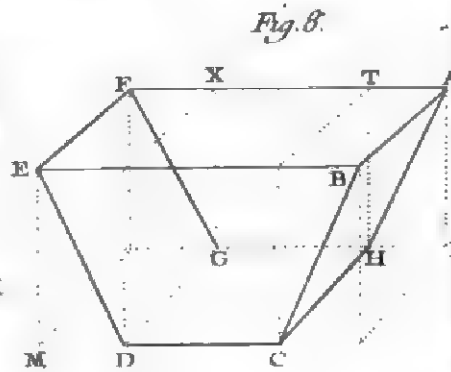
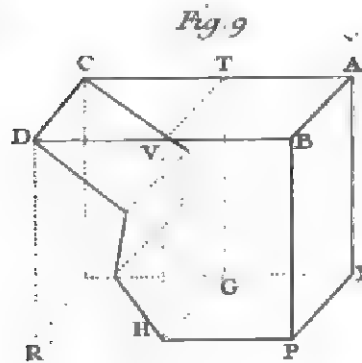
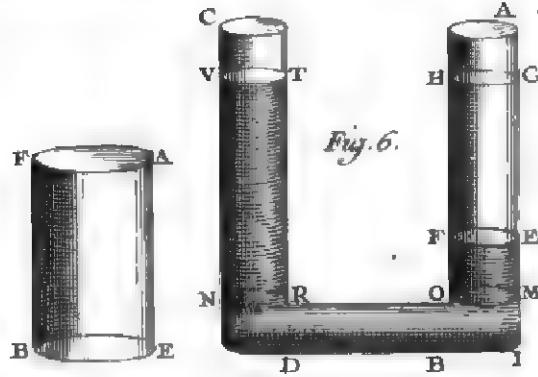
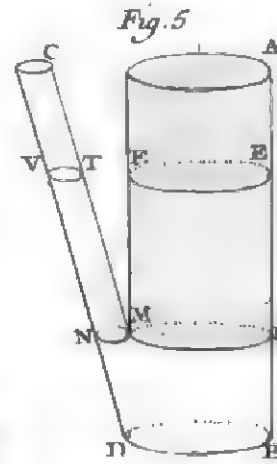
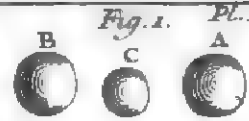
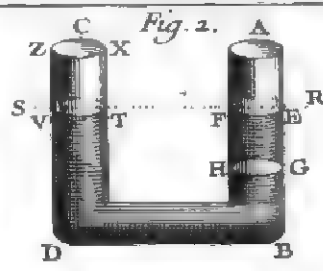
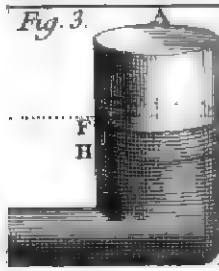
78. Connoissant le poids d'un corps & les pesanteurs spécifiques de ce corps, & d'un fluide qui a moins de pesanteur spécifique que lui ; connoissant aussi la pesanteur spécifique d'un autre corps qui a moins de pesanteur spécifique que le fluide, on trouvera aisément qu'elle est la partie de ce second corps qu'il faut joindre au premier, afin que les deux ensemble étant jetés dans le fluide restent entre la surface & le fonds.

Soit la pesanteur du premier corps = 60 lb, & le rapport de sa pesanteur spécifique à la pesanteur spécifique du fluide comme 3 à 1 ; donc par le Corollaire précédent la pesanteur spécifique du corps est à la différence des pesanteurs spécifiques du corps & du fluide, comme le poids du corps est à la puissance qui doit le soutenir entre la surface & le fonds ; faisant donc $3, 2 :: 60, \frac{2}{3}$ = 40, ce dernier terme est la puissance qui doit le soutenir.

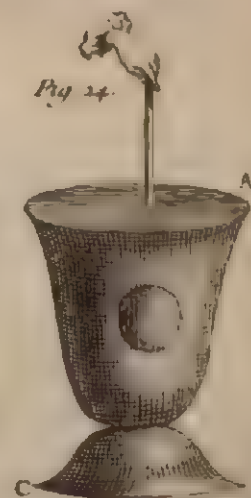
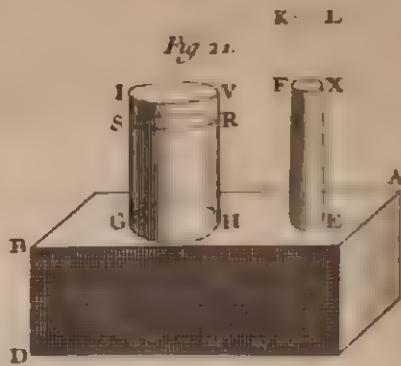
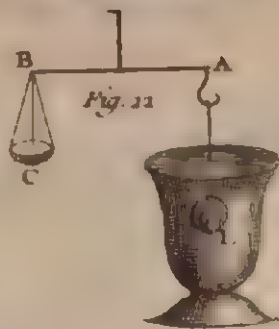
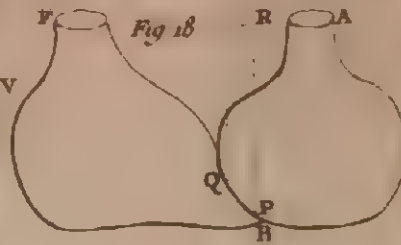
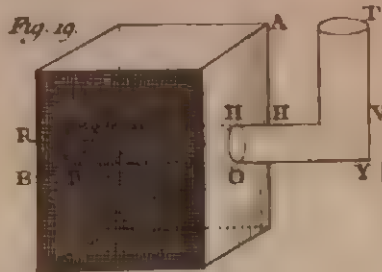
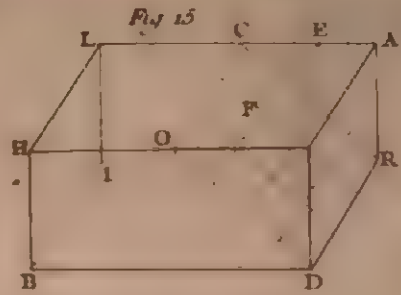
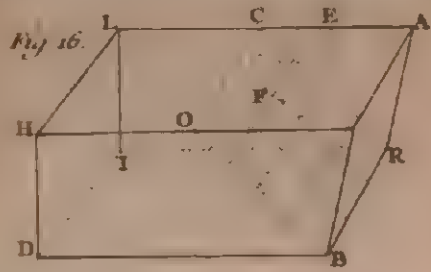
Soit le rapport de la pesanteur spécifique du second corps à la pesanteur spécifique du fluide comme 1 à 4 ; je dis par le premier Corollaire la différence des pesanteurs spécifiques est à la pesanteur spécifique du corps comme la puissance qui doit tenir ce corps entre la surface & le fonds, est à la pesanteur absolue de ce corps ; or cette puissance doit être 40 pour contrebalancer la puissance 40 qui doit soutenir l'autre corps, à cause que ces puissances ont des directions contraires ; faisant donc $3, 1 :: 40, \frac{1}{3}$ = $13 \frac{1}{3}$, ce quatrième terme est la quantité de poids du second corps qu'il faut ajouter au premier 60 lb ; ainsi la masse totale $73 \frac{1}{3}$ étant jetée dans le fluide, se tiendra entre la surface & le fonds, car l'effort que le fluide fera pour faire descendre la partie 60 étant égal à celui que le fluide fera pour faire monter la partie $13 \frac{1}{3}$, à cause que ces deux efforts sont égaux aux deux puissances dont l'une soutiendrait 60 & l'autre pousseroit $13 \frac{1}{3}$, il y aura un parfait équilibre entre ces deux forces.

Si on augmentoit le poids du second corps de la moindre

Y y ij



MECHANIQUE GENERALE





LA MECHANIQUE
 GENERALE.
 CONTENANT
 LA STATIQUE, L'AIROMETRIE,
 L'HYDROSTATIQUE,
 ET
 L'HYDRAULIQUE, &c.
 LIVRE TROISIEME.
 De l'Airométrie.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions & Principes.

1°. **L**'AIROMETRIE est la Science qui apprend à mesurer l'air, en entendant ici sous le nom de mesure, tout ce qu'on appelle ordinairement rapport; ainsi quand on dira que l'air contenu dans un vase est plus ou moins dilaté, ou plus ou moins condensé selon certaines circonstances, & qu'on déterminera le rapport de ces

Yyy iii

droite ou à gauche, ou enfin directement vis-à-vis de l'ouverture, on sent toujours la sortie de l'air.

7. Si après avoir soufflé dans une vessie de porc jusqu'à ce qu'elle soit médiocrement enflée; on serre fortement son ouverture pour empêcher l'air d'en sortir, & qu'en cet état on l'approche du feu, elle s'enflera de plus en plus, & enfin elle crevera en faisant un grand bruit; mais si avant quelle creve on la retire d'auprès du feu, elle se déinflera & se réduira même sous un moindre volume si on la transporte dans un endroit qui soit plus froid que celui où l'on étoit lorsqu'on a soufflé dedans.

Donc l'air peut se rarefier par la chaleur & se condenser par le froid, car on ne peut attribuer qu'à ces deux causes les différens effets dont nous venons de parler.

8. Qu'on prenne un tube AC (*fig. 1.*) dont la longueur excède 32 pieds, qu'on bouche l'ouverture inférieure, & qu'après l'avoir rempli d'eau on le plonge dans un vase DE plein d'eau en le tenant perpendiculaire à l'horison, enfin qu'on vienne à déboucher l'ouverture inférieure, l'eau du tube descendra en forçant celle du vase de se repandre jusqu'à ce qu'il ne reste plus que la quantité d'eau que le vase DE peut contenir, & toute cette eau aura sa surface supérieure de niveau, selon ce qui a été dit dans l'hydrostatique; maintenant qu'on retire le tube, & qu'après avoir bouché de nouveau son ouverture inférieure C on le remplisse encore d'eau, qu'ensuite on bouche l'ouverture supérieure A, & qu'en cet état on le plonge verticalement dans l'eau du vase DE, on éprouvera en débouchant l'ouverture inférieure C, que l'eau du tube descendra jusqu'à ce qu'elle soit au-dessus de la surface DH de l'eau du vase, à une hauteur BN égale à 32 pieds, après quoi elle ne descendra plus.

Or de cette expérience on peut aisément tirer une preuve convainquante qu'une colonne d'air, dont le diamètre est égal au diamètre du tube, & dont la hauteur s'étend depuis la surface DH jusqu'au lieu le plus élevé de l'air, ne pèse pas plus que la colonne d'eau BN, ce que je démontre ainsi.

Supposons que les côtés du vase DE soient perpendiculaires au fonds du vase, & qu'ils soient prolongés jusqu'au plan horizontal RS qui passe par la surface supérieure TN de l'eau qui est dans le tube; supposons aussi que le fonds VE soit 50 fois plus grand que l'ouverture C du tube, il est clair que si on remplit d'eau le vase prolongé jusqu'en RS, l'eau comprise entre RS &

les 49 colonnes , & mettant à leur place un air qui s'étende depuis la base DH des colonnes jusqu'à la plus grande hauteur de l'air , il arrive que cet air soutienne le seul poids de la colonne BN , il s'ensuivra nécessairement que cet air ne pesera pas plus que les 49 colonnes , & qu'ainsi sa 49^e partie , c'est-à-dire une colonne d'air qui a même base que BN , & dont la hauteur est la plus grande que l'air puisse avoir , ne pese pas plus que la base BN , il ne s'agit donc que de faire voir que l'air extérieur ne soutient que le seul poids de la colonne BN , ce qui est évident par la maniere dont j'ai dit qu'il faut faire l'expérience ; car le tube étant absolument plein d'eau avant qu'on débouche l'ouverture inférieure , & cette eau venant à descendre de A en T , l'air supérieur à cette colonne se trouve soutenu par le bouchon qui est en A , lequel pese sur les parois du tube & sur la main de celui qui le soutient , & nullement sur la colonne BN , donc , &c.

9. Une colonne d'eau de 32 pieds est en équilibre avec une colonne de mercure , de même base & d'environ 28 pouces de hauteur , ainsi que les expériences journalieres le font voir , donc une colonne d'air de même base est en équilibre avec une colonne d'environ 28 pouces de mercure , & pese autant qu'elle.

10. La masse totale de l'air qui environne la terre se nomme *atmosphere* , & une colonne de cet air qui est en équilibre avec une colonne de même base , & qui contient environ 28 pouces de mercure , ou 32 pieds d'eau , se nomme *poids de l'atmosphere*.



CHAPITRE II.

Du Ressort de l'Air.

PROPOSITION I.

11. **L**E Ressort de l'Air inférieur est égal au poids de toute la masse d'air supérieure.

DEMONSTRATION.

L'air supérieur presse le ressort de l'air, or tout ressort, ainsi qu'il a été dit dans le premier Livre est égal à la force qui le comprime, & l'air inférieur n'est comprimé par le supérieur que parce que celui-ci pèse; donc le ressort de l'air inférieur est égal au poids de l'air supérieur.

COROLLAIRE I.

12. Donc si l'on suppose qu'une portion d'air inférieur ait dix pieds quarré de base, son ressort est égal au poids d'une colonne d'air supérieur qui a 10 pieds quarré de base; mais une pareille colonne d'air pèse autant qu'une colonne d'eau de même base & de 32 pieds de hauteur (N. 8.) ou qu'une colonne de mercure de même base & d'environ 28 pouces de hauteur; donc le ressort de l'air est égal au poids de la colonne d'eau de 32 pieds de hauteur, ou de la colonne de mercure de 28 pouces.

COROLLAIRE II.

13. Si l'air est renfermé sans être ni plus ni moins comprimé que l'air extérieur, son ressort est le même que s'il n'étoit point renfermé; donc l'air renfermé presse la surface intérieure du corps qui le renferme, de même que l'air extérieur presse la surface extérieure de ce corps.

COROLLAIRE III.

14. Puisque l'air inférieur est comprimé, il s'ensuit que s'il trouve aux environs quelque endroit qui soit moins comprimé, son ressort se détendra de ce côté; donc s'il se trouve un vase

bien clos vuide d'air, & qu'on vienne à l'ouvrir, l'air extérieur entrera dans le vase & en remplira la capacité. •

COROLLAIRE IV.

15. Dans toutes les couches d'air qui ont une même hauteur la densité est égale partout ; car la densité plus ou moins grande vient du plus ou du moins de compression ; or l'atmosphère étant partout à égale hauteur, toutes les parties égales d'une couche d'air inférieure sont également comprimées, puisqu'elles supportent toutes des colonnes d'air supérieur dont les bases sont égales & les hauteurs aussi ; donc la densité est la même dans toutes ses parties, & pour en être mieux convaincu, il n'y a qu'à faire réflexion que si cela n'étoit pas, les parties les plus denses ayant plus de ressort que les moins denses, ne manqueroient pas de surmonter celles-ci, ce qui mettroit bientôt l'égalité dans toutes les parties.

COROLLAIRE V.

16. Soit un vase AB (*Fig. 2.*) ayant un orifice CD auquel soit adapté un robinet EF par l'ouverture duquel l'air entre dans le vase ; soit adapté au tuyau du robinet un cylindre creux FH, ayant une ouverture O avec son couvercle P & un piston IL ; que le tout soit fait de façon que le piston IL en avançant dans le cylindre ne donne point de passage à l'air, non plus que le robinet lorsqu'il est fermé, & le couvercle H lorsqu'il est sur l'ouverture O ; je ferme le robinet & je pousse le piston jusqu'à ce qu'il soit parvenu en F, puis fermant l'ouverture O & ouvrant le robinet, je retire le piston jusqu'en H, il est clair par le Corollaire III. que l'air du vase se dilate, & qu'il s'en répand une partie dans le cylindre FH dont elle remplit la capacité, & que l'air qui reste dans le vase & celui qui est dans le cylindre ont des densités égales par le Corollaire IV ; ainsi l'air qui reste dans le vase est diminué de toute la quantité qui est comprise dans le cylindre FH ; je ferme le robinet, & découvrant l'ouverture O, je pousse de nouveau le piston jusqu'en F, ce qui fait sortir l'air qui étoit contenu dans le cylindre ; je referme l'ouverture O, & r'ouvrant le robinet, je tire le piston jusqu'en H ; d'où il arrive que l'air se dilatant encore davantage, se communique dans FH, & que par conséquent la quantité qui reste

vase à la capacité du cylindre ; car ces deux airs ayant la même densité , leur masses étoient comme leur volumes ; or après le premier coup de piston , l'air du vase s'est communiqué dans le cylindre , & dans l'un & l'autre il a la même dilatation , ainsi l'air du vase est encore à celui du cylindre comme la capacité du vase à la capacité du cylindre ; & par conséquent ajoutant chaque conséquent à son antécédent , l'air du vase plus celui du cylindre est à l'air du vase comme la capacité du vase plus celle du cylindre est à la capacité du vase ; mais l'air du vase plus celui du cylindre est l'air primitif , & l'air du vase seul est le premier reste ; donc $x, y :: S, s$, de même après le second coup de piston , l'air qui étoit resté dans le vase s'est communiqué de nouveau dans le cylindre , & par conséquent ce premier reste est au second encore comme la somme des capacités est à la capacité du vase ; donc $y, z :: S, s$, & multipliant les termes de cette proportion par ceux de la précédente $xy, zy :: S^2, s^2 :: S'', s''$, & divisant la première raison par y , j'ai $x, z :: S'', s''$, c'est-à-dire l'air primitif est à ce qui reste dans le vase après le second coup de piston , comme la somme des capacités élevée à l'exposant 2 qui est le nombre des coups de piston , est à la capacité du vase élevée au même exposant.

COROLLAIRE I.

19. Si la capacité du vase est égale à celle du cylindre, on a $s = \frac{1}{2} S$, & par conséquent $y = \frac{1}{2} x$, c'est-à-dire, l'air primitif est au premier reste comme 1 est à $\frac{1}{2}$; or le premier reste est au second encore comme 1 à $\frac{1}{2}$; donc l'air primitif est au second reste comme 1 est à $\frac{1}{4}$, & par la même raison, on trouvera que l'air primitif est au troisième reste comme 1 à $\frac{1}{8}$, au quatrième reste comme 1 à $\frac{1}{16}$, & ainsi de suite.

De même si la capacité du vase est double de celle du cylindre, on trouvera que l'air primitif est au premier reste comme 1 à $\frac{2}{3}$, qu'il est au second reste comme 1 à $\frac{4}{9}$, au troisième comme 1 à $\frac{8}{27}$, au quatrième comme 1 à $\frac{16}{81}$, &c. & on trouveroit de même le rapport de l'air primitif, si la capacité du vase étoit encore plus grande par rapport à celle du cylindre.

Si la capacité du vase est à celle du cylindre comme 1 à 2, l'air primitif sera au premier reste comme 1 à $\frac{1}{3}$, au second comme 1 à $\frac{1}{9}$, au troisième comme 1 à $\frac{1}{27}$, &c.

Si la capacité est à celle du cylindre comme 1 à 3, l'air pri-

mitif sera au premier reste comme 1 à $\frac{1}{4}$, au second comme 1 à $\frac{1}{8}$, au troisième comme 1 à $\frac{1}{16}$, &c. & on trouvera de même le rapport de l'air primitif aux restes, quand la capacité du vase seroit encore moindre.

Les restes dans le premier cas forment la suite $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}, \frac{1}{2048}, \frac{1}{4096}, \frac{1}{8192}, \frac{1}{16384}, \frac{1}{32768}, \frac{1}{65536}, \frac{1}{131072}, \frac{1}{262144}, \frac{1}{524288}, \frac{1}{1048576}, \frac{1}{2097152}, \frac{1}{4194304}, \frac{1}{8388608}, \frac{1}{16777216}, \frac{1}{33554432}, \frac{1}{67108864}, \frac{1}{134217728}, \frac{1}{268435456}, \frac{1}{536870912}, \frac{1}{1073741824}, \frac{1}{2147483648}, \frac{1}{4294967296}, \frac{1}{8589934592}, \frac{1}{17179869184}, \frac{1}{34359738368}, \frac{1}{68719476736}, \frac{1}{137438953472}, \frac{1}{274877906944}, \frac{1}{549755813888}, \frac{1}{1099511627776}, \frac{1}{2199023255552}, \frac{1}{4398046511104}, \frac{1}{8796093022208}, \frac{1}{17592186044416}, \frac{1}{35184372088832}, \frac{1}{70368744177664}, \frac{1}{140737488355328}, \frac{1}{281474976710656}, \frac{1}{562949953421312}, \frac{1}{1125899906842624}, \frac{1}{2251799813685248}, \frac{1}{4503599627370496}, \frac{1}{9007199254740992}, \frac{1}{18014398509481984}, \frac{1}{36028797018963968}, \frac{1}{72057594037927936}, \frac{1}{144115188075855872}, \frac{1}{288230376151711744}, \frac{1}{576460752303423488}, \frac{1}{1152921504606846976}, \frac{1}{2305843009213693952}, \frac{1}{4611686018427387904}, \frac{1}{9223372036854775808}, \frac{1}{18446744073709551616}, \frac{1}{36893488147419103232}, \frac{1}{73786976294838206464}, \frac{1}{147573952589676412928}, \frac{1}{295147905179352825856}, \frac{1}{590295810358705651712}, \frac{1}{1180591620717411303424}, \frac{1}{2361183241434822606848}, \frac{1}{4722366482869645213696}, \frac{1}{9444732965739290427392}, \frac{1}{18889465931478580854784}, \frac{1}{37778931862957161709568}, \frac{1}{75557863725914323419136}, \frac{1}{151115727451828646838272}, \frac{1}{302231454903657293676544}, \frac{1}{604462909807314587353088}, \frac{1}{1208925819614629174706176}, \frac{1}{2417851639229258349412352}, \frac{1}{4835703278458516698824704}, \frac{1}{9671406556917033397649408}, \frac{1}{19342813113834066795298816}, \frac{1}{38685626227668133590597632}, \frac{1}{77371252455336267181195264}, \frac{1}{154742504910672534362390528}, \frac{1}{309485009821345068724781056}, \frac{1}{618970019642690137449562112}, \frac{1}{1237940039285380274899124224}, \frac{1}{2475880078570760549798248448}, \frac{1}{4951760157141521099596496896}, \frac{1}{9903520314283042199192993792}, \frac{1}{19807040628566084398385987584}, \frac{1}{39614081257132168796771975168}, \frac{1}{79228162514264337593543950336}, \frac{1}{158456325028528675187087900672}, \frac{1}{316912650057057350374175801344}, \frac{1}{633825300114114700748351602688}, \frac{1}{1267650600228229401496703205376}, \frac{1}{2535301200456458802993406410752}, \frac{1}{5070602400912917605986812821504}, \frac{1}{10141204801825835211973625643008}, \frac{1}{20282409603651670423947251286016}, \frac{1}{40564819207303340847894502572032}, \frac{1}{81129638414606681695789005144064}, \frac{1}{162259276829213363391578010288128}, \frac{1}{324518553658426726783156020576256}, \frac{1}{649037107316853453566312041152512}, \frac{1}{1298074214633706907132624082305024}, \frac{1}{2596148429267413814265248164610048}, \frac{1}{5192296858534827628530496329220096}, \frac{1}{10384593717069655257060992658440192}, \frac{1}{20769187434139310514121985316880384}, \frac{1}{41538374868278621028243970633760768}, \frac{1}{83076749736557242056487941267521536}, \frac{1}{166153499473114484112975882535043072}, \frac{1}{332306998946228968225951765070086144}, \frac{1}{664613997892457936451903530140172288}, \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576}, \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152}, \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304}, \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608}, \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216}, \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432}, \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864}, \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728}, \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456}, \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912}, \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824}, \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648}, \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296}, \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592}, \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184}, \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368}, \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736}, \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472}, \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944}, \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888}, \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776}, \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552}, \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104}, \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208}, \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416}, \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832}, \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664}, \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328}, \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656}, \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312}, \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624}, \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248}, \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496}, \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992}, \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984}, \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968}, \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936}, \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872}, \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744}, \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488}, \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976}, \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952}, \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904}, \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808}, \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616}, \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232}, \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464}, \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928}, \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856}, \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712}, \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424}, \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848}, \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696}, \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392}, \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784}, \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568}, \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136}, \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272}, \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544}, \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088}, \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176}, \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352}, \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704}, \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408}, \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816}, \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632}, \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264}, \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528}, \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056}, \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112}, \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224}, \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448}, \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896}, \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792}, \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584}, \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168}, \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336}, \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672}, \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344}, \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688}, \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376}, \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752}, \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504}, \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008}, \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016}, \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032}, \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064}, \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128}, \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256}, \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512}, \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024}, \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048}, \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096}, \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192}, \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384}, \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768}, \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536}, \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072}, \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144}, \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288}, \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576}, \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152}, \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304}, \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608}, \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216}, \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432}, \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864}, \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728}, \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456}, \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912}, \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824}, \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648}, \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296}, \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592}, \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184}, \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368}, \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736}, \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472}, \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944}, \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888}, \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776}, \frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552}, \frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104}, \frac{1}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208}, \frac{1}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416}, \frac{1}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832}, \frac{1}{113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664}, \frac{1}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328}, \frac{1}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656}, \frac{1}{904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312}, \frac{1}{1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624}, \frac{1}{3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248}, \frac{1}{7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496}, \frac{1}{14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992}, \frac{1}{28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984}, \frac{1}{57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968}, \frac{1}{115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936}, \frac{1}{231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872}, \frac{1}{463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830336031652518559744}, \frac{1}{926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660672063305037119488}, \frac{1}{1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321344126610074238976}, \frac{1}{3705346855594118253554271520278013051304639509300498049262642688253220148477952}, \frac{1}{7410693711188236507108543040556026102609279018600996098525285376506440296955904}, \frac{1}{14821387422376473014217086081112052205218558037201992197050570753$

pour élever la somme des capacités, & la capacité du vase à l'exposant marqué par le nombre des coups de piston, mais encore pour résoudre quelques questions qui seroient fort embarrassantes sans ce secours.

Il faut donc se rappeler que si quatre nombres sont en proportion geometrique, leur logarithmes sont en proportion arithmetique; que si on multiplie deux nombres l'un par l'autre, le logarithme du produit est la somme des logarithmes des deux nombres; que si on divise un nombre par un autre, on aura le logarithme du quotient en retranchant du logarithme du dividende le logarithme du diviseur; que si on éleve un nombre à une puissance quelconque, on aura le logarithme de cette puissance en multipliant le logarithme du nombre par l'exposant de la puissance; & que si on veut extraire une racine quelconque d'un nombre, il faut pour avoir le logarithme de cette racine, diviser le logarithme du nombre par l'exposant ou le degré de cette racine. Tout ceci a été démontré dans notre *Arithmetique des Geometres*, & nous allons en faire l'application en avertissant que nous mettrons la lettre *l* pour marquer le logarithme d'un nombre; ainsi le logarithme de *a* sera *la*, celui de *a*² sera *2la*, celui de *a*ⁿ sera *nla*, celui de *a*¹/_n sera *1*/_n *la*, & ainsi des autres.

Soit donc le nombre des coups de piston = 6, la capacité du vase = 460, celle du cylindre = 580, la somme des capacités sera donc 1040, & pour résoudre le problème ainsi que nous avons fait dans le Corollaire précédent, il faudroit élever 1040 & 460 à la sixième puissance, puis diviser l'une par l'autre, ce qui seroit extrêmement long & fort ennuyant. Pour éviter donc cet embarras, je cherche dans les logarithmes 3. 0170333, 2. 6627578 de la somme des capacités & de la capacité du vase; je multiplie ces logarithmes par 6 à cause qu'il falloit élever leur nombres à la sixième puissance, ce qui donne 18. 1021998, 15. 9765468, je retranche le second du premier à cause qu'il falloit diviser les deux puissances l'une par l'autre, & le reste est 2. 1256530. Je cherche ce logarithme dans les tables, & je trouve qu'il appartient à un nombre qui est entre 133 & 134, & me servant des regles que j'ai enseignées dans l'Ouvrage que je viens de citer, je trouve 133 $\frac{11}{100}$; donc l'air primitif est au dernier reste comme 133 $\frac{11}{100}$ est à 1, ou comme 13355 est à 100, ou comme 2671 est à 20.

22. Connoissant la capacité du vase & celle du cylindre, on connoitra combien de coups de piston il faut donner afin que l'air primitif soit au dernier reste dans un rapport donné en cette maniere.

Je nomme l'air primitif $= p$, le dernier reste $= r$, la somme des capacités $= S$, & la capacité du vase $= s$; donc j'ai $p, r :: S^n, s^n$, & il s'agit de trouver la valeur de n , ce qui seroit fort embarrassant si les logarithmes ne nous fournissent un moyen aisé de le découvrir, car mettant au lieu des quatre termes de cette proportion leur quatre Logarithmes, j'ai $lp, lr :: n/S, n/s$, & comme c'est ici une proportion arithmetique, je fais la somme des extrêmes, & celle des moyens, ce qui donne $lp + n/s = lr + n/S$, d'où je tire $lp - lr = n/S - n/s$, & $n = \frac{lp - lr}{1/s - 1/S}$.

Soit donc la raison de l'air primitif au dernier reste, ou la raison p, r , égale à 2671, 20, la capacité S du vase & du cylindre 1040, & la capacité s du vase 460, je prens les logarithmes 3, 4268365, 1, 3010300 des nombres 2671, 20, & retranchant le second du premier, le reste est 2, 1258065 $= lp - lr$; je prens les logarithmes 3, 0170333, 2, 6627578 de 1040 & 460, & retranchant le second du premier, le reste est 0, 3842755 $= 1/S - 1/s$; je divise le reste 2, 1258065 par le reste 0, 3842755, & le quotient 6 $= \frac{lp - lr}{1/s - 1/S} = n$, donc il faut 6 coups de piston.

COROLLAIRE V.

23. Connoissant le nombre de coups de piston, le rapport de l'air primitif au dernier reste, & la capacité du vase, on connoitra la capacité du cylindre en cette sorte.

Je nomme le nombre de coups de piston $= n$, le rapport de l'air primitif au dernier reste p, r ; la capacité du vase $= c$ & celle du cylindre $= x$, donc j'ai $p, r :: c + x, c^n$, & mettant les logarithmes de ces nombres, j'ai $lp, lr :: n/c + x, n/c$, & faisant la somme des extrêmes, & celle des moyens, j'ai $lp + n/c = lr + n/c + x$, ou $lp - lr = n/c + x - n/c$ ou $\frac{lp - lr}{n} = c + x - c$, ou enfin $\frac{lp - lr}{n} + c = c + x$; or $c + x$ étant la somme des capacités

cités $\overline{lc+x}$ est le logarithme de cette somme, donc je puis trouver cette somme par le moyen des tables, & cette somme étant trouvée je n'ai qu'à en retrancher la capacité du vase, & le reste me donnera la capacité du cylindre.

Soit donc le nombre des coups de piston $= 6$, le rapport de l'air primitif au dernier reste 2671, 20, & la capacité du vase $= 460$; je prens dans les tables les logarithmes 3, 4268365, 1, 3010300 des nombres 2671, 20, ou du rapport p, r ; je retranche le second du premier & le reste est 2, 1258065 $= lp - lr$; je divise ce reste par 6 $= n$ & le quotient est $\frac{lp-lr}{n} = 0, 3543010$, j'ajoute à ce quotient le logarithme 2, 6627578 $= lc$, & la somme est 3, 0170589 $= \frac{lp-lr}{n} + lc$, & ce logarithme appartient au nombre 1040, donc 1040 est la somme des capacités, & par conséquent $1040 - 460 = 580$ est la capacité du cylindre.

COROLLAIRE VI.

24. Si l'on a deux machines dont les deux vases soient égaux; & les deux cylindres, inégaux, & qu'après un certain nombre de coups de pistons donnés dans le premier cylindre, & un autre nombre de coups donnés dans le second, il se trouve que le rapport de l'air primitif au dernier reste soit le même dans l'une & l'autre machine, je dis que le nombre des coups de pistons dans la premiere machine est au nombre des coups dans la seconde, reciproquement comme dans la seconde la différence des logarithmes de la capacité du vase & de la somme des capacités est à la même différence dans la premiere.

Je nomme la raison de l'air primitif au dernier reste p, r , la capacité du vase $= c$, le nombre des coups de piston dans la premiere machine $= N$, & le nombre des coups de piston dans la seconde $= n$, la capacité du cylindre de la premiere machine H , & la capacité de celui de la seconde $= h$.

J'ai donc dans la premiere machine $p, r :: \overline{c+H}^N, c^N$, & dans la seconde $p, r :: \overline{c+h}^n, h^n$, donc $\overline{c+H}^N, c^N :: \overline{c+h}^n, h^n$, & mettant les logarithmes au lieu des nombres, j'ai $N\overline{lc+H}, Nlc :: n\overline{lc+h}, nth$, & faisant la somme des extrêmes, & celle des moyens, j'ai $N\overline{lc+H} + nth = n\overline{lc+h} + Nlc$, ou $N\overline{lc+H} - Nlc = n\overline{lc+h} - nth$, d'où je tire $N, n :: \overline{lc+H} - lc, \overline{lc+h} - lh$.

25. Pour connoître le poids absolu de l'air primitif, il faut peser le vase avec son robinet avant de donner aucun coup de piston, ensuite il faut donner un coup de piston & peser de nouveau le vase; la différence des poids sera la quantité de l'air qui aura passé dans le cylindre; or le reste de l'air qui est dans le vase ayant la même densité que celui qui est passé dans le cylindre, il est visible que ces deux airs seront entr'eux comme les capacités du vase & du cylindre; on dira donc par regle de trois: comme la capacité du cylindre est à celle du vase, ainsi le poids de l'air qui est passé dans le cylindre est au poids du premier reste; & ajoutant ensemble ces deux poids, on aura le poids de l'air primitif.

CHAPITRE III.

De la compression de l'Air & de son équilibre avec les autres fluides.

26. **D**E même qu'on peut tirer l'air d'un vase & l'en faire sortir tout-à-fait, de même aussi on peut le comprimer de plus en plus; car si lorsque le piston est en H (Fig. 2.) on ferme l'ouverture O & on ouvre le robinet, il est visible qu'en poussant le piston jusqu'en F, l'air du cylindre est obligé de passer dans le vase, ce qui ne peut arriver à moins que l'air du vase & celui du cylindre ne se compriment mutuellement jusqu'à n'occuper ensemble que la seule capacité du vase; or si après ce premier coup de piston on ferme le robinet, & qu'ayant découvert l'ouverture O on retire le piston jusqu'en H, il est encore clair que l'air extérieur entrera dans le cylindre FH, c'est pourquoi refermant l'ouverture, & ouvrant de nouveau le robinet, le piston poussé vers G obligera l'air du cylindre d'entrer dans le vase où il se fera une nouvelle compression; ainsi en multipliant les coups de piston, on pourra comprimer l'air de plus en plus.

PROPOSITION III.

27. *L'air primitif du vase est à l'air comprimé après un nombre quelconque de coups de piston, comme la capacité du vase est à la som-*

GENERAL2, LIVRE III.

me de la capacité du vase, & du produit de la capacité du ~~vase~~ ^{cyindre} 555 par le nombre de coups de piston.

DEMONSTRATION.

Après les coups de piston le vase contient non-seulement l'air primitif, mais encore l'air que le cylindre contient pris autant de fois qu'on a donné de coups de piston, mais l'air primitif est à l'air qui étoit contenu dans le cylindre avant le premier coup de piston, comme la capacité du vase à la capacité du cylindre, à cause que ces deux airs avoient la même densité, & par la même raison l'air primitif est à l'air qui entre dans le cylindre après le premier coup de piston, comme la capacité du vase à la capacité du cylindre, & ainsi des autres, donc l'air primitif est à tous les airs qui ont rempli successivement le cylindre, comme la capacité du vase à la capacité du cylindre multipliée par le nombre des coups de piston; donc puis qu'après tous les coups de piston, le vase contient non-seulement toutes les quantités d'air qui ont rempli successivement le cylindre, mais encore l'air primitif, il s'en suit que l'air primitif est à l'air contenu dans le vase après le coup de piston, comme la capacité du vase à la somme de la capacité du vase & du produit de la capacité du cylindre par le nombre des coups de piston.

Nommant la capacité du vase $= a$, celle du cylindre $= c$, & le nombre des coups de piston $= n$, l'air primitif est donc à l'air comprimé comme a est à $a + nc$.

COROLLAIRE I.

28. Connoissant le rapport de l'air primitif à l'air comprimé, & le rapport de la capacité du vase à la capacité du cylindre, on connoitra le nombre de coups de piston qu'il faut donner pour comprimer l'air au degré où il est, en cette sorte.

Je nomme le rapport de l'air primitif à l'air comprimé $= p, t$, celui de la capacité du vase à la capacité du cylindre $= a, c$, & le nombre des coups de piston $= x$, donc $p, t :: a, a + cx$ (N. 26), & par conséquent $pa + pcx = at$, ou $pcx = at - pa$, d'où je tire $x = \frac{at - pa}{pc} = \frac{t - p \times a}{pc}$.

Soit $p = 1, t = 7, a = 1, c = 2$, donc $t - p = 7 - 1 = 6$, $t - p \times a = 6 \times 1 = 6$, $pc = 1 \times 2 = 2$, & par conséquent $x = \frac{t - p \times a}{pc} = \frac{6}{2} = 3$.

Aaaa ij

29. Connoissant la capacité du vase, le nombre des coups de piston, & la raison de l'air primitif à l'air comprimé, on connoîtra la capacité du cylindre en cette maniere.

Je nomme la raison de l'air primitif à l'air comprimé $= p, r$, la capacité du vase $= a$, le nombre des coups de piston $= n$, & la capacité du cylindre $= x$, donc $p, r :: a, a + nx$, & par conséquent $pa + pnx = ar$, ou $pnx = ar - pa$, d'où je tire $x = \frac{ar - pa}{pn}$
 $= \frac{r - p \times a}{pn}$.

Soit $p = 1, r = 7, a = 1, n = 3$, donc $r - p = 7 - 1 = 6$,
 $r - p \times a = 6 \times 1 = 6, pn = 1 \times 3 = 3$, & par conséquent $x = \frac{r - p \times a}{pn} = \frac{6}{3} = 2$.

Et si l'on connoissoit la capacité du cylindre, & qu'on demandât la capacité du vase, on nommeroit la capacité du cylindre $= c$, celle du vase $= x$, & l'on auroit $p, r :: x, x + nc$, donc $px + prc = rx$, ou $pnc = rx - px$, d'où l'on tireroit $x = \frac{pnc}{r - p}$.

Soit $p = 1, r = 7, n = 3$, & $c = 2$, donc $pnc = 1 \times 3 \times 2 = 6$,
 $r - p = 7 - 1 = 6$, & par conséquent $\frac{pnc}{r - p} = \frac{6}{6} = 1 = x$.

PROPOSITION IV.

30. Les différentes compressions d'une même masse d'air sont entr'elles comme les poids qui les compriment.

DEMONSTRATION.

Les compressions étant causées par les différens poids dont la masse est comprimée, sont par conséquent les effets de ces poids; or les effets sont proportionnels à leurs causes, donc les compressions sont entr'elles comme les poids comprimants.

Nota. 1°. Que je fais abstraction des changemens qui peuvent arriver dans l'air inférieur par la chaleur ou le froid, ou par quelque autre cause. 2°. Que je suppose que la compression ne soit ni extrêmement grande ni extrêmement petite, car le ressort de l'air ayant une force finie, il est visible qu'après un certain degré de compression, il ne sauroit être comprimé davantage, non plus qu'il ne sauroit se dilater davantage après un certain degré de dilatation.

COROLLAIRE I.

31. De-là il suit, 1°. Que les ressorts d'une même masse d'air qui souffre différentes compressions, sont entr'eux comme ces compressions, ou comme les poids qui compriment la masse, c'est-à-dire que le ressort est plus ou moins grand, selon que la masse est plus ou moins comprimée, parce que le ressort est toujours égal à la force qui le comprime. 2°. Que les différentes densités de cette masse sont entr'elles comme les compressions, car le plus ou le moins de compression cause le plus ou le moins de densités. 3°. Que les différens volumes de cette masse sont entr'eux reciproquement comme les compressions; car la masse étant toujours la même, un volume plus grand a moins de densité qu'un volume moins grand, & par conséquent les volumes sont reciproques aux densités, mais les densités sont comme les compressions ou comme les poids, donc les volumes sont aussi reciproques aux compressions ou aux poids. 4°. Que les ressorts sont reciproques aux volumes, à cause que les ressorts sont comme les densités. 5°. Qu'en supposant égalité de masse, l'air qui est sur les parties les plus basses de la surface de la terre, est plus comprimé que celui qui est sur les parties les plus élevées, à cause que les colonnes d'air qui forment la compression de l'air inférieur sont plus hautes sur les parties les plus basses que sur les parties les plus élevées.

R E M A R Q U E.

32. Quoique la vérité de cette proposition soit assez évidente, cependant M. Mariotte en a fait deux expériences qu'il rapporte dans ses Essais de Physique, & qu'on ne sera pas fâché de trouver ici.

Première expérience. Prenez un tuyau recourbé ABCD (Fig. 3); dont les deux branches soient paralleles, & dont l'une ait 8 pieds de hauteur, & l'autre douze pouces, c'est-à-dire $AB = 8$ pieds, $DC = 12$ pouces; ces deux branches doivent être d'égal diamètre dans toutes leurs parties, & l'ouverture D de la petite doit être exactement bouchée. Tenez ce tuyau dans une position perpendiculaire à l'horison, & versez-y peu à peu du mercure par l'ouverture A, jusqu'à ce que le fonds qui fait la communication soit rempli, en sorte que la surface BC soit de niveau; dans cet état l'air DC n'est ni plus ni moins comprimé qu'il l'étoit au-

LA NEGRAFOBIA

passer, puis qu'il a toujours son autre valve. Continuez à verser du mercure, mais doucement, de peur que le choc qui irait se faire si on le versait d'abord trop vite, ne fît sauter de nouveau le verre. L'eau est déjà coulé, & vous trouverez que quand le mercure s'élève à la hauteur de 4 pouces dans la branche B.C. il s'élève à la hauteur de 10 pouces de plus dans la branche A.D. c'est-à-dire à 14 pouces au-dessus du mercure qui se trouve dans la branche B.C.

[illegible]

quement comme le poids 42 dont l'air étoit chargé avant la compression, est au poids 56, dont il se trouve chargé après la compression; d'où il est aisé de conclure que les deux compressions sont comme les poids 42, 56; & on trouveroit toujours la même chose en continuant à verser du mercure.

Seconde expérience. Prenez un long tuyau AC (*Fig. 1.*) de 40 pouces de longueur, & dont l'extrémité A soit exactement fermée, versez-y 27 pouces $\frac{1}{2}$ de mercure, afin qu'il y reste douze pouces & demi d'air, bouchez l'ouverture C avec le doigt, & plongez ce tuyau dans un vase DE, en sorte qu'il soit dans une situation verticale, & qu'il ne s'enfonce que d'un pouce dans le mercure du vase; débouchez l'ouverture C, & vous trouverez que le mercure du tuyau descendra jusqu'à ce qu'il ne soit plus qu'à 14 pouces de hauteur au-dessus du mercure du vase; ainsi comme le tuyau est de 40 pouces, & qu'il y en a un qui est enfoncé dans le vase & 14 qui sont remplis de mercure, il restera 25 pouces d'air; or il n'y en avoit que 12 & $\frac{1}{2}$, donc cette masse d'air de 12 pouces & demi s'est dilatée.

Pour rendre raison de ceci, il faut observer que s'il n'y avoit point d'air dans le tuyau, le poids de l'atmosphère ou une colonne d'air de même base que le tuyau & de la hauteur de l'atmosphère soutiendrait 28 pouces de mercure; donc puisqu'il n'y a que 14 pouces de mercure, il s'ensuit qu'il n'y a que la moitié du poids de l'atmosphère qui soutient le mercure, & que l'autre moitié soutient les 25 pouces d'air dilaté; or si cet air n'étoit pas dilaté, il soutiendrait tout seul le poids de l'atmosphère, donc son ressort après la dilatation est à son ressort avant la dilatation comme la moitié du poids de l'atmosphère est au poids entier, & par conséquent réciproquement comme le volume 12 $\frac{1}{2}$ avant la dilatation au volume 25 après la dilatation; mais les ressorts sont comme les densités & les densités comme les compressions, donc la compression de l'air dilaté est à la compression de l'air non dilaté comme le poids que souffre l'air dilaté est au poids que l'air non dilaté souffriroit.

Que si vous faites une seconde expérience en ne mettant que 16 pouces de mercure pour laisser 24 ^{pouces} d'air, vous trouverez en faisant comme il a été dit, que le mercure descendra jusqu'à la hauteur de 7 pouces au-dessus de la surface du mercure du vase, ainsi à cause du pouce enfoncé dans le mercure, il y aura dans le tuyau 32 pouces d'air dilaté; or les sept pouces de

dans les plus basses ; car comme l'atmosphère pèse moins dans les parties les plus élevées, le mercure monte aussi moins dans le Barometre.

PROPOSITION V.

38. Si un tuyau AC (Fig. 1.) dont l'ouverture A est bien fermée ; est plongé perpendiculairement dans un vase plein d'eau ou d'une autre liqueur, plus il est enfoncé, & plus l'air qu'il contient se trouve comprimé.

DEMONSTRATION.

L'air contenu dans le tuyau AC est en équilibre avec le poids de l'atmosphère, c'est-à-dire avec une colonne d'air de même base que la sienne, de même hauteur que l'atmosphère ; or quand l'eau du vase surmonte extérieurement l'ouverture C, l'air du tuyau est chargé non-seulement du poids de l'atmosphère, mais encore d'une colonne d'eau de même base que celle du tuyau, & dont la hauteur est égale à la quantité dont l'eau extérieure surmonte l'orifice, donc il faut nécessairement que cet air se comprime, & qu'une partie de l'eau du vase entre dans le tuyau.

COROLLAIRE I.

39. Le ressort de l'air comprimé est égal au poids de l'atmosphère plus au poids de la colonne d'eau de même base qui surmonte le niveau de l'eau qui est entrée dans le tuyau, ce qui est évident, puisque le ressort est toujours égal à la force qui le comprime.

Et si on ajoute de part & d'autre le poids de l'eau qui est entrée dans le tuyau, le ressort de l'air comprimé plus le poids de l'air entré dans le tuyau est égal au poids de l'atmosphère, plus le poids de la colonne de même base que le tuyau & qui surmonte le niveau de l'ouverture C.

COROLLAIRE. II.

40. Connoissant la capacité d'un tuyau ou le volume de l'air qu'il contient, la pesanteur de la colonne d'eau de même base qui surmonte son ouverture inférieure, & le poids de l'atmosphère, on connoîtra le volume de l'air comprimé & celui du fluide qui est entré dans le tuyau en cette sorte.

Je nomme le poids de la colonne d'eau extérieure qui surmonte

Bb b b ij

le niveau de la base du tuyau $= g$, son volume $= c$, le poids de l'atmosphère $= a$ lequel est égal au ressort de l'air primitif du tuyau, le volume de cet air primitif $= b$, & le volume du fluide entré dans le tuyau $= x$; donc le volume de l'air comprimé $= b - x$.

Or le ressort de l'air primitif est au ressort de l'air comprimé réciproquement comme le volume de l'air comprimé est au volume de l'air primitif; donc $b - x, b :: a, \frac{ab}{b-x} =$ ressort de l'air comprimé; d'autre part le fluide qui est entré dans le tuyau étant homogène au fluide extérieur, le volume c est au volume x comme la pesanteur g est à la pesanteur de l'eau entrée dans le tuyau; donc $c, x :: g, \frac{gx}{c} =$ pesanteur de l'eau entrée dans le tuyau; ainsi par le Corollaire précédent, j'ai $\frac{ab}{b-x} + \frac{gx}{c} = a + g$, & en réduisant tout au même dénominateur commun $bc - cx$, je trouve $abc + gbx - gx^2 = abc + bgc - acx - gcx$, d'où je tire en transposant à l'ordinaire $gx^2 - acx - gcx - gbx = -bgc$, & divisant par g , je trouve $x^2 - cx - bx - \frac{acx}{g} = -bc$, & faisant $c + b + \frac{ac}{g} = d$, j'ai $x^2 - dx = -bc$; j'ajoute de part & d'autre le carré $\frac{1}{4}dd$ de la moitié du coefficient d du second terme, & j'ai $x^2 - dx + \frac{1}{4}dd = \frac{1}{4}dd - bc$, & tirant la racine quarrée, j'ai $\frac{1}{2}d - x = \sqrt{\frac{1}{4}dd - bc}$, & $x = \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd - bc}$.



CHAPITRE IV.

*De la Raréfaction & Condensation de l'Air,
& de sa Densité.*

PROPOSITION VI.

41. **L** *A chaleur augmente le ressort de l'Air.*

DEMONSTRATION.

Si l'on presente au feu une vessie de Porc médiocrement enflée, & dont l'air ne puisse sortir, on trouve qu'elle s'enfle de plus en plus ; donc l'air qui y est renfermé presse plus l'air extérieur qu'il ne faisoit auparavant, or l'air ne presse que par son ressort ; donc le ressort est augmenté par la chaleur.

COROLLAIRE.

42. Si l'on retire la vessie d'auprès du feu, elle reprend peu à peu son premier état ; donc le ressort de l'air s'affoiblit, & par conséquent le froid diminue le ressort.

PROPOSITION VII.

43. *Faire entrer une liqueur dans un vase dont l'ouverture est extrêmement petite.*

SOLUTION.

Tenez le vase fort près du feu pendant un certain tems, plongez ensuite son ouverture dans la liqueur, & vous trouverez que cette liqueur entrera facilement dans la capacité du vase.

DEMONSTRATION.

Tandis que le vase est près du feu, l'air qu'il contient se raréfie, & il en sort d'autant plus par son ouverture, qu'on le laisse échauffer plus long-tems ; or quand on le plonge dans la liqueur, le ressort de l'air diminue, & comme cet air a moins de masse qu'il n'avoit auparavant, le froid lui fait prendre un volume moindre

qu'il n'avoit avant qu'on présentât le vase au feu, de sorte que cet air n'étant plus en équilibre avec le poids de l'atmosphère, l'eau qui est pressée par ce poids entre dans la capacité du vase où elle trouve moins de résistance.

PROPOSITION VIII.

44. Soit un globe de verre AB (Fig. 4.) ayant à son ouverture B un tube BC bien soudé ; qu'on verse de l'eau par le tube en laissant une certaine quantité d'air, qu'on bouche ensuite l'ouverture C avec le doigt, & qu'on plonge le tube dans un vase EF plein d'eau, si l'on vient à déboucher l'ouverture C, l'eau descendra jusqu'à ce qu'elle soit à une certaine hauteur HD ; or je dis que si l'air extérieur devient plus froid ou plus pesant, l'eau montera plus haut, & que si au contraire l'air extérieur devient plus chaud ou moins pesant, l'eau descendra plus bas.

DEMONSTRATION.

En premier lieu, si l'air extérieur devient plus froid, la froidure se communique au verre & à l'air intérieur ; donc l'air intérieur se condense & son ressort se diminue, donc aussi cet air cede à l'impression que l'air extérieur fait sur l'eau pour l'obliger de monter.

En second lieu, si l'air extérieur devient plus pesant, la force avec laquelle il presse devient aussi plus grande, & l'air intérieur dont nous supposons que la force n'est point augmentée doit nécessairement ceder.

En troisième lieu, si l'air extérieur devient plus chaud, la chaleur se communique à l'air intérieur par le moyen du verre qu'elle chauffe ; donc l'air intérieur se dilate, & son ressort devenant plus fort, il oblige l'eau de descendre, & il ne faut pas dire que l'air extérieur étant aussi dilaté par la chaleur devroit empêcher l'eau de descendre ; car quoiqu'il soit vrai que l'air extérieur se dilate, & que son ressort augmente, ce ressort ne porte pas directement sur l'eau de même que celui de l'air intérieur auquel le verre résiste de tous côtés, mais il s'étend vers les colonnes laterales, de façon qu'au lieu de presser davantage l'eau qui lui est inférieure, il la presse moins, puisqu'il la presse avec une moindre masse.

En quatrième lieu, si l'air extérieur devient plus léger, l'eau descend encore, car à mesure que l'air extérieur devient plus

leger, l'air intérieur qui ne change point selon l'hypothèse, devient plus pesant par rapport à l'air extérieur qu'il n'étoit auparavant, & par conséquent l'équilibre doit se rompre, & l'air intérieur doit l'emporter sur l'extérieur.

COROLLAIRE I.

45. Si l'on ne fait attention qu'à la nature de l'air qui est un corps à ressort, il est naturel de dire que les densités de l'air inférieur doivent être proportionnelles à leur compressions ou aux poids qui le compriment, à moins que ces compressions ne fussent plus grandes ou moindres que la force du ressort, mais comme le ressort de cet air peut être diminué ou augmenté par le froid ou par le chaud, ou par quelqu'autre cause on doit dire que les densités de l'air extérieur ne sont pas toujours proportionnelles aux poids qui compriment cet air.

COROLLAIRE II.

46. Si l'air inférieur devient plus dense, les poids des corps graves qui sont dans cet air diminuent par la raison que les corps pesans perdent plus de leur poids dans les liqueurs qui ont plus de pesanteur spécifique ou de densité, que dans les liqueurs qui en ont moins, & si l'air inférieur devient moins dense, les corps graves qui sont dans cet air deviennent plus pesans.

COROLLAIRE III.

47. Si deux corps de différentes pesanteurs spécifiques sont en équilibre dans un air moins dense, & que l'air devienne tout-à-coup plus dense, ils cesseront d'être en équilibre, car chacun de ces corps ayant encore plus de pesanteur spécifique que cet air plus dense, ils perdront l'un & l'autre une partie de leur poids égale au poids du volume d'air dont ils occupent la place, ainsi qu'il a été dit dans l'*Hydrostatique*; or le corps qui a plus de pesanteur spécifique que celui avec qui il étoit en équilibre, a nécessairement moins de volume, car quand les poids sont égaux, les pesanteurs spécifiques sont réciproquement comme les volumes; donc le poids qui a plus de pesanteur spécifique occupe dans l'air plus dense une place moindre que l'autre, & par conséquent il perd moins de son poids; ainsi l'équilibre doit se rompre & le corps de moindre volume doit l'emporter sur l'autre.

Le contraire arriveroit si les deux corps étant en équilibre

dans un air d'une certaine densité , cet air commençoit à devenir moins dense ; car le corps qui a plus de pesanteur spécifique ne gagneroit qu'un poids proportionnel au volume d'air plus dense dont il occupoit la place , & comme l'autre gagneroit aussi un poids proportionnel au volume du même air dont il occupoit la place , & que ce volume seroit plus grand , il s'ensuit que le corps qui a moins de pesanteur spécifique gagneroit aussi plus de poids.

Au reste , quand nous disons ici que les deux corps sont en équilibre , il faut entendre qu'ils sont mis dans les ballins d'une balance dont les deux bras sont égaux , afin que l'égalité des poids ne vienne que de leur pesanteur absolue , & non pas de ce que l'on pourroit gagner sur l'autre par la plus grande longueur de son bras.

CHAPITRE V.

Du mouvement de l'Air.

48. **P**AR le mouvement de l'air nous entendons ici le mouvement sensible de l'air , à qui nous avons donné le nom de *vent*.

Il n'est guères de Philosophe qui n'ait tâché de découvrir l'origine & les causes des vents. Aristote & la plupart des Anciens ont cru que les vents procédoient des exhalaisons de la terre , lesquelles se réfléchissent après s'être élevées jusqu'à la moyenne region de l'air. M. Descartes a pensé que les vents pourroient être causés tantôt par les nuées , qui étant sur le point de se résoudre en pluie tombent les unes sur les autres , & tantôt par les dilatations des vapeurs , lesquelles sont beaucoup plus grandes à proportion que les dilatations de l'air ; ces opinions ont été solidement refutées par M. Mariotte dans son traité du *Mouvement des Eaux* , où il nous donne sur cette matiere des conjectures qui paroissent beaucoup plus conformes à la nature du sujet.

Selon cet illustre Académicien il y a trois causes principales des vents & quelques autres particulieres & moins importantes , les trois principales sont 1°. Le mouvement de la terre de l'Occident à l'Orient. 2°. Les vicissitudes des rarefactions & des condensations

densations de l'air , selon que le soleil l'échauffe ou cesse de l'échauffer. 3°. Les vicissitudes des élévations de la Lune vers son apogée , & de ses descentes vers son perigée. Les causes particulières sont 1°. Quelques élévations extraordinaires d'exhalaisons & de vapeurs en certains lieux de la terre ; 2°. La chute des grosses pluies ou de quelques grêles épaisses. 3°. Les éruptions de quantité d'exhalaisons sulphurées & salpêtrées dans les tremblemens de terre. 4°. Les soudaines fontes des neiges dans les hautes montagnes. Par ces causes tant générales que particulières combinées de plusieurs façons , l'Auteur explique tous les vents avec beaucoup de savoir & d'érudition , comme on peut voir dans l'ouvrage cité.

Comme nous ne nous attachons dans cet Ouvrage qu'à ce qui regarde la mécanique , nous ne nous arrêterons aussi qu'à la seconde cause principale , c'est-à-dire aux vicissitudes des rarefactions & des condensations de l'air de quelques causes qu'elles puissent provenir.

PROPOSITION IX.

49. *Si le ressort de l'air devient plus foible en quelque endroit , le ressort des parties voisines se debandera de ce côté , & il se formera du vent.*

DEMONSTRATION.

L'air étant un fluide qui par son ressort tend à s'étendre de toutes parts , il est visible que si quelqu'une de ces parties vient à s'affoiblir , & par conséquent à se condenser , le ressort des parties voisines doit agir de ce côté & former un flux qui remplisse l'espace que la partie condensée a laissé ; donc si sur quelque partie de la surface de la terre l'air vient à se condenser , l'air des parties voisines se repandra de ce côté & formera un vent plus ou moins sensible , selon que la condensation sera plus ou moins grande , ou qu'elle se sera faite plus ou moins rapidement.

COROLLAIRE I.

50. Si sur quelque partie de la surface de la terre le poids de l'atmosphère est moins grand que dans les parties voisines , l'air inférieur des parties voisines se trouvant plus comprimé a aussi plus de ressort , donc il doit se repandre du côté où l'air inférieur

Cccc

en a moins, & par conséquent il se fera du vent sur cette partie de la terre.

COROLLAIRE II.

§ 1. L'air plus dense ayant plus de poids que l'air moins dense, il s'ensuit que s'il se trouve quelque endroit où l'air soit plus léger que sur les endroits voisins, le vent doit souffler de ce côté.

COROLLAIRE III.

§ 2. Si une portion d'air vient à être échauffée par le soleil ou par quelqu'autre cause, son ressort s'augmente & s'étend sur les parties voisines, & par conséquent le vent doit souffler vers ces parties; mais si ce même air après avoir été échauffé vient à se refroidir, son ressort s'affaïsse, & les parties voisines reprenant le dessus, le vent souffle sur l'air qui se condense.

PROPOSITION X.

§ 3. Connoissant l'espace qu'un fluide poussé par la force de l'air parcourt dans un certain tems en montant dans un tube vuide d'air, sachant aussi le rapport de la pesanteur spécifique du fluide à la pesanteur spécifique de l'air, connoître l'espace que l'air poussé avec la même force parcourroit dans le même tems.

SOLUTION.

Soit un tube AC (Fig. 1.) dont l'extrémité A est exactement bouchée, & ayant à l'autre extrémité C un robinet, si on en tire tout l'air qui y est contenu, & qu'ayant fermé le robinet on plonge l'extrémité C dans le vase DE plein d'eau en tenant le tube vertical, & qu'on ouvre le robinet, le poids de l'air extérieur fera monter l'eau dans le tube, & il sera facile d'examiner l'espace que cette eau aura parcouru dans un certain tems, cela posé.

Je nomme la hauteur à laquelle l'eau sera montée dans un certain tems $= s$, le rapport de la pesanteur spécifique de l'eau à la pesanteur spécifique de l'air $= b$, c , la hauteur totale à laquelle l'eau doit monter pour être en équilibre avec le poids de l'atmosphère $= a$. Je suppose pour un moment que l'air qui monteroit dans ce même tube soit un fluide sans ressort, il est sûr par les principes de l'Hydrostatique (Livre 2 Proposition 5), que ce fluide sans ressort étant dans le vase à la place de l'eau, la hauteur

totale à laquelle le poids de l'atmosphère le feroit monter dans le tube, seroit à la hauteur totale à laquelle l'eau pressée par le même poids s'élève, reciproquement comme la pesanteur spécifique de l'eau à la pesanteur spécifique de ce fluide, laquelle n'est autre chose que la pesanteur spécifique de l'air, car le ressort n'augmente ni ne diminue rien de sa pesanteur; nommant donc y la hauteur totale à laquelle l'air sans ressort monteroit dans le tube, & x l'espace que l'air devoit parcourir dans le même tems que l'eau parcourt l'espace s nous aurons $c, b :: a, y$ donc $y = \frac{ab}{c}$; or les vitesses des corps qui montent sont comme les racines des hauteurs, donc la vitesse avec laquelle l'eau s'élèveroit à sa hauteur totale est à la vitesse avec laquelle l'air sans ressort s'élèveroit à sa hauteur totale, comme $\sqrt{a}, \sqrt{\frac{ab}{c}}$; or les espace s, x , étant parcourus dans des tems égaux par la supposition, sont entr'eux comme les vitesses, donc $\sqrt{a}, \sqrt{\frac{ab}{c}} :: s, x$, ou $\sqrt{ac}, \sqrt{ba} :: s, x$; d'où je tire $ac, ba :: s^2, x^2$, & $c, b :: s^2, x^2$, c'est-à-dire, la pesanteur spécifique de l'air est à la pesanteur spécifique de l'eau, reciproquement, comme le quarré de l'espace parcouru par l'eau est au quarré de l'espace que l'air parcourroit dans le même tems.

Supposant donc que la pesanteur spécifique de l'eau soit à celle de l'air comme 970 à 1, ainsi que quelques Auteurs disent l'avoir trouvé, & que l'eau dans une minute ait parcouru deux pieds, nous aurons $1, 970 :: 4, \frac{12}{100}$ pour le quarré de l'espace que l'air auroit parcouru dans le même tems en entrant dans le tube vuide, & tirant la racine quarrée par approximation, nous aurons $\frac{6,1}{100} = 62$ pieds $\frac{22}{100}$.

PROPOSITION XI.

54. Connoissant la hauteur totale à laquelle un fluide est élevé dans un tube vuide par le poids de l'atmosphère, & l'espace qu'un corps grave parcourt dans une seconde en tombant, connoître l'espace que le fluide parcourroit dans la même seconde avec une vitesse uniforme égale à celle que lui donne le poids de l'atmosphère.

SOLUTION.

Je nomme a la hauteur totale du fluide, b une seconde, & x l'espace cherché, un corps grave à la fin de sa chute à une vi-

Cccc ij

tesse acquise qui le fait remonter à la même hauteur dont il est tombé, donc la force de l'air qui fait monter le fluide à la hauteur donnée est égale à la force qu'un corps grave quelconque auroit acquise s'il étoit tombé de la même hauteur; or la vitesse acquise à la fin de la chute est égale à une vitesse uniforme qui feroit parcourir au corps un espace double dans le même tems, donc cette espace double seroit $= 2a$; mais le tems que le corps grave emploieroit à remonter l'espace a avec sa vitesse acquise est à une seconde $= b$, comme la racine de l'espace a est à la racine de l'espace qu'il parcourroit en tombant pendant cette seconde; nommant donc ce dernier espace c , nous aurons \sqrt{c} ,

$\sqrt{a} :: b, \frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt{c}} =$ tems que le corps emploieroit à parcourir l'espace a , supposant donc que le mouvement soit uniforme, nous aurons $\frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt{c}}, b :: 2a, x$, donc $2ab = x \frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt{c}}$, d'où je tire $4a^2b^2 = \frac{x^2 ab^2}{c}$ ou $4ac = x^2$ qui se réduit à $2a, x :: x, 2c$, c'est-à-dire,

l'espace que le fluide parcourroit dans une seconde d'un mouvement uniforme avec une vitesse égale à celle que lui donne le poids de l'atmosphère, est moyen proportionnel entre le double de sa hauteur totale & le double de l'espace qu'un corps grave parcourroit en tombant pendant la même seconde.

Par exemple, nous savons que l'eau s'élève jusqu'à 32 pieds, nous savons aussi qu'un corps pesant parcourt en tombant dans une seconde 15 pieds 1 ponce, donc nous avons $a = 32$ pieds, & $c = 15$ pieds $\frac{1}{2}$, donc $2a = 64$, & $2c = 30$ pieds $\frac{1}{2}$, & multipliant 64 par 30 $\frac{1}{2}$, nous aurons 1930 $\frac{1}{2}$, dont la racine quarrée est à peu près $\frac{44}{1} = 44$ pieds.

PROPOSITION XII.

55. Connoissant la hauteur à laquelle le poids de l'atmosphère fait monter une liqueur dans un tube vuide, connoître l'espace que l'air poussé avec la même force devroit parcourir dans une seconde dans un milieu non résilant.

SOLUTION.

Cherchez par la Proposition précédente l'espace que le fluide devroit parcourir dans une seconde d'un mouvement uniforme & avec une vitesse égale à celle que lui donne le poids de

l'atmosphere ; & par la Proposition 10 cherchez l'espace que l'air devroit parcourir dans le même tube pendant cette seconde.

Par exemple, l'espace que l'eau parcourroit dans une minute est 44 pieds, comme nous avons vû dans la Proposition précédente ; or par la Proposition 10 la pesanteur spécifique de l'air est à celle de l'eau reciproquement, comme le quarré de l'espace 44 est au quarré de l'espace que l'air doit parcourir ; or le rapport des pesanteurs spécifiques est 1, 970, donc $1, 970 :: 1936, 1877920$, & tirant la racine quarrée du dernier terme, j'ai 1370 pieds pour l'espace que l'air parcourroit dans une minute.

COROLLAIRE I.

56. Connoissant la différence des poids de l'atmosphere dans deux endroits différens, mais contigus, on pourra connoître l'espace que l'air plus pesant parcourra dans une minute en passant du côté du moins pesant en cette sorte.

Supposons que l'air moins pesant soutienne 31 pieds d'eau, & le plus pesant 32, la différence des poids de l'atmosphere est donc 1, ainsi l'air plus pesant passe dans le moins pesant de même qu'il monteroit dans le vuide avec un de force ; supposant donc que le poids de l'atmosphere ne puisse faire monter l'eau qu'à un pied, je cherche par la Proposition 11 l'espace que l'eau parcourroit dans une seconde avec une vitesse uniforme & égale à celle que lui donneroit le poids de cet atmosphere ; or j'ai trouvé dans cette Proposition 24, $x :: x, 2x$, donc $2 \times 1, x :: x, 30$ pieds $\frac{1}{2}$, & 60 pieds $\frac{1}{2} = xx$, ou $60 \frac{1}{2} = xx$, ou enfin $\frac{144}{9} = xx$, & tirant la racine quarrée, j'ai $x = \sqrt{\frac{144}{9}} = 8$, à peu près ; je cherche par la Proposition 10 l'espace que l'air doit parcourir dans le même tems dans le vuide, & par la regle de cette Proposition, j'ai $1, 970 :: 64, 62080$, & tirant la racine quarrée du quatrième terme, j'ai 249 pieds que l'air plus pesant parcourroit dans une minute en se rejettant sur le moins pesant, & ainsi des autres.

COROLLAIRE. II.

57. Connoissant la hauteur à laquelle un poids d'atmosphere comprimé d'une certaine façon fait monter une liqueur, on peut connoître aisément la hauteur à laquelle l'air fera monter la même liqueur lorsqu'il sera comprimé, car les effets sont proportionnels aux causes ; c'est pourquoi si le même air vient à se

dilater, on pourra aussi connoître la vitesse avec laquelle le ressort de cet air agit de tous côtés.

PROPOSITION XIII.

58. Connoissant l'espace que l'air parcourt dans une seconde, connoître la pression qui peut produire la vitesse de cet air.

SOLUTION.

Si cet air faisoit monter une liqueur dans un tube, le quarré de l'espace que cette liqueur parcourroit dans une seconde feroit au quarré de l'espace que l'air parcourt dans une même seconde, reciproquement comme la pesanteur spécifique de l'air est à celle du fluide (N. 49); nommant donc le rapport des pesanteurs spécifiques de l'air & de la liqueur $= c, b$, & l'espace que l'air parcourt $= a$, j'ai $b, c :: a^2, \frac{a^2 c}{b}$; or par la Proposition 11, nommant x la hauteur à laquelle l'eau peut être élevée dans un tube, & d l'espace qu'un corps grave parcourroit en tombant dans une seconde, j'ai $2x, \frac{\sqrt{a^2 c}}{\sqrt{b}} :: \frac{\sqrt{d^2 c}}{\sqrt{b}}, 2d$, donc $4dx = \frac{a^2 c}{b}$ ou $4b dx = a^2 c$, d'où je tire $x, a :: ac, 4bd$, c'est-à-dire la hauteur à laquelle l'air peut élever un fluide avec la même force dont il est pressé pour parcourir un espace dans une seconde, est à cet espace en raison composée de la raison de la pesanteur spécifique de l'air à celle du fluide, & de la raison de l'espace parcouru par l'air à quatre fois l'espace qu'un corps grave parcourroit en tombant dans une seconde.



CHAPITRE VI.

Des Instrumens qui servent à connoître & à mesurer les différentes pesanteurs de l'Air, ses différentes densités, & ses différens degrés de chaleur & de froideur.

DU BAROMETRE.

59. **L**E Barometre, comme tout le monde sçait, est un tube assez semblable au tube AC Figure 1, dont le sommet A est fermé hermetiquement; on le remplit entièrement de mercure, après quoi bouchant exactement l'ouverture C avec le doigt, on plonge ce bout C dans un vase spherique plein aussi de mercure, & debouchant l'ouverture on attache le vase au tube & l'on met le tout ensemble sur une planche que l'on tient verticale, marquant à côté du tube les différentes hauteurs auxquelles l'ouverture s'élève selon les différens poids de l'atmosphère.

Cet instrument sert à connoître les différentes pesanteurs de l'atmosphère dans un même lieu ou en différens lieux, car comme on a éprouvé que le poids de l'atmosphère dans les parties les plus basses de la surface de la terre, soutient ordinairement 28 pouces de mercure, il est visible que si dans certains tems le mercure s'élève au-dessus de 28 pouces ou se met au-dessous, la pesanteur de l'atmosphère doit augmenter ou diminuer à proportion.

Le Vent de Nord & de Nord-Est condensent l'air, non seulement par leur froideur, mais parce qu'en soufflant contre la terre de haut en bas, ils pressent l'air supérieur sur l'air inférieur, donc le mercure doit alors s'élever dans le Barometre, & comme ces deux vents amènent ordinairement le beau tems, on peut juger par cette élévation que le beau tems doit regner.

Que si lorsque le Nord ou le Nord-Est ont soufflé pendant quelques jours, le Barometre commence à baisser peu à peu quoique le beau tems continue, c'est que ces vents amènent peu à peu des vapeurs, & que l'air trop pressé venant à s'étendre vers le Sud-Ouest perd peu à peu de son ressort & devient moins pesant.

Le vent de Sud & de Sud-Ouest soufflent de bas en haut, & soulevent l'air supérieur, donc l'atmosphère devient moins pesante, & le mercure baisse dans le Barometre; or en ce cas si le vent continue de même, ou s'il tourne vers le Nord en passant par l'Ouest; c'est ordinairement un signe de pluie, mais s'il tourne vers le Nord en passant par l'Est, c'est signe que le beau tems doit reprendre le dessus.

Quand le ressort de l'air ne peut plus soutenir les vapeurs, il se forme des nuées par la chute des vapeurs plus élevées sur celles qui le sont moins, & ces nuées se reduisent en pluie; l'air est donc moins pesant dans ce tems-là que dans le beau tems puisqu'il a moins de ressort, par conséquent le Barometre doit baisser, & par ce baissment on peut pronostiquer la pluie.

M. Mariotte dans ses Essais de Physique à prétendu pouvoir déterminer la hauteur de l'atmosphère par les différentes hauteurs du Barometre, selon qu'on l'éleve plus haut; voici quel est son raisonnement. Supposons que le Barometre soit d'abord dans un endroit où le mercure est à 28 pouces, si on vient à l'élever 60 pieds au-dessus de cet endroit, on trouve que le Barometre baisse d'une ligne; divisons l'atmosphère en 4032 divisions horizontales toutes d'un même poids, ou d'une même quantité de matière, mais diversement dilatées selon leurs différentes élévations, ce nombre de divisions sera égal à la hauteur 28 pouces du Barometre dans la plus basse division reduite en lignes & en douzième de lignes, car 28 multiplié par 12 fait 336, & ce produit multiplié encore par 12 donne 4032, ainsi il y aura un douzième de ligne pour chaque division, c'est-à-dire à mesure que le Barometre passera d'une division à l'autre en montant, le mercure baissera d'un douzième de ligne; maintenant puisqu'en élevant le Barometre à la hauteur de 60 pieds, la différence est une ligne, il s'ensuit que la plus basse division doit être de 5 pieds qui est le douzième de 60, & qu'en tenant le Barometre à la hauteur de 5 pieds le mercure ne baissera que de $\frac{1}{12}$ de lignes, & comme à la moitié du poids de l'atmosphère, c'est-à-dire à la 2016^e division l'air doit être moins pesant de la moitié, il est évident que la 2016^e aura 10 pieds de hauteur & toutes les autres divisions comprises entre la plus basse & la 2016^e iront en augmentant proportionnellement; or cette progression géométrique ne pouvant être que très-peu différente de la progression arithmétique, si nous la supposons arithmétique nous aurons la somme de cette progression
en

en ajoutant le premier terme 5 au dernier 10, ce qui fait 15, & multipliant la somme 15 par la moitié 1008 du nombre des termes 2016, ce qui donnera 15 120 pieds, pour l'étendue ou la hauteur de l'air depuis la premiere division jusqu'à la 2016^e, & 14 pouces de mercure dans le Barometre seront en équilibre avec cette étendue.

Prenons la moitié 1008 de 2016 divisions restantes, la plus haute de ces 1008 étant moins chargée de la moitié que la plus haute des 2016 précédentes, son étendue sera par conséquent de 20 pieds; & pour trouver celles qui sont comprises entre deux, nous n'avons qu'à ajouter le premier terme 10 au dernier terme 20, & multiplier la somme 30 par la moitié 504 du nombre des termes, ce qui donne encore 15 120 pieds pour l'étendue de ces 1008 divisions, & continuant à prendre la moitié 504 des 1008 divisions, puis la moitié de 252 des 504 restantes, & de même la moitié 126 des 252 restantes, &c. on trouvera pour chacune de ces progressions 15 120, & comme il est aisé de voir qu'il y en aura 12, il y aura par conséquent 12 fois 15 120 pieds pour toute la hauteur de l'atmosphère; or 12 fois 15 120, font 181 440 pieds, lesquels divisés par 5, à cause qu'un pas geometrique vaut 5 pieds, donnent 36288 pas geometriques, & divisant encore par 2400 à cause que la lieue moyenne de France vaut 2400 pas geometriques, le quotient qui est un peu plus de 15 lieues sera la hauteur totale de l'atmosphère.

Que si on veut, ajoute M. Mariotte, que l'air étant rarefié 4032 fois plus, n'a pas encore son étendue naturelle, & qu'on veuille que la plus haute division soit deux fois plus dilatée que nous ne l'avons supposée, c'est-à-dire qu'au lieu d'être 4032 fois plus dilatée que la plus basse division de l'air inférieur, elle soit 8064 fois plus dilatée, alors il y aura un terme de plus dans les moitiés des moitiés que nous avons pris ci-dessus, & par conséquent il y aura 15 120 pieds d'étendue, ce qui ne va qu'autour de cinq quarts de lieue de plus, & continuant à dilater davantage la plus haute division, M. Mariotte trouve par le même raisonnement que quand même la dernière division seroit huit millions de fois plus dilatées que la premiere division, la hauteur de l'atmosphère n'iroit tout au plus qu'à 30 lieues.

Or ce raisonnement de M. Mariotte 1^o ne détermine rien; puisqu'il est toujours permis de supposer la dernière couche dilatée de plus en plus, pourvu que ce ne soit pas à l'infini; car

Dddd

on ſçait qu'une pareille dilatation ne ſçauroit être. 2°. Il ſuppoſe que le reſſort de l'air peut être comprimé ou dilaté ſans bornes, ce qui ne ſçauroit être, car le reſſort ayant une force finie, il y a un certain degré de compression au-delà duquel il ne peut être comprimé, & un certain degré de détente ou de relâchement au-delà duquel il ne paſſe point ; or quoiqu'il ne paroiſſe pas que l'air ſoit jamais comprimé au dernier point, car ſi cela arrivoit, tout ce qui a vie dans cet air cœſſeroit de reſpirer par ſon défaut de fluidité, il nous paroît au contraire que le reſſort de cet air en s'éloignant de la ſurface de la terre ne ſe détendre à un tel point qu'il ne puille plus être relâché, & comme ce relâchement ne vient que parce que ce reſſort eſt plus fort que le poids de l'air ſupérieur qui le comprime, pourquoi ne pourroit-on pas dire que cet air ſupérieur devient de plus en plus ſi léger, qu'il n'agit plus ſur le reſſort, quoique ce reſſort ne ſe dilate pas davantage, à cauſe qu'il eſt au dernier point de dilatation où il peut parvenir.

Il ne faut donc compter ſur le principe des denſités de l'air proportionnelle aux poids dont il eſt chargé que dans les lieux voifins des parties les plus baſſes de la ſurface de la terre, au nombre deſquels je mets les ſommets des plus hautes montagnes à cauſe que la hauteur de ces montagnes, quelque grande qu'elle nous paroiſſe, n'eſt peut-être rien ou du moins peu de choſe à l'égard de la hauteur de l'atmoſphere. On peut donc en employant le principe de M. Mariotte, connoître de combien le ſommet d'une montagne eſt plus élevé que la plaine qui ſe trouve au bas. Suppoſons, par exemple, que dans la plaine le Barometre monte à 28 pouces, & qu'au ſommet de la montagne il ſoit deſcendu de 8 lignes, je réduis les 28 pouces en lignes, ce qui fait 336, & comme par l'expérience cité ci-deſſus, 60 pieds de hauteur ſont baiſſer d'une ſeule ligne, je conçois que la maſſe de l'atmoſphere eſt diviſée en 336 diviſions d'inégale denſité à proportion de leur hauteur, mais dont chacune peſe également une ligne de mercure, & par conſéquent la plus baſſe aura 60 pieds d'étendue ; or la diviſion qui ſera à la moitié du poids de l'atmoſphere, c'eſt-à-dire la 168 partie étant moins preſſée de la moitié, aura 120 pieds d'étendue, & les diviſions entre celle-ci & la plus baſſe, augmenteront en progreſſion arithmétique ; donc pour trouver leur différence, je retranche de la plus haute 168, la double 120 de la plus baſſe, & le reſte 48

est la différence de la progression multipliée par le nombre des termes moins un, selon les regles de ces sortes de progression, mais le nombre des termes est 168; retranchant donc 1 de 168, je divise 48 par 167, & le quotient $\frac{48}{167}$ est la différence de la progression. Maintenant depuis la plaine jusqu'au haut de la montagne, il y a huit lignes de différence; donc il y a huit divisions, c'est-à-dire, il y a une progression de huit termes dont le premier est 60, la différence est $\frac{48}{167}$, & le nombre des termes est 8; pour connoître donc le dernier terme, j'ajoute au premier 60 la différence multipliée par le nombre des termes moins un, c'est-à-dire par 7, ce qui donne $62 \frac{3}{167}$ pour le dernier terme. e, j'ajoute le premier terme au dernier, ce qui fait $122 \frac{3}{167}$, ou 122 en négligeant la fraction à cause de sa petitesse, & multipliant la somme par la moitié 4 du nombre des termes, j'ai 488 pieds pour la hauteur du sommet de la montagne au-dessus de la plaine, & ainsi des autres.

Il faut prendre garde en transposant le Barometre de la plaine au sommet de la montagne, qu'il regne un tems où la différence de la chaleur ou du froid de l'un à l'autre endroit ne soit pas bien grande, ou qu'il ne fasse pas au sommet de la montagne un vent beaucoup plus fort que celui qui souffle au bas; car tout cela peut faire du changement dans le Barometre.

De tous les liquides, le Mercure est celui qui souffre le moins d'alteration de la chaleur & du froid, & c'est pour cette raison qu'on l'a choisi préféablement aux autres pour la construction du Barometre; cependant comme il ne laisse pas que de varier à la presence de l'une ou de l'autre de ces causes, & que les variations qu'il en reçoit ne sont pas proportionnelles à leur degré d'activité, on se tromperoit doublement si l'on s'imaginoit que le Barometre est toujours une mesure certaine de la pesanteur de l'air, & qu'on puisse s'en servir pour connoître les différents degrés de chaleur ou de froid dont il est affecté. M. Amontons a tâché de corriger les défauts du Barometre par rapport à la chaleur & au froid, & l'on peut voir ce qu'il en dit dans les Mémoires de l'Academie des Sciences.

DU MANOMETRE.

60. Le Manometre est un instrument dont on se sert pour connoître les différentes densités de l'air.

Le chaud ou le froid, ou quelque autre cause peuvent alte-

rer les densités de l'air inférieur sans altérer le poids de l'atmosphère ; car si dans le tems que l'air inférieur se dilate par la chaleur, & devient par conséquent moins dense & moins pesant, il arrive que dans une partie plus haute il se fasse une condensation équivalente à la raréfaction de l'air inférieur, le poids de l'atmosphère sera toujours le même, quoique la densité de l'air inférieur soit moindre qu'elle étoit auparavant, & par la même raison le poids de l'atmosphère ne variera point, si dans le même tems que l'air inférieur se condense, il arrive que l'air supérieur se rarefie dans la même proportion, donc le Barometre ne peut servir à marquer les condensations ou les raréfactions de l'air inférieur, & quoique le Thermometre dont nous parlerons bientôt puisse marquer les raréfactions ou condensations causées par le chaud ou le froid, cependant comme il y a d'autres causes qui peuvent contribuer aux différentes densités de l'air, comme les différens poids de l'atmosphère, les vents, les vapeurs, &c. il faut nécessairement se servir de quelqu'autre instrument si l'on veut porter un jugement sûr touchant le rapport de ces densités.

Pour construire un *Manometre*, on prend un vase sphérique de cuivre Q (*Fig. 5.*) dont on fait sortir l'air ; on pese ce vase vuide d'air, & l'on prend une quantité de matiere bien pesante comme du plomb, dont le poids soit égal au poids du vase, on suspend le vase Q, & le poids P aux deux extremités B, A, d'une balance dont le centre du mouvement C soit au-dessus du centre D du joug AB ; enfin on met à l'extrémité du fleau un quart de cercle MLN dont le rayon soit la longueur CL de la languette, & l'instrument est fait.

Supposons que dans le tems qu'on a fait l'instrument, le poids P & le vase Q fussent en équilibre lorsque le joug AB étoit dans une situation horizontale ; si l'air devient plus dense, le poids P devient plus pesant (*N. 45.*), & par conséquent le vase Q doit s'élever. Supposons donc qu'en cet état le centre de gravité commun soit H, ce centre descendra jusqu'à ce qu'il soit dans la ligne verticale Ch qui passe par le centre C de mouvement, & comme il ne sçauroit descendre plus bas, il y aura alors équilibre, & par conséquent le joug de la balance sera dans la position oblique *ab*, or la balance étant dans cette position, la languette est dans la position CT ; ainsi il n'y a qu'à compter les degrés compris dans l'arc TL pour sçavoir de combien l'air est

devenu plus dense ; que si l'air se raréfie peu à peu , & devient moins dense qu'il n'étoit dans le tems même qu'on a construit le Manometre , la balance reprend peu à peu la situation horizontale , & delà elle passe dans une position oblique opposée à la précédente , parce que le vase Q devient plus pesant , ainsi les degrés que la languette marque sur l'arc LN , dénotent de combien l'air est devenu moins dense que lorsque l'instrument a été fait.

Pour être convaincu que le poids P doit être plus ou moins pesant que le vase Q , selon que l'air est plus ou moins dense , il n'y a qu'à faire attention que si l'on mettoit à la place du vase un solide de même volume & de même poids , ce solide auroit moins de pesanteur spécifique que le poids P avec qui il seroit en équilibre ; car ce poids a nécessairement moins de volume que le vase , à cause du vuide que ce vase contient ; or nous avons démontré (N. 45.) que deux poids de différentes pesanteurs spécifiques étant en équilibre dans l'air , perdent leur équilibre si l'air est plus ou moins dense , & que celui qui a plus de pesanteur spécifique devient plus ou moins pesant selon que l'air est plus ou moins dense ; donc le poids Q devient plus ou moins pesant que le solide mis à la place du vase selon le plus ou le moins de densité de l'air , mais le vase fait le même effet que le solide mis à sa place , à cause de l'égalité de poids & de volume ; donc , &c.

DE L'ANEMOMETRE.

61. L'Anemometre est un instrument inventé pour trouver les différens degrés de force que le vent peut avoir.

Pour construire cette machine on prend un aissieu AB (Fig. 6.) auquel on ajoute quatre ailes C , D , E , F , semblables à celles des moulins à vent , & disposées de façon que si l'aissieu étant dans la situation horizontale , comme il doit être , on le coupoit par un plan vertical qui coupât ses côtés à angles droits , les quatre ailes fissent avec ce plan chacune un angle de 54 degrés ; (Nous dirons dans l'Hydraulique pourquoi cet angle doit être préféré à un autre.) autour de l'aissieu on met une vis G qui s'engraine avec les dents d'une roue dentée H ; cette roue a un aissieu saillant HI , lequel à quelque distance de la roue s'enchasse dans une piece de bois ZQ faite de façon que son centre de gravité soit le centre de l'aissieu , à l'extrémité Z du plus long bras de cette piece est un poids Z , & vis-à-vis le centre de l'aissieu de la roue on met un stile attaché à la piece ZQ à laquelle

joint à un tube BC, verser de l'eau par l'ouverture C, en laissant une certaine quantité d'air, puis boucher l'ouverture avec le doigt, & enfoncer cette ouverture dans un vase plein d'eau où l'on déboucheroit l'ouverture ; car, disoit-on, lorsque l'air extérieur deviendra plus chaud, l'air intérieur à qui la chaleur se communiquera, ne manquera pas de se dilater, & par conséquent il obligera l'eau de descendre, & au contraire si l'air intérieur se condense par le froid, il occupera moins de volume, & l'eau montera ; mais on n'avoit pas fait attention qu'il arrive souvent que l'air inférieur étant plus chaud, le poids de l'atmosphère non-seulement ne diminue point, mais que même il augmente, d'où il suit que l'effort que l'air intérieur fait pour se dilater n'étant pas assez fort pour surmonter celui de l'atmosphère, l'eau loin de descendre peut même s'élever plus haut qu'elle n'étoit ; & comme il peut arriver aussi que le poids de l'atmosphère soit plus léger dans des tems où le froid condense l'air inférieur, il s'ensuit encore que dans ces occasions l'eau doit descendre, quoique l'air intérieur dut se condenser.

Pour éviter donc cet inconvénient, Messieurs les Académiciens de Florence eurent recours aux condensations & aux dilations que l'esprit de vin souffre par l'action du froid & du chaud, & composèrent le Thermometre dont on se sert aujourd'hui de la façon que nous allons expliquer.

On prend un long tube AB (Fig. 7.) ayant à son extrémité B un globe creux de verre, on y verse de l'esprit de vin, puis on met le globe dans de l'eau à la glace, & alors l'esprit de vin se condensant par le froid, descend, & l'on observe la hauteur où il reste, laquelle doit être au-dessus de l'entrée B du globe BC; cette hauteur que je suppose être BH, fait connoître le degré le plus bas où l'esprit de vin s'arrête dans le grand froid ; on tire le globe hors de cette eau, & on le plonge dans une autre eau que l'on fait chauffer jusqu'à ce que l'esprit de vin soit prêt à bouillir ; alors on observe la hauteur BT à laquelle la chaleur a fait monter l'esprit de vin, & comme c'est la plus grande où elle puisse s'élever dans les chaleurs de l'été, on ferme le tube hermétiquement en T avant même que l'esprit de vin ait eu le tems de descendre en se refroidissant ; cela fait, on adosse le globe & le tube à une planche, & l'on marque à côté du tube entre H & T plusieurs divisions égales qu'on nomme *dégrés*.

Il est visible que quand le froid augmente, la liqueur se con-

dense de plus en plus, & descend, & qu'au contraire quand la chaleur augmente, la liqueur se dilate à proportion & monte plus haut; cependant il faut observer que quoique ce Thermomètre soit moins imparfait que le précédent, il ne laisse pas qu'il y ait ses défauts. 1°. Quand il fait froid, la liqueur en descendant acquiert une vitesse qui augmente son degré de compression; au contraire quand il fait chaud, la pesanteur de la liqueur s'oppose à l'élevation que sa raréfaction lui donne, & par conséquent elle doit moins monter à proportion qu'elle n'étoit descendue. 2°. Plusieurs expériences ont fait connoître que quand les liqueurs se condensent, il en sort de l'air; donc quand après le froid l'esprit de vin se dilate, l'air qui en étoit sorti par la condensation doit l'empêcher de monter aussi haut qu'il devoit monter; il est vrai que par d'autres expériences que M. Mariotte rapporte dans son Essai sur la Nature de l'air, il arrive que l'air qui est sorti d'une liqueur y rentre, mais comme il s'en faut beaucoup qu'il y rentre aussi vite qu'il en est sorti, il s'ensuit que pendant cet intervalle l'esprit de vin ne s'élève point à la hauteur où il devoit s'élever; ces raisons & d'autres que je ne rapporte point de peur d'être trop long, doivent faire conclure que ce Thermomètre ne peut servir à mesurer exactement les différens degrés de chaleur ou de froid qui regnent dans l'air, & c'est ce qui fait que quelques Auteurs prétendent qu'on doit appeller cet instrument *Thermoscope* plutôt que *Thermomètre*, de même qu'ils donnent le nom de *Baroscope* à ce que nous appelons *Baromètre*, voulant dire par-là que ces deux instruments peuvent bien servir à connoître les variations de l'air, mais non pas à les mesurer.

DE L'HYGROMETRE.

63. L'*Hygromètre* est un instrument dont on se sert pour connoître l'humidité ou la sécheresse de l'air; on en fait de plusieurs façons, entre lesquels ceux qui me paroissent les plus simples & les meilleurs sont les deux suivans.

Attachez une corde de chanvre à un point fixe E (Fig. 7.) disposez plusieurs poulies fixes A, B, C, D, H, de la façon que la figure le montre, faites passer la corde sur toutes ces poulies, & attachez à son extrémité un poids P.

Si l'air devient humide, son humidité gonflera la corde, & par

par conséquent elle en diminuera la longueur ; donc le poids P s'approchera davantage de la poulie H ; & si l'air devient sec , la corde devenant aussi plus sèche , s'étendra davantage , & le poids P s'éloignera de la poulie H ; c'est donc par les différens éloignemens du poids P à la poulie H , qu'on jugera du plus ou du moins d'humidité ou de secheresse de l'air , & il est clair que plus le nombre de poulies sera grand , plus aussi les différentes distances de P à H seront sensibles.

Le défaut de cet hygrometre & de tous ceux qui sont faits avec des cordes , consiste en ce que le poids tenant toujours la corde tendue , les fibres de la corde s'allongent peu à peu de façon qu'un même degré d'humidité dans des tems différens ne la raccourcit pas de la même manière , c'est pourquoi j'aimerais encore mieux l'Hygrometre suivant.

Prenez une balance semblable à celle du Manometre (*Fig. 5.*) ; suspendez en B une éponge au lieu du vase Q , & en A un poids P qui soit en équilibre avec l'éponge ; si l'air devient humide , l'éponge s'imbibera de vapeurs & pesera davantage , mais si l'air devient plus sec qu'il n'étoit , l'éponge deviendra plus legere ; l'équilibre se rompra donc dans l'un & dans l'autre cas , & la languette marquera sur le quart de cercle de combien l'air est plus ou moins humide ou sec qu'il n'étoit , lorsqu'on a fait l'instrument.

Fin du Livre troisième.



Eccc



Fig. 2.

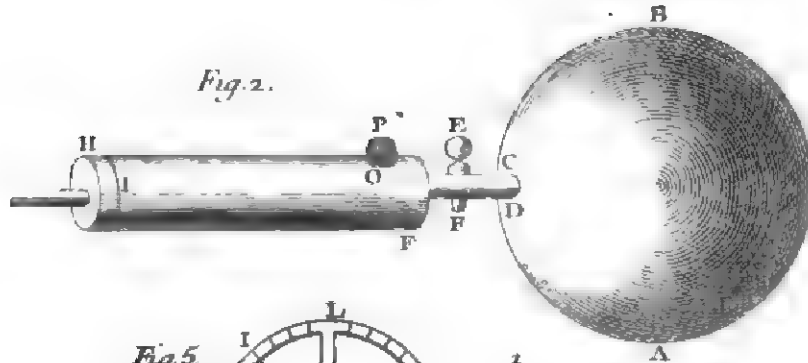


Fig. 5.

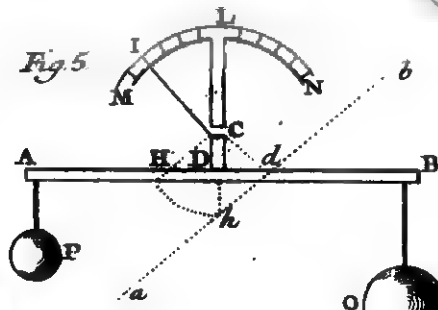


Fig. 6.

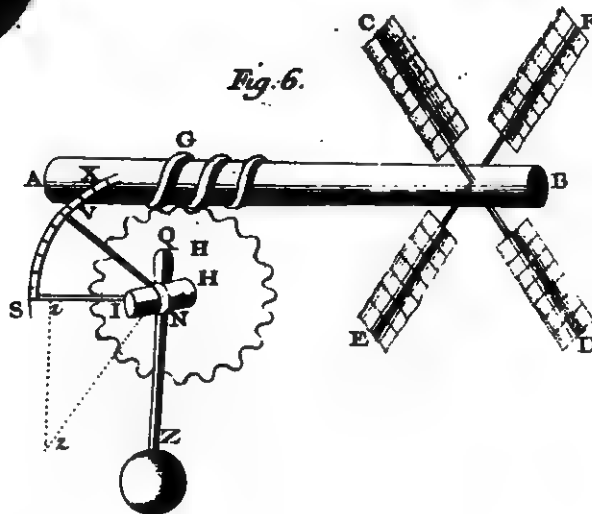
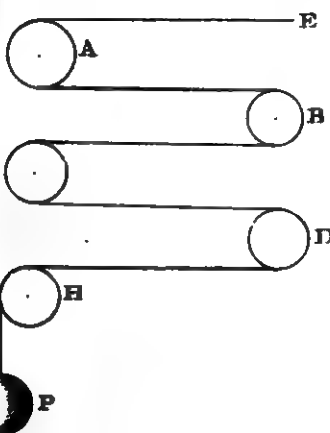


Fig. 7.





Représentation de l'Hydrologie.

LA MECHANIQUE GENERALE.

CONTENANT

LA STATIQUE, L'AIROMETRIE,
L'HYDROSTATIQUE,

ET

L'HYDRAULIQUE, &c.

LIVRE QUATRIEME.

De l'Hydraulique.

CHAPITRE PREMIER.

Du mouvement des Fluides causé par leurs pesanteurs.

DEFINITION.

1^o.



'HYDRAULIQUE est la Science qui traite du mouvement des fluides, & surtout du mouvement des eaux.

PROPOSITION I.

2. Si l'eau passe d'un lieu à un autre, le terme auquel elle va about-
Eccc ij

*ur doit être ou de niveau avec celui d'où elle part
tre de la terre.*

DEMONSTRATION

L'eau peut couler ou dans des canaux to
ou dans des canaux inclinés à l'horison ; si
canaux horizontaux, elle coulera jusqu'à ce
rieure soit parfaitement de niveau sans pouvoi
& quand cela arrivera sa masse restera en rep
masse étant pesante tend à descendre vers le
& non pas à s'élever ; au reste je dis que sa
pos & non pas ses parties, car on a vû dans
les parties de l'eau & des autres liquides on
testin qui les fait mouvoir de tout sens, sans
pesanteur de la masse.

Si l'eau se trouve au haut d'un canal ou tu
cliné à l'horizon, son poids l'obligera à desc
canal jusqu'à ce qu'elle rencontre un plan h
surface se mettant de niveau, sa masse restera

Mais si après être descendue par le canal
un autre BC, & qu'elle ne puisse s'échapper
remontera dans ce tuyau BC jusqu'à la lig
après quoi l'eau du canal AB & celle du ca
un parfait équilibre, ainsi qu'il a été prouvé
& par conséquent la masse n'aura plus de mou

PROPOSITION II.

3. Si deux vases AB, CD (Fig. 2.) toujours
vertures E, F égales & à égale distance de la
l'eau, les quantités d'eau qui sortiront par ces
tems égaux seront égales.

DEMONSTRATION

Nous avons démontré dans l'Hydrostatique
presse toutes les parties de ce vase à proportio
ces parties, & de leurs distances à la surface.
cela posé, supposons que les deux ouvertures
& fassent partie de leurs vases, ces deux par
l'hypothèse & leurs distances EG, FH à la su
l'eau, étant aussi égales, l'effort que l'eau f
conséquent égal.

Or en supposant que les vases soient toujours pleins, & que les ouvertures soient debouchées, l'effort est toujours le même, donc les colonnes d'eau qui pesoient sur les ouvertures lorsqu'elles étoient bouchées, sortiront dans des tems égaux avec la même force & avec la même vitesse à cause de l'égalité de leurs masses; donc aussi les quantités d'eau qui sortiront dans des tems égaux, seront égales, car ces quantités ne sont autre chose que les masses qui sortent; or les masses qui sortent multipliées par leurs vitesses lesquelles sont égales, sont les quantités de mouvement, & ces quantités de mouvement doivent être égales puisqu'elles sont produites par des forces égales, donc ces quantités de mouvement ayant une de leurs racines égales, c'est-à-dire leurs vitesses doivent avoir aussi l'autre racine égale, c'est-à-dire leurs masses ou les quantités d'eau qui sortent dans des tems égaux.

COROLLAIRE I.

4. Ce seroit la même chose si l'un des vases étoit incliné à l'horizon, pourvu que les ouvertures fussent égales, & que les distances ou les perpendiculaires tirées de ces ouvertures à la surface supérieure de l'eau fussent égales, car les pressions & les vitesses causées par ces pressions seroient égales de part & d'autre.

COROLLAIRE II.

5. Si les ouvertures E, F sont inégales & les hauteurs égales, les quantités d'eau qui sortent dans des tems égaux sont comme les ouvertures; car si l'on suppose que l'une des ouvertures soit quadruple de l'autre, la colonne qui le pressera sera quadruple de celle qui pressera l'autre à cause de l'égalité des hauteurs, & par conséquent les forces qui obligeront l'eau de sortir seront comme 4 à 1, mais les vitesses seront égales à cause de l'égalité des hauteurs, donc les masses qui sortiront seront comme 4 à 1, car ces masses multipliées par leurs vitesses étant les quantités de mouvement, lesquelles sont toujours entr'elles comme les forces, doivent être comme 4 à 1, ce qui ne sauroit être, à moins que les masses ne soient elles-mêmes comme 4 à 1.

COROLLAIRE III.

6. Si ce que nous venons de dire n'arrive pas toujours exactement dans la pratique, cela vient de la résistance de l'air, du

frottement de l'eau contre les ouvertures , & d'autres causes étrangères , dont nous faisons abstraction ; au reste il faut observer en passant que quand les ouvertures sont inégales & rondes comme on a coutume de les faire , la plus grande a nécessairement des parties plus hautes ou plus basses que la moindre , & que par conséquent l'eau qui passe par ces parties a plus ou moins de vitesse , ce qui ne peut manquer de causer quelque alteration.

COROLLAIRE IV.

7. *Si les ouvertures sont égales & les hauteurs inégales , les quantités d'eau qui sortent dans le même tems sont comme les vitesses ;* car à cause de l'égalité des ouvertures les pressions sont comme les hauteurs , & à cause de l'inégalité des hauteurs les vitesses que ces pressions donnent aux quantités d'eau qui sortent sont inégales ; or si nous divisons le tems de l'écoulement en parties infiniment petites , ce mouvement des quantités d'eau de part & d'autre pendant chacun de ces instans pourra être regardé comme uniforme , donc les vitesses de ces quantités d'eau dans un petit instant seront entr'elles comme les espaces parcourus ; ainsi si dans un même petit instant l'eau qui sort par E s'étend jusqu'en L , & l'eau qui sort par F jusqu'en I , ces quantités d'eau étant comme leurs masses ou comme les cylindres EL , FI lesquels ont les bases égales , seront comme leurs longueurs , ou comme les espaces EL , FI , & par conséquent elles seront dans le rapport des vitesses ; & comme la même chose arrivera dans tous les instans de l'écoulement , il s'ensuit que les quantités écoulées seront entr'elles comme les vitesses.

COROLLAIRE V.

8. *Si les ouvertures sont égales & les hauteurs inégales , les quantités d'eau qui sortent dans un même instant sont comme les racines des hauteurs.*

Je nomme Q la plus grande quantité , q la moindre , V la vitesse de la plus grande quantité , u la vitesse de la moindre ; les forces qui compriment sont comme les hauteurs EG , FH en supposant que EG soit plus grand que FH ; or ces forces sont comme les mouvemens des quantités Q , q ; donc ces forces sont comme $Q \times V$, $q \times u$, & par conséquent nous avons $Q \times V$, $q \times u :: EG$, FH ; mais par le Corollaire précédent , nous avons

$Q, q :: V, u$, donc $Q \times V, q \times u :: Q^2, q^2$, & par conséquent $Q^2, q^2 :: EG, FH$, & $Q, q :: \sqrt{BG}, \sqrt{FH}$.

COROLLAIRE VI.

9. Les vitesses étant comme les quantités d'eau qui sortent dans le même instant, elles sont par conséquent aussi comme les racines des hauteurs.

COROLLAIRE VII.

10. Si les ouvertures sont inégales & les hauteurs aussi, les quantités d'eau qui sortiront dans le même instant sont en raison composée de la raison des ouvertures, & de la raison des racines des hauteurs.

Par le Corollaire 5, si les ouvertures sont égales, les quantités d'eau qui sortent dans un même instant sont comme les racines des hauteurs; maintenant concevons que l'une des ouvertures s'agrandisse & devienne quatre fois plus grande qu'elle n'étoit, elle sera pressée par quatre colonnes d'eau égales à celles qui la pressoient avant qu'on l'eût agrandie, & ces colonnes donneront chacune aux parties d'eau qu'elles pressent la même vitesse que la colonne seule donnoit à l'eau qu'elle pressoit lorsque l'ouverture étoit quatre fois moindre; ainsi il sortira quatre fois plus d'eau, mais avec la même vitesse. Puis donc qu'en supposant les deux ouvertures égales, les quantités d'eau qui sortent sont dans la raison des vitesses ou des racines des hauteurs, & qu'en supposant que l'une des ouvertures devienne à l'égard de l'autre comme 4 à 1, la raison des vitesses subsiste, & qu'outre cela la quantité d'eau qui sort par l'ouverture agrandie, augmente dans la raison 4, 1 des ouvertures, il s'ensuit que les quantités d'eau qui sortent dans le même instant sont dans la raison composée de la racine des hauteurs, & de la raison 4, 1 des ouvertures.

COROLLAIRE VIII.

11. Si par deux ouvertures de différentes grandeurs, & d'inégale hauteur, il sort dans le même instant des quantités égales d'eau, les ouvertures sont réciproquement comme les racines des hauteurs.

Par le Corollaire précédent les quantités d'eau sont en raison composée de la raison des ouvertures & de celle des racines des hauteurs; nommant donc Q, q les quantités, A, a les hauteurs, & L, l les ouvertures, nous avons $Q, q :: L \times \sqrt{A}, l \times \sqrt{a}$ donc en

égales, les vitesses seront égales (N. 5), donc elles seront comme les hauteurs ou comme leurs racines.

En troisième lieu, si les ouvertures sont égales & les hauteurs inégales, nous avons démontré (N. 7.) que les quantités d'eau qui sortent dans un même instant, sont comme leurs vitesses & (N. 8.) que ces mêmes quantités sont comme les racines des hauteurs, donc les vitesses sont aussi comme les racines des hauteurs.

En quatrième lieu, si les ouvertures étant inégales les hauteurs le sont aussi; prenons trois vases A, B, C, dont les deux B, C, ont les ouvertures inégales & leurs hauteurs égales, & les deux A, B, ont les ouvertures égales, & les hauteurs inégales; je nomme H la hauteur de C, & V sa vitesse; h la hauteur de B, & u sa vitesse, nous aurons à cause de l'égalité des hauteurs $V, u :: \sqrt{H}, \sqrt{h}$; je nomme x la hauteur de A, & sa vitesse z, nous aurons à cause des ouvertures égales de B & de A troisième $u, z :: \sqrt{h}, \sqrt{x}$; mais par l'hypothèse $H = h$, donc $\sqrt{H} = \sqrt{h}$, & par conséquent à cause de $V, u :: \sqrt{H}, \sqrt{h}$, nous aurons $V = u$, mettant donc V au lieu de u, & \sqrt{H} , au lieu de \sqrt{h} dans $u, z :: \sqrt{h}, \sqrt{x}$, nous aurons $V, z :: \sqrt{H}, \sqrt{x}$, c'est-à-dire les vitesses des quantités d'eau qui sortent dans le même instant par les ouvertures inégales des vases C, A, dont les hauteurs sont aussi inégales, sont entr'elles comme les racines des hauteurs.

COROLLAIRE I.

14. Il suit de-là que l'eau qui sort à chaque instant par l'ouverture d'un vase toujours plein, coule avec une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur de la surface supérieure de l'eau; car selon la loi de Galilée, tout corps grave à la fin de sa chute a acquis une vitesse qui est comme la racine de la hauteur dont il est tombé; or l'eau qui sort de l'ouverture d'un vase a une vitesse qui est comme la racine de la hauteur de l'eau; donc elle a la vitesse qu'elle auroit acquise en tombant de cette hauteur.

COROLLAIRE II.

15. Si tandis que l'eau sort par l'ouverture d'un vase, on augmente la hauteur de l'eau ou on la diminue, la vitesse de l'eau qui sort augmentera ou diminuera, & ces différentes vitesses seront toujours entr'elles comme les racines des hauteurs.

Ffff

COROLLAIRE III.

16. Puisque l'eau qui sort de l'ouverture d'un vase a une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur de la surface supérieure de l'eau, il s'ensuit selon la même loi de Galilée que si l'ouverture O (Fig. 4.) lui fait prendre une direction verticale, elle s'élèvera jusqu'au niveau de la surface supérieure de l'eau du vase.

Si cela n'arrive pas exactement dans les jets d'eau, cela vient du frottement de l'eau contre les tuyaux, & de la résistance de l'air.

COROLLAIRE IV.

17. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici de l'eau qui sort de l'ouverture d'un vase, ou dont les côtés sont perpendiculaires à l'horison, doit se dire de l'eau qui sort de l'ouverture d'un vase incliné.

PROPOSITION IV.

18. Si un vase cylindrique AB (Fig. 5.) plein d'eau, se desemplit par une ouverture E beaucoup moindre que la largeur de son fonds, les quantités d'eau qui sortiront dans des tems égaux, seront comme les nombres impairs pris en retrogradant, c'est-à-dire comme les nombres 9, 7, 5, &c.

DEMONSTRATION.

Concevons que le vase soit coupé par des plans paralleles à sa base, dont les hauteurs CH, CI, CL, CA soient comme les quarrés 1, 4, 9, 16 des nombres naturels 1, 2, 3, 4; quand l'eau commencera à couler sa vitesse étant comme la racine de la hauteur CA = 16 sera comme 4, & quand le niveau de l'eau sera descendu jusqu'en Ll, la vitesse sera comme $\sqrt{CL} = \sqrt{9}$, ou comme 3, & quand le niveau de l'eau sera descendu en li la vitesse sera comme $\sqrt{CI} = \sqrt{4}$, ou comme 2 & ainsi de suite; or les cylindres CD, Cl, Ci, Ch étant entr'eux comme leurs hauteurs, à cause de la base commune, sont par conséquent comme 16, 9, 4, 1, & leurs différences, c'est-à-dire les cylindres LD, Il, Hi, Ch sont comme 7, 5, 3, 1, donc les quantités d'eau qui remplissent ces cylindres, c'est-à-dire les eaux

écoulées dans le tems que la vitesse diminueoit successivement d'un degré, sont comme 7, 5, 3, 1; mais si l'eau étoit poussée de bas en haut d'un mouvement accéléré par une force égale à sa pesanteur & qui agit de la même façon, elle parcourroit dans des tems égaux des espaces qui seroient comme 1, 3, 5, 7, &c. & sa vitesse augmenteroit d'un degré à chaque tems, selon la loi de Galilée; donc puisqu'en descendant elle parcourt ces mêmes espaces prises en retrogradant, tandis que sa vitesse diminue successivement d'un degré, il s'ensuit qu'elle doit les parcourir dans des tems égaux.

COROLLAIRE I.

19. J'ai dit dans la Proposition que l'ouverture doit être beaucoup moindre que le fonds du vase, car 1°. Si l'ouverture étoit égale au fonds du vase, il est visible qu'en ce cas l'eau du vase tomberoit tout d'une piece, de façon que les parties inférieures n'auroient pas plus de vitesse que les supérieures, & que par conséquent cette masse d'eau suivroit la loi ordinaire des corps pesans, c'est-à-dire que les espaces qu'elle parcourroit dans des tems égaux iroient en augmentant selon la progression des nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. 2°. Si l'ouverture est trop grande par rapport au fonds, la colonne qui est sur cette ouverture étant d'un poids trop considérable s'affaisse plus vite, ce qui fait retomber sur elle l'eau supérieure des autres colonnes, d'où il arrive que l'eau qui sort a une vitesse plus grande qu'elle n'auroit si l'écoulement se faisoit, de façon que la lenteur du mouvement laissât le tems à toutes les colonnes de fournir à peu près une même quantité d'eau.

COROLLAIRE II.

20. Connoissant le tems pendant lequel l'eau d'un vase ou d'un bassin s'écoule par une petite ouverture, on connoitra les quantités d'eau pendant les parties déterminées de ce tems, en cette sorte.

Supposons que toute l'eau d'un vase s'écoule dans 12 heures, selon la loi de Galilée l'espace parcouru dans 12 heures est comme le carré de 12, c'est-à-dire comme 144, je conçois donc que le vase est coupé par 144 plans qui soient tous à égale distance entr'eux, ou, ce qui revient au même, que le côté du vase soit divisé en 144 parties égales, je reduis ces 144 divisions au nom-

jusqu'à ce que le petit cylindre *Cc* soit entièrement écoulé, le tems de l'écoulement de *Cc* sera au tems de l'écoulement de *Aa* comme 2 à 1. Supposant donc qu'on débouche l'ouverture *H* jusqu'à ce que le cylindre *Ee* se soit écoulé, nous trouverons de même que le tems de l'écoulement du cylindre *Ff* sera à celui de l'écoulement du cylindre *Ee* encore comme 2 à 1 ; & comme en agissant toujours de même, on trouvera toujours la même chose, il s'ensuit que le tems de l'écoulement total du cylindre *CD*, sera au tems de l'écoulement total du cylindre *AB* comme 2 à 1, ou comme la base *Dd* à la base *Bb* ; or il est visible que si l'on laissoit couler tout de suite le cylindre *AB*, le tems de son écoulement seroit égal à la somme des instans des écoulemens interrompus de ses petits cylindres ; car ces interruptions n'alterent point les vitesses de ces cylindres, lesquelles sont toujours comme les racines des hauteurs, donc en laissant couler les deux vases, les tems des écoulemens seront comme les bases.

COROLLAIRE V.

23. Si les deux vases sont d'égale hauteur, & les ouvertures de différente grandeur, il est évident que les tems des écoulemens seront en raison composée des bases & des ouvertures ; car les ouvertures doubles donnent dans le même tems des quantités d'eau doubles, &c.

COROLLAIRE VI.

24. Si les vases ayant les ouvertures égales & les bases aussi, leur hauteurs sont inégales, les tems employés à se desemplir sont comme les racines des hauteurs.

Si les hauteurs & les ouvertures sont inégales, les tems sont en raison composée de la raison des racines des hauteurs & de la raison des ouvertures.

Enfin si les ouvertures, les bases & les hauteurs sont inégales, les tems sont en raison composée de la raison des racines des hauteurs, de la raison des ouvertures & de la raison des bases.

REMARQUE.

25. L'eau étant un corps pesant, si elle descend le long d'un tube incliné, on peut lui appliquer tout ce qui a été dit dans la Méchanique touchant la descente des corps graves le long des plans inclinés.

Lorsqu'on trempe l'ouverture C dans l'eau sans appliquer la bouche à l'ouverture A, l'air du siphon, & l'air extérieur qui passe sur la surface de l'eau sont en équilibre, c'est pourquoi l'eau étant également pressée de part & d'autre, se tient dans son niveau & ne monte pas ; mais quand on applique la bouche en A, & qu'on aspire, comme alors on étend la capacité des poulmons, l'air du siphon se dilate, & son ressort s'affoiblit ; ainsi l'air qui pèse sur la surface de l'eau se trouvant plus fort, oblige l'eau de monter par la branche CB ; or cette branche étant beaucoup moins longue qu'il ne faudroit pour contenir le volume d'eau qui seroit en équilibre avec le poids de l'air, l'eau qui se trouve encore pressée lorsqu'elle est parvenue en B, descend le long de la branche BA, forçant l'air dilaté qui s'y trouve de passer dans la bouche & la poitrine de la personne qui aspire ; quand donc l'eau est parvenue jusqu'à la bouche, & qu'on se retire, elle coule par l'ouverture A, parce que la colonne d'air qui agit sur l'ouverture A étant chargée du volume d'eau AB qui est plus grand que le volume BC dont est chargée la colonne qui pèse sur la surface de l'eau du vase, celle-ci a plus de force, & par conséquent elle continue à faire monter l'eau.

Delà il suit 1°. Que si on faisoit la branche BC assez longue pour contenir l'eau que la force de la colonne extérieure d'air peut faire monter, l'eau ne descendroit point par la branche AB ; or s'il n'y avoit point d'air dilaté dans le siphon, l'eau pourroit monter jusqu'à 31 ou 32 pieds, mais à cause de l'air dilaté, lequel ne laisse pas de faire quelque résistance quoiqu'elle soit peu de chose, surtout si on aspire bien fort, la hauteur EB de la branche BC doit toujours être un peu moindre de 31 pieds. 2°. Que si la branche AB étoit de même hauteur que la branche BC, l'eau resteroit suspendue à l'ouverture A sans couler, parce que les colonnes d'air qui pèsent sur les ouvertures seroient d'égale force. 3°. Que si la branche AB étoit plus courte que la branche BC, la colonne d'air qui agit sur l'ouverture A étant moins chargée, seroit plus forte, & par conséquent elle obligerait l'eau de rebrousser chemin.

Et il ne faut pas dire que la colonne qui agit sur A étant plus haute que celle qui agit sur B, a plus de force que nous ne lui en donnons ; car si elle est plus longue, elle est aussi plus chargée, & le volume d'eau dont elle est surchargée pèse beaucoup plus que le même volume d'air qu'elle contient de plus.

28. Si on veut se passer d'appliquer sa bouche à l'extrémité du siphon, on suppléera à ce défaut d'aspiration en cette sorte.

Prenez une boîte HI (*Fig. 8.*) ayant deux tubes TV, FEDC bien soudés, & disposés comme on les voit dans la figure, le tube TV doit avoir un robinet en V, & le tube FE doit être de telle hauteur que lorsque l'extrémité C sera dans la liqueur, la surface supérieure de la boîte HI soit de niveau avec la surface supérieure de l'eau du vase AB; trempez l'extrémité C dans l'eau du vase de façon que le tube EF soit vertical, remplissez d'eau la boîte HI, & le tube TV par le moyen d'une ouverture qui doit être sur la surface supérieure de la boîte & que vous boucherez ensuite exactement, afin que l'air extérieur n'y entre point; cela fait, ouvrez le robinet, & tandis que l'eau de la boîte descendra, l'air contenu dans le tube EF venant à se dilater, perdra de son ressort, c'est pourquoi l'air qui pèse sur l'eau du vase contraindra cette eau à monter dans le tube dont nous supposons la hauteur moindre de 32 pieds, delà l'eau se répandra dans le tube DE, d'où elle descendra dans le tube EF pour se joindre à celle de la boîte HI, & comme nous supposons que la capacité de la boîte est assez grande pour ne s'être pas tout-à-fait desemplie avant que l'eau du vase y soit parvenue, il ne tombera pas plus d'eau par l'ouverture V qu'il n'en viendra par le tube CDEF; ainsi l'air intérieur qui restera étant toujours moins fort que l'air qui presse sur la surface de l'eau du vase, cette eau ne cessera de monter par le tube CDEF que lorsque le vase sera tout-à-fait desempli, pourvu qu'on ait soin de tenir toujours l'extrémité C trempée dans l'eau.

29. Si l'on joint ensemble plusieurs siphons semblables à celui que je viens de décrire, on pourra élever l'eau beaucoup au-dessus de 32 pieds en cette sorte.

Soient les deux caisses CD, EF (*Fig. 9.*) dont les surfaces supérieures sont de niveau à la surface supérieure de l'eau du vase AB; j'adapte aux surfaces inférieures de ces caisses deux tuyaux ON, PQ, d'égale hauteur, ayant chacun son robinet en O & en P; j'adapte deux autres tuyaux ST, VX à leur surfaces supérieures, faisant le tuyau VX plus long que l'autre, & j'enchasse ces tuyaux dans deux caisses HI, LM dont la dernière est plus élevée que la première au-dessus du niveau de l'eau du vase AB; enfin j'adapte au côté de la caisse HI un tube ZR qui descend dans l'eau du vase, & au côté de la caisse LM un tube GY qui s'enchasse

s'enchasse dans la surface supérieure de la caisse HI ; les caisses doivent être bien fermées de tous côtés , & les siphons bien soudés , afin que l'air extérieur n'entre point , & les extrémités T , X , des tubes TS , VX , doivent entrer bien avant dans les caisses HI , LM , afin que l'eau qui montera par les tubes ZR , YG , ne descende point dans les caisses inférieures CD , EF , cela fait.

Je remplis d'air les caisses CD , EF , & leur tubes inférieurs par le moyen des ouvertures qui doivent se trouver sur les surfaces supérieures de ces caisses , ensuite bouchant bien ces ouvertures , j'ouvre le robinet O ; alors l'eau de la caisse CD commençant à descendre , l'air compris dans les tubes se dilate , & la colonne d'air qui pèse sur l'eau du vase devenant plus forte que l'air intérieur dont la dilatation diminue le ressort , l'eau du vase monte par le tube ZR , & se répand dans la caisse HI ; je ferme le robinet O , afin que toute l'eau de la caisse CD ne s'enfuye pas ; car si cela arrivoit , l'air qui entreroit le long de NT arrêteroit le cours de l'eau du tube ZR ; & en même-tems j'ouvre le robinet P , ainsi l'eau de la caisse EF venant à descendre , l'air compris dans les tubes VX , GY , se dilate encore davantage , ce qui fait que l'eau monte par le tube YG dans la caisse LM , & je pourrois continuer de la même façon à élever l'eau de plus en plus , en augmentant le nombre des caisses inférieures & des caisses supérieures.

Cette Machine est très-propre pour faire voir comment la seule dilatation de l'air peut élever l'eau non-seulement au-dessus de son niveau , mais même au-dessus de 32 pieds qui est le poids de l'atmosphère , mais elle seroit extrêmement incommode dans la pratique par la trop grande quantité de caisses inférieures & supérieures , & de tuyaux qu'il faudroit faire si on vouloit élever l'eau à une certaine hauteur , & par l'embarras de remplir d'eau les caisses inférieures.

30. On peut vider un vase plein par le moyen d'un Siphon sans y employer la dilatation de l'air , ainsi qu'on va voir.

Soit le vase AB (*Fig. 10.*) je fais une ouverture X au fonds du vase à laquelle j'adapte un Siphon STV dont l'extrémité S à laquelle je mets un robinet est hors du vase , & l'autre extrémité V est un peu au-dessus du fonds ; je verse de l'eau dans le vase , & à mesure qu'elle s'élève , elle monte dans la branche VT , c'est pourquoi si le plus haut point T du Siphon se trouve plus

G g g g

bas que le niveau de l'eau lorsque le vase est plein, l'eau de la branche VT se trouvant pressée par une colonne d'eau extérieure plus haute, passe dans la branche TS & y descend, soit que le robinet soit ouvert ou qu'il ne le soit pas; car s'il est ouvert, la colonne d'air qui agit par l'ouverture S est obligée de supporter non-seulement une colonne d'air semblable qui pèse sur le niveau de l'eau, mais encore l'effort que l'eau du vase fait sur l'eau de la branche VT qui n'est pas à son niveau; ainsi cette colonne doit céder & laisser couler l'eau, & si le robinet est fermé, l'air qui est enfermé dans le Siphon se condense pour céder à la force de l'eau, & quand il se trouve trop pressé, il se met en petites bulles qui se glissent entre l'eau & les parois du Siphon, & sortent par la surface de l'eau du vase en y faisant des petites vessies.

Supposant donc le robinet ouvert, & que le niveau de l'eau du vase surpasse la hauteur du Siphon, l'eau coule par l'ouverture S, à cause du poids de l'eau qui est au-dessus du niveau du Siphon, & ensuite quand la surface supérieure devient plus basse que la hauteur du Siphon, l'eau ne laisse pas que de couler toujours, parce que la colonne d'air qui agit sur l'ouverture S supporte une colonne d'eau ST beaucoup plus haute que celle qui fait élever la colonne d'air qui pèse sur la surface de l'eau; d'où il suit que cette colonne étant toujours obligée de céder, le vase doit se desemplir totalement.

Si l'on ne verse de l'eau dans le vase que jusqu'à une hauteur moindre que celle du Siphon, l'eau restera dans la branche VT à la hauteur de l'eau extérieure, mais si on applique la bouche en S, & qu'on aspire, toute l'eau du vase s'écoulera par cette ouverture dès qu'on aura retiré la bouche.

Si l'on accommode le Siphon de façon qu'il passe le long des parois du vase (*fig. 11.*) & qu'on y fasse une petite ouverture E en dessous de la courbure qui sert d'anse au vase, on aura beau aspirer en S, l'eau ne remontera point, parce que l'air extérieur entrant par l'ouverture E empêchera la dilatation de l'air intérieur du Siphon, c'est pourquoi l'air qui pesera sur l'eau du vase, s'il n'est pas plein, ne pourra l'élever au-dessus de son niveau; mais si on bouche l'ouverture E avec le doigt, & qu'on aspire en S, on fera couler toute l'eau qui étoit dans le vase par l'ouverture S; que si on remplissoit totalement le vase, en sorte que le niveau fut au dessus de l'ouverture E, l'eau couleroit par cette ouverture jusqu'à ce qu'elle fut de niveau avec elle, après quoi

elle ne couleroit plus quand même on boucheroit l'ouverture E, à moins qu'on n'aspirât en même-tems en S.

Le vase que je viens de décrire, & grand nombre d'autres inventions semblables, étonnent beaucoup les personnes qui en voyent les effets sans en pénétrer la cause, mais pour peu qu'on vienne à connoître les propriétés de l'air, on est bientôt étonné de l'avoir été tant.

31. L'eau qui coule de l'extrémité S du Siphon, lorsque le vase est plein (*Fig. 10. 11.*) coule avec une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant d'une hauteur égale à la hauteur du niveau de l'eau du vase, parce qu'elle est pressée par cette hauteur, laquelle est plus grande que la hauteur du Siphon; au contraire dans le Siphon de la figure 7. l'eau ne coule de l'ouverture A qu'avec la vitesse qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur de l'eau du vase, quoique la hauteur de la branche AB soit plus grande, parce que le surplus de la hauteur seroit soutenu par la colonne d'air qui agit sur A, comme il a été dit plus haut.

32. La compression de l'air peut aussi donner du mouvement à l'eau, de même que la dilatation, & c'est ce que nous allons voir.

Soit un grand vase AB (*Fig. 12.*) séparé en deux par un fonds ou diaphragme CD ayant le fonds supérieur AE concave auquel est une ouverture F qui communique avec l'espace AD; j'adapte au milieu de ce fonds supérieur un tuyau NM dont l'extrémité M ne touche pas le diaphragme, & dont l'autre extrémité N soit élevée au-dessus du fonds supérieur; j'adapte à ce fonds un autre tuyau GH qui traverse le diaphragme, & dont l'extrémité H ne touche pas le fonds inférieur; enfin j'en adapte un troisième IL dont les extrémités ne touchent ni le fonds supérieur ni l'intérieur; cela fait, je bouche l'ouverture G & je verse de l'eau dans la capacité supérieure AD par l'ouverture F, jusqu'à ce qu'elle soit au niveau de l'ouverture I du tube IL, je ferme l'ouverture F, & débouchant l'ouverture G, je laisse entrer l'eau dans la capacité inférieure CB, cette eau montant peu à peu dans cette capacité, en chasse l'air lequel passe par le tuyau IL, & comprime l'air qui se trouve dans le reste de la capacité AD, par cette compression le ressort de l'air s'augmente de plus en plus, & comme auparavant il y avoit équilibre entre l'air extérieur & l'air intérieur, cette équilibre se rompt, & l'air intérieur l'emporte, mais

G g g g ij

comme on a soin de faire la hauteur EE que la hauteur du tuyau MN au-dessus de est dans la capacité AD , il est visible que que l'air intérieur doit élever, est plus foible HG , donc l'air intérieur doit l'emporter du doit sortir par l'ouverture N ; cette Machine la Fontaine de *Heron*, qui étoit un Mart d'rie.

33. Si après avoir laissé remplir la cap on met du feu sous le fonds du vase, la l'air qui reste dans la capacité AD , & par de cet air étant augmenté, l'eau de la cap le tube MN .

34. L'eau qui sort par l'effort de l'air e vitesse qu'elle auroit si elle étoit pressée p capable d'être en équilibre avec la différen sort de l'air comprimé & de la force de l'ai l'air comprimé forçant l'air extérieur, emp force à le vaincre, & ce n'est qu'avec l'au l'eau de sortir; or une colonne d'eau qui se cette partie, auroit la même force; donc si agissoit sur l'eau qui sort, elle lui imprit telle.

Donc 1°. l'eau qui sort par la force de l a une vitesse égale à celle qu'elle auroit ac la hauteur d'une colonne d'eau qui seroit si que la compression, car l'eau qui sort par u jours la vitesse qu'elle acquerroit en tomb l'eau qui la comprime (*N. 14.*) 2°. Si le re en sorte que la force s'augmente ou qu'elle de l'eau qui sort sont comme les racines d lonnes d'eau qui feroient le même effet se de l'air; car ces colonnes augmenteroient lon que la force du ressort de l'air augmente mais les vitesses de l'eau qui sortiroit, sero si elle tomboit de ces différentes hauteurs quises à la fin des hauteurs sont comme les n donc, &c. 3°. Le ressort de l'air comprim l'air non comprimé comme la masse à la n volume, il s'ensuit que l'eau est pressée par

une force qui est comme la différence des masses de l'air comprimé & de l'air non comprimé ; je suppose ici que l'air comprimé occupe la même place qu'occupoit l'air non comprimé, ce qui arriveroit dans la fontaine de *Heron*, si au lieu de faire couler de l'eau par le tube GH, on adaptoit en G un cylindre avec un piston, & qu'on comprimât l'air intérieur, ainsi qu'il a été dit dans l'*Airometrie*. 4°. Le ressort de l'air comprimé étant au ressort de l'air non comprimé réciproquement comme le volume de l'air non comprimé au volume de l'air comprimé, l'eau qui sort par la pression de l'air comprimé est poussée avec une force qui est comme la différence du volume de l'air non comprimé au volume de l'air comprimé ; je suppose que les masses de ces deux airs sont différentes, ce qui arrive dans la fontaine de *Heron*, parce que l'eau qui entre dans la cavité inférieure resserre l'air qui y étoit, & diminue son volume avant que cet air puisse vaincre l'air extérieur qui pèse sur l'eau qui sort. 5°. Dans la fontaine de *Heron*, l'air comprimé n'est pressé que par l'eau du tuyau GH, car l'air qui pèse sur ce tuyau ne le comprime point & seroit en équilibre avec lui ; or le ressort est toujours égal à la force qui le comprime, donc la force de l'air comprimé est égale à la force de la colonne d'eau GH, en supposant que l'eau de la cavité inférieure ne monte qu'en H, ou à la force de la colonne qui pèse sur le niveau qui est dans cette cavité, si ce niveau est plus haut que H ; mais ce ressort agit de la même façon sur l'eau de la cavité supérieure, donc cette eau agit avec une vitesse qu'elle auroit acquise si elle étoit tombée de la hauteur de la colonne qui pèse sur le niveau de l'eau de la cavité inférieure, & par conséquent elle monte à une hauteur égale à la hauteur de cette colonne, mais il faut prendre garde que le niveau de l'eau de la cavité inférieure s'élevant toujours, la hauteur de la colonne GH diminue aussi toujours, & que par conséquent la hauteur de l'eau qui sort va en diminuant, d'autant plus que le niveau de l'eau de la cavité supérieure baisse à mesure que l'eau sort.

De la Pompe aspirante, & de la Pompe refoulante.

35. La Pompe aspirante est un cylindre creux AB (Fig. 13.) fermée à l'une de ses extrémités par un couvercle ou *souape* G qui s'ouvre en dedans, de façon qu'elle peut retomber par son propre poids; on adapte à ce cylindre un piston HF dont le bout est

G g g ij

creux & se ferme par une autre soupape R qui s'ouvre du côté de A ; l'extrémité H du piston est jointe à un levier QP qui tourne librement autour d'un point fixe P, & qui a un bras QS à son extrémité Q, afin qu'en tirant de Q vers S, ou en poussant de S vers Q, on puisse aisément enfoncer ou retirer le piston.

Quand on veut se servir de cette machine, on met son extrémité B dans l'eau, tenant le cylindre dans une situation verticale, on enfonce le piston jusqu'en G, & l'air qui se trouve entre le piston & la soupape inférieure étant comprimé par ce mouvement, s'ouvre un passage par la soupape R, laquelle se referme dès que le piston touche la soupape inférieure ; on retire le piston, & comme alors la colonne d'air qui pèse sur le piston est soutenue par la soupape R, laquelle ne le laisse pas passer dans l'espace que le piston abandonne, la colonne d'air qui pèse sur l'eau devient plus forte, à cause que rien ne pèse plus sur la soupape G, & par conséquent elle oblige la soupape G de s'ouvrir, & l'eau monte dans le cylindre jusqu'au piston, supposé toujours que l'espace compris entre la soupape G & le piston n'excede pas 32 pieds qui est la plus grande hauteur à laquelle le poids de l'atmosphère peut faire monter l'eau ; on enfonce de nouveau le piston, & l'eau qui est montée dans le cylindre se trouvant pressée entre le piston & la soupape G qui se referme par son propre poids & par la compression de l'eau, la soupape R est contrainte de s'ouvrir & de donner passage à l'eau, jusqu'à ce que le piston vienne à toucher la soupape G, car alors l'eau qui pèse sur la soupape R l'oblige de se refermer ; on retire le piston, & tandis qu'il entre encore de l'eau par la soupape G, le piston enleve celle qui est au-dessus de la soupape R, & l'oblige de couler par un canal AX qui est au sommet du cylindre AB ; ainsi en redoublant les coups de piston, on fait monter dans le canal AX autant d'eau que l'on veut.

36. Dans la Pompe refoulante (Fig. 14.) le piston HR entre par l'ouverture inférieure B qui trempe dans l'eau, & l'on met vers le milieu du cylindre un diaphragme HI ayant une soupape G ; quand donc on tire le piston de G en B la soupape R s'ouvre pour donner passage à l'eau, & se referme quand le piston est en B ; & quand on enfonce le piston de B vers G l'eau comprise entre le piston & le diaphragme ouvre la soupape G, & entre dans la cavité supérieure AI ; & il est aisé de voir qu'en redoublant les coups de piston, on peut faire monter dans le canal VX tant d'eau que l'on voudra.

37. Toutes les Machines inventées pour élever l'eau par le moyen de l'air, sont fondées sur les principes que nous venons d'expliquer dans ce Chapitre, & la plupart même ne sont que des répétitions & des combinaisons de celles qu'on vient de voir; quant à celles qui élèvent l'eau sans le secours de l'air, leur mécanisme n'étant établi que sur les principes qui sont répandus dans tout cet Ouvrage, il seroit inutile de m'arrêter à en donner l'explication.

CHAPITRE III.

Du Cours des Rivières.

DEFINITIONS.

38. **L**E *lit* d'un Fleuve ou d'une Rivière est le canal dans lequel il coule, & la *section* d'un Fleuve est un plan vertical que l'on conçoit couper l'eau perpendiculairement à son courant, ou à ses rives, en sorte que si ce plan existoit réellement, l'eau seroit arrêtée comme par une digue.

Les rives d'un fleuve étant ordinairement fort irrégulières; les sections le sont aussi, mais on peut les réduire à des parallélogrammes rectangles, dont l'un des côtés seroit la largeur du Fleuve.

PROPOSITION V.

39. *Tout fleuve qui n'est arrêté par aucun empêchement coule avec une vitesse qui s'accelere.*

DEMONSTRATION.

Le fonds du lit d'un fleuve peut être ou horizontal ou incliné à l'horizon, ce qui fait deux cas.

Si le fonds est horizontal, les couches d'eau inférieures sont pressées par les supérieures; or l'eau qui est pressée coule avec une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur de la surface supérieure de l'eau qui la presse (N. 13), donc les différentes couches d'un fleuve coulent avec des vitesses égales à celles qu'elles auroient acquises en tombant de la hauteur de la surface supérieure de l'eau, & par conséquent leurs vitesses étant comme les racines de ces hauteurs (N. 13.) sont

des vitesses accélérées, d'autant plus qu'à mesure que ces couches coulent, elles reçoivent toujours des nouvelles impressions de l'eau supérieure qui les presse.

Si le fonds du lit est incliné à l'horison, l'eau étant un corps pesant descend le long du fonds de même que les corps graves descendent le long des plans inclinés, c'est-à-dire avec une vitesse accélérée.

COROLLAIRE

40. Il suit de-là 1°. Que les fleuves coulent d'autant plus vite que le fonds de leur lit est plus profond, ou que son angle d'inclinaison avec l'horizon est plus grand. 2°. Que les fleuves coulent plus vite dans les endroits plus écartés de leur source que dans ceux qui en sont plus près. 3°. Que leurs différentes couches ont d'autant plus de vitesse qu'elles sont plus près du fonds, parce que celles qui sont plus près du fonds sont plus chargées que les autres.

Que si l'expérience n'est pas toujours d'accord avec ce que nous venons de dire, cela vient de l'inégalité & de la rudesse du fonds & des rives qui arrêtent le mouvement de l'eau, tantôt plus, tantôt moins.

DEFINITION.

41. Toutes les couches d'eau d'un fleuve ayant des vitesses inégales à cause de l'inégalité des hauteurs, si parmi ces vitesses l'on en prend une qui soit telle qu'en supposant que toutes les couches coulent avec cette vitesse, il s'écoule autant d'eau par une section qu'il s'en écoule dans le même tems avec les vitesses inégales, cette vitesse s'appellera *vitesse moyenne*.

PROPOSITION VI.

42. Si par différentes sections égales d'un ou de plusieurs fleuves l'eau coule avec la même vitesse, les quantités d'eau qui passeront par ces sections dans le même tems seront égales.

DEMONSTRATION.

Puisque les sections sont égales, c'est-à-dire de même base & de même hauteur, il y a autant de couches d'eau dans les unes que dans les autres, & les différentes vitesses des couches d'eau d'une section sont égales aux différentes vitesses des couches

ches de l'autre; donc la vitesse moyenne de l'une est égale à la vitesse moyenne de l'autre; or il est visible que si l'eau couloit par les unes & par les autres avec cette vitesse moyenne, les quantités d'eau qui s'écouleraient dans le même tems seroient égales, donc les quantités d'eau qui s'écoulent dans le même tems avec des vitesses inégales, sont aussi égales, puisque la quantité d'eau qui s'écoule par une section avec les vitesses inégales des couches, est la même qui s'écoulerait dans le même tems en donnant à toutes les couches la vitesse moyenne.

COROLLAIRE I.

43. Donc si les sections par où l'eau coule avec la même vitesse sont inégales, les quantités d'eau qui couleront dans le même tems sont inégales, & le rapport de ces quantités est le même que celui des sections, c'est-à-dire, que si une section est double, triple, quadruple, &c. d'une autre section, la quantité d'eau qui en sortira sera double, triple, quadruple, &c. de celle qui sortira par l'autre section; car les quantités d'eau ne sont autre chose que les sections multipliées par les vitesses qui sont ici égales.

COROLLAIRE II.

44. Si les sections sont égales & les vitesses inégales, les quantités d'eau seront comme les vitesses; car si la vitesse de l'une est, par exemple, double de la vitesse de l'autre, il doit s'écouler dans le même tems une quantité d'eau double à cause qu'une vitesse double fait parcourir dans le même tems un espace double.

Et si les sections sont inégales & les vitesses aussi, les quantités d'eau qui en sortiront dans le même tems seront en raison composée, de la raison des sections, & de la raison des vitesses, ce qui est trop clair pour avoir besoin de démonstration.

Il faut entendre ici par le mot de vitesse les vitesses moyennes; parce qu'il s'écoulerait autant d'eau avec ces vitesses qu'il s'en écoule avec les vitesses inégales, comme il a déjà été dit.

DEFINITION.

45. On dit qu'un fleuve est dans un état permanent quand il n'augmente ni ne décroît, & que toutes ses sections sont d'égale hauteur quoiqu'elles soient d'inégale largeur.

Au reste comme il se trouve souvent dans les fleuves des creux,

H h h h

en l'eau ne coule point, de façon que quand tout le fleuve seroit à sec, ces creux ne laisseroient pas que d'être remplis, il faut entendre par la hauteur d'une section une ligne verticale sur la surface de l'eau, & qui ne descend que jusqu'à la couche la plus basse qui coule comme le reste du fleuve, par exemple, si la ligne ABCDE (Fig. 15.) représente le fonds du lit d'un fleuve qui coule de A vers E, & qu'on veuille une section qui passe le point C du creux BCD dans lequel l'eau ne coule point comme le reste de l'eau du fleuve, dont nous supposons que la surface supérieure est la droite HI, on élèvera du point C une droite CR perpendiculaire à la surface supérieure de l'eau, mais on ne prendra pour la hauteur de la section que la partie RS qui se termine à la dernière couche ASE qui coule comme le reste du fleuve.

PROPOSITION VII.

46. Si un fleuve est dans un état permanent, quelque inégales que soient les sections qu'on voudra lui faire, les quantités d'eau qui passeront par ces sections dans le même tems seront toutes égales.

DEMONSTRATION.

Soit la figure AE le plan d'un fleuve qui coule de A vers D (Fig. 15.) & les droites GB, FC, MN le plan de différentes sections inégales faites en différens endroits; si on veut que la section FC étant plus large que la section GB, il passe plus d'eau par la section FC qu'il n'en passe par la section GB dans le même tems, il s'en suivra qu'entre les deux sections FC, GB la hauteur du fleuve baissera, ce qui est contre l'hypothèse, puis qu'on suppose que le fleuve est dans un état permanent; & si l'on veut qu'il passe plus d'eau par GB qu'il n'en passe par FC dans le même tems, la hauteur de l'eau s'élèvera davantage entre les deux sections, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc puisqu'il ne peut passer ni plus ni moins d'eau par l'une & l'autre dans le même tems sans changer l'état permanent du fleuve, il s'ensuit que les quantités d'eau qui passent par les différentes sections dans le même tems sont égales.

COROLLAIRE.

47. Il suit de là 1°. Que l'eau coule plus vite par les moindres sections que par les plus grandes, car si les vitesses étoient égales, il est évident qu'il passeroit plus d'eau dans le même tems par les plus grandes sections que par les

moindres; mais nous venons de prouver que les quantités qui passent par toutes les sections sont égales, donc, &c. 2°. Que si l'on retrecit la largeur du fleuve en quelque endroit, le fleuve cessera d'être dans un état permanent; car ou l'eau coulera avec la même vitesse qu'auparavant, ou elle coulera plus vite; si elle coule avec la même vitesse, donc il en passera moins par cet endroit qu'il n'en passoit, & par conséquent le fleuve doit s'enfler du côté de la source; que si elle coule plus vite, cette plus grande vitesse ne pourroit venir que d'une plus grande pente qui se trouveroit dans le fonds, puisque nous supposons qu'on n'auroit rien changé dans ce fonds; donc cette vitesse devroit venir de ce que la section deviendroit plus haute, & par conséquent de ce que le fleuve enfleroit en cet endroit. 3°. Que si l'on élargit le fleuve en quelque endroit, le fleuve cessera encore d'être dans un état permanent; car ou la vitesse sera la même, ou elle sera moindre, si la vitesse est la même, il passera plus d'eau par cet endroit qu'il n'en passoit auparavant, & par conséquent l'eau baissera du côté de la source, & si la vitesse est moindre, cette moindre vitesse ne venant point de ce que le fonds sera moins incliné, puisqu'on suppose que ce fonds est toujours le même, il faudra nécessairement qu'elle vienne de ce que la hauteur de l'eau est diminuée; & il ne faut pas dire que si les raisons que nous venons de donner sont vraies, il n'y a donc jamais de fleuve dans un état permanent, à moins que toutes les sections ne soient d'égale largeur & d'égale hauteur; car dans les fleuves permanens le plus ou le moins de vitesse vient du plus ou du moins de frottement qui se fait entre les sections. 4°. Que les vitesses moyennes des sections sont entr'elles reciproquement comme les sections, car puisque dans le même instant il passe autant d'eau par la petite section que par la grande, les produits des sections par leurs vitesses moyennes sont égaux, car les quantités d'eau ne sont autre chose que ces produits; nommant donc A la premiere section, V sa vitesse, a la seconde section, u sa vitesse, on aura $AV = au$, donc $V, u :: a, A$.

PROPOSITION VIII.

48. Si un fleuve est enflé, la quantité d'eau qui passe par une de ses sections, est à la quantité d'eau qui passoit dans un tems égal par la même section, avant que le fleuve enflât en raison composée de la section du fleuve enflé à la section du fleuve non enflé, & de la vitesse

Hhhh ij

mesure de la section du fleuve enflé à la vitesse moyenne de la section du fleuve non enflé.

DEMONSTRATION.

Je considère la section après & avant le gonflement du fleuve comme deux différentes sections d'un même fleuve, & je les nomme S, s , leurs vitesses moyennes V, v , & les quantités d'eau qui coulent par ces sections dans le même tems Q, q ; supposons que par la section S avec la vitesse v de l'autre section, il s'écoule dans le même tems une quantité d'eau que je nomme m , il est évident qu'en supposant les vitesses égales les quantités d'eau sont comme les sections, puisque ces quantités ne sont autre chose que les sections multipliées par les vitesses qui sont ici supposées égales; donc $m, q :: S, s$; de même il est clair que si nous supposons que les quantités Q, m coulent de deux sections égales S, S dans le même tems avec les vitesses V, v , ces quantités seront comme les vitesses; donc $Q, m :: V, v$, & multipliant les termes de cette proportion par ceux de la précédente, nous aurons $Qm, mq :: SV, sv$, & divisant la première raison par m , nous aurons $Q, q :: SV, sv$.

COROLLAIRE I.

49. Puisque $Q, q :: SV, sv$, donc $Qsv = qSV$, d'où l'on tire $V, v :: Qs, qS$, c'est-à-dire les vitesses moyennes de deux sections ou de la même section d'un fleuve selon deux états différens, sont en raison composée de la raison directe des quantités d'eau, & de la raison inverse des sections, s'il y en a deux, ou de la raison inverse des différentes grandeurs de la même section, s'il n'y en a qu'une, considérée sous deux états différens d'un même fleuve.

COROLLAIRE II.

50. S'il y a deux sections & que les quantités Q, q soient égales, on aura $SV = sv$, à cause de $Q, q :: SV, sv$, donc $V, v :: s, S$, c'est-à-dire les vitesses moyennes sont reciproques aux sections quand les quantités d'eau sont égales.

COROLLAIRE III.

51. S'il n'y a qu'une section, & que nous appellions a l'augmentation de quantité d'eau qui coule dans un tems égal après

Le gonflement, nous aurons $Q = q + a$, & comme $Q, q :: SV, su$, nous aurons $q + a, q :: SV, su$, & divisant $q + a - q$, $q :: SV - su, su$, ou $a, q :: SV - su, su$, c'est-à-dire, l'augmentation est à la quantité qui couloit auparavant comme la différence des produits des vitesses moyennes par les grandeurs différentes des sections, est au produit de la section avant le gonflement par sa vitesse moyenne.

COROLLAIRE IV.

52. S'il n'y a qu'une section & qu'elle soit un rectangle, les différentes grandeurs de cette section avant & après le gonflement sont comme les hauteurs, ainsi l'augmentation est à la quantité d'eau qui couloit auparavant comme la différence des produits des hauteurs par les vitesses est au produit de la hauteur avant le gonflement multipliée par la vitesse.

PROPOSITION IX.

53. Les différentes vitesses des couches d'eau qui passent par une section d'un canal incliné, sont comme les ordonnées d'une demi-parabole tronquée.

DEMONSTRATION.

Soit AB (Fig. 17.) le profil du lit d'un canal qui coule de A vers B; AH la ligne horizontale qui passe par le sommet A du canal, & CD une section du fleuve.

La couche AC descendant le long de AC a acquis en C une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur CH du plan incliné AC, & elle n'en a point acquis une plus grande par la pression de l'eau supérieure comme nous le démontrerons dans le Corollaire suivant; de même la couche AD a acquis en D une vitesse égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur DG du plan incliné AD, & ainsi des autres couches; donc les vitesses acquises sont comme les racines des hauteurs CH, DG; je prolonge CD jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne horizontale AH en N, & les triangles semblables HCN, GDN, donnent HC, GD :: CN, DN, donc les vitesses que les couches AC, AD ont acquises en C & D, sont comme les racines de CN, DN, puisqu'elles sont comme les racines de HC, GD, qui sont en même raison que CN, DN; ainsi supposant que CB, DE expriment les vitesses acquises en C & D,

Hhhh iij

la courbe NEB fera une demi-parabole, car les ordonnées CE, DE seront entr'elles comme les racines des abscisses CN, DN & les ordonnées comprises dans le tronquement CDEB exprimeront les vitesses des couches comprises entre la plus basse AC la plus haute AD, donc, &c.

COROLLAIRE I.

54. Pour faire voir que la pression de l'eau supérieure n'aument point la vitesse de l'eau inférieure dans les canaux inclinés, il n'y a qu'à faire attention que l'eau de la couche AP descend le long du plan incliné AD de la même façon que les corps graves, sa pesanteur se partage en deux directions dont l'une est la droite OR perpendiculaire au plan incliné AO, & l'autre est la droite OD parallèle à ce plan; or la couche AO en O ne peut presser ni par la droite OR, ni par la droite OD la couche AC en C, donc l'eau en C n'est point pressée par la couche supérieure AO, & on prouvera de la même façon que l'eau en C n'est point pressée par les autres couches comprises entre la couche supérieure AD & l'inférieure AC, & que toutes ces couches intermédiaires ne sont pas pressées les unes par les autres dans la section CD.

Dans les fleuves dont le fonds du lit AB n'est que très-peu incliné à l'horizon, la droite OR se confond à peu de chose près avec la droite OC, de même que celle-ci se confond avec la droite perpendiculaire CD, & par conséquent l'eau inférieure dans la section se trouve pressée par la supérieure, laquelle ne coule que pour se mettre de niveau avec l'inférieure, que sa pression fait couler.

Il y a donc cette différence entre l'eau des fleuves, dont le fonds est à très-peu de chose près horizontal, & l'eau de ceux dont le fonds est plus incliné, que dans les premiers l'eau inférieure est pressée par la supérieure, au lieu que dans les autres l'eau supérieure ne presse point l'inférieure, parce que sa pesanteur se partage en deux parties, dont l'une n'agit que sur le plan incliné & l'autre n'agit ni sur le plan incliné ni sur l'eau inférieure.

COROLLAIRE II.

55. Dans les canaux & les fleuves qui ont le fonds du lit incliné, l'eau du fonds coule quelque fois avec moins de vitesse

que la supérieure, à cause du frottement du fonds.

COROLLAIRE III.

56. Si l'on connoit la vitesse CB de la couche inférieure, la vitesse DE de la supérieure, & la hauteur CD de la section, on pourra aisément déterminer le diamètre CN & le parametre de la parabole.

Car puisqu'on a $\overline{CB}^2, \overline{DE}^2 :: CN, DN$, par la propriété de la parabole, donc $\overline{CB}^2 - \overline{DE}^2, \overline{DE}^2 :: CN - DN, DN :: CD, DN$, ainsi la quatrième proportionnelle à la différence des quarrés de CB, DE, au quarré de DE & à la hauteur CD, sera la droite DN, laquelle étant ajoutée à CD donnera le diamètre CN.

Et pour trouver le parametre, on prendra une troisième proportionnelle à la droite CN & à la droite CB, ce qui est évident par la nature de la parabole.

COROLLAIRE IV.

57. La droite CD étant prise pour une perpendiculaire quelconque tirée dans la section d'un canal ou d'un fleuve, si l'on connoit les espaces CB, DE, parcourus dans un certain tems par les couches extrêmes, c'est-à-dire par l'inférieure & la supérieure, on connoitra la quantité d'eau qui sort dans le même tems par la droite CD en cette sorte.

Je cherche le diamètre CN de la parabole, comme il a été dit dans le Corollaire précédent, & l'espace parabolique CNE devient connu, car par la propriété de cette parabole, l'espace CNB est $\frac{2}{3} CB \times CN$, de même l'espace parabolique NDE est $\frac{2}{3} DE \times DN$, ainsi l'espace CDEB est $\frac{2}{3} CB \times CN - \frac{2}{3} DE \times DN$, mais l'espace CDEB est la somme des espaces parcourus par toutes les couches dans le même tems, & cette somme est égale à la quantité d'eau écoulée dans le même tems par la section CD; donc cette quantité d'eau est $\frac{2}{3} CB \times CN - \frac{2}{3} DE \times DN$.

COROLLAIRE V.

58. Si la section est un parallélogramme rectangle, on aura

la quantité d'eau qui s'écoule dans le même tems par la section en multipliant la quantité d'eau qui sort par la perpendiculaire CD, par la largeur de la section, ce qui est évident.

COROLLAIRE VI.

59. Pour trouver la vitesse moyenne, il faut diviser l'espace CDEB par la hauteur CD, & le quotient donnera la droite CT qui sera la vitesse moyenne; car si toutes les couches avoient la vitesse moyenne, les espaces qu'elles parcourroient dans un même tems seroient égaux, ainsi ces espaces formeroient un rectangle CDTV égal à l'espace parabolique CDEB, & les hauteurs de ces deux espaces seroient égales, d'où il est évident que pour avoir la largeur CT du rectangle, il faut diviser l'espace parabolique par la hauteur CD.

COROLLAIRE VII.

60. Et pour avoir sur la droite CD le point X auquel correspond la vitesse moyenne XZ, on cherchera cette vitesse moyenne par le Corollaire précédent, on le mettra de C en T, du point T on élèvera sur CT la perpendiculaire TZ, & du point Z où elle coupe la courbe, on menera l'ordonnée ZX qui sera la vitesse moyenne, ce qui est évident.

Mais si on veut avoir la distance NX du point X au sommet de la parabole, on aura par la propriété de cette courbe $\overline{CB}^2 : \overline{XZ}^2 :: \text{CN}, \text{XN}$, & par conséquent la quatrième proportionnelle au carré de la vitesse CB, au carré de la vitesse moyenne XZ, & à l'abscisse CN, sera la distance cherchée XN.

PROPOSITION X.

61. Si le fonds du lit d'un Canal ou d'un Fleuve est horizontal; les vitesses des différentes couches qui passent par une section, sont comme les ordonnées d'une demi-parabole.

DEMONSTRATION.

Soit AB (Fig. 18.) le profil du lit du fleuve qui coule de A vers

vers B, & CD le profil d'une section ; les vitesses des couches AC, LE, IG, &c. qui passent par la section CD étant comme les racines des hauteurs CD, ED, GD, &c. seront par conséquent comme les ordonnées d'une parabole ; or le lit du fleuve étant horizontal, toutes ces couches n'ont d'autre vitesse que celles qu'elles reçoivent de l'eau supérieure, & la couche supérieure n'étant point pressée, n'a par elle-même qu'une vitesse infiniment petite, donc toutes les vitesses des différentes couches sont comme les ordonnées d'une demi-parabole complète CDB.

COROLLAIRE I.

62. La vitesse moyenne est à la vitesse de la plus basse couche comme 2 à 3 ; car pour avoir la quantité d'eau qui coule par la perpendiculaire CD de la section, dans le même tems que la couche la plus basse parcourt l'espace BC, il faut multiplier BC par les deux tiers de la hauteur DC, ce qui donne $\frac{2}{3} CB \times DC$, & par conséquent divisant cette quantité par la hauteur DC, on aura $\frac{2}{3} CB$ pour la largeur CX du rectangle CXZD égal à la parabole ; donc CX sera la vitesse moyenne, puisqu'on sçait que toutes les couches coulant avec cette vitesse parcourroient un rectangle CXZD égal à la parabole CDB dans le même-tems qu'elles parcourroient avec leur différentes vitesses la parabole CDB.

COROLLAIRE II.

63. Et pour trouver le point G par où passe la couche qui a la vitesse moyenne, on fera $\overline{CB}^2, \frac{4}{9} \overline{CB}^2 :: CD, \frac{4}{9} CD$, ainsi on aura $DG = \frac{4}{9} CD$.



CHAPITRE IV.

Du choc des Fluides.

64. **D**ANS le choc d'un corps solide AB (*Fig. 19.*) contre un autre corps RS, il y a trois choses à considérer. 1°. L'angle HIK sous lequel le corps AB choque le corps RS, c'est-à-dire l'angle que fait la direction HI du corps AB avec la face RS qu'il choque, car nous avons démontré dans la *Mechanique*, que plus cet angle approche du droit, plus le choc est grand. 2°. La vitesse, car la force d'un corps étant le produit de la masse par la vitesse du corps AB, il est visible qu'un corps qui a plus de vitesse choque un autre corps avec plus de force que s'il avoit moins de vitesse. 3°. Enfin, la densité du corps AB, parce qu'un corps qui sous un même volume a plus de densité qu'un autre, contient aussi plus de masse, & que par conséquent si les angles de direction sont les mêmes & les vitesses aussi, le corps qui a plus de densité ou de masse, choquera avec une plus grande force.

Quant à l'étendue de la partie TB qui choque la face RS, il n'importe pas qu'elle soit plus ou moins grande; car toutes les parties du corps AB étant étroitement liées ensemble, l'effort qui est répandu dans toutes ses parties passe & se réunit en TB, en sorte que RS reçoit le même choc que si toutes les parties de AB le touchoient.

Dans le choc d'un fluide contre un solide, ou contre un autre fluide, il faut non-seulement avoir égard à l'angle d'inclinaison de la direction du fluide, à la vitesse & à la densité, mais encore à l'étendue ou au volume de la partie qui choque, parce que dans le fluide toutes les parties n'étant pas étroitement liées entr'elles comme celles des solides, leur effort ne se communique pas des unes aux autres de la même façon.

Soit par exemple, le fluide AB (*Fig. 20.*) qui choque le corps KS, il est visible que s'il n'y a que les parties C, D, E, qui choquent KS, le choc sera moins grand que si toutes les parties C, D, E, F, G, B, choquoient à la fois, parce que les parties C, D, E, ne reçoivent que l'impression des colonnes AC,

HD, IE, & nullement celle des autres colonnes.

65. Et il faut observer que l'étendue ou le volume de la partie CE, ou CB qui choque doit s'estimer par la largeur de cette partie, & par la vitesse dont l'eau est mue, parce que plus la vitesse sera grande, & plus il y aura de molécules d'eau qui choqueront dans un même tems ; par exemple, si avec une certaine vitesse il n'y a que les molécules C, D, qui choquent la partie CD dans un certain tems, il est visible qu'avec une vitesse double, il y aura deux fois plus de molécules qui choqueront cette partie dans le même-tems, c'est-à-dire, non-seulement les molécules C, D, choqueront, mais encore les molécules N, O, qui suivent celles-ci, & ainsi des autres.

PROPOSITION XI.

66. Si un même fluide choque avec une même direction & une même vitesse deux plans inégaux BC, DE, (Fig. 21.) les forces dont ces plans sont choqués, sont comme les plans.

DEMONSTRATION.

Par la supposition, les vitesses AB, HD sont égales, de même que les directions, & il y a aussi égalité entre les densités, puisque c'est le même fluide ; donc la différence du choc ne peut venir que du côté des volumes qui choquent les plans ; or à cause de l'égalité des vitesses, les volumes sont comme les plans BC, DE ; donc les chocs sont comme les plans BC, DE, mais les chocs étant les effets des forces, sont proportionnels aux forces ; donc les forces sont comme les plans.

COROLLAIRE I.

67. Si les vitesses AB, HD, sont inégales & les plans égaux, les forces des chocs sont comme les quarrés des vitesses.

Par la supposition, les plans sont égaux, & les vitesses inégales ; donc les volumes qui choquent sont comme les vitesses, or les forces sont comme les produits de ces volumes ou-masses par leur vitesses ; donc les forces sont comme les produits des vitesses par les vitesses, ou comme les quarrés des vitesses.

COROLLAIRE II.

68. Si les vitesses sont inégales & les plans inégaux, les forces

des chocs sont en raison composée de la raison des plans, & de la raison des quarrés des vitesses.

Par la supposition, les plans sont inégaux de même que vitesses ; donc les volumes qui choquent sont en raison composée des plans & des vitesses ; or les forces sont comme les produits des volumes ou masses par les vitesses ; donc elles sont comme les produits des plans par les quarrés des vitesses, ou en raison composée des plans & des quarrés des vitesses.

PROPOSITION XII.

69. *Si deux fluides de différentes densités choquent des plans égaux avec la même direction & des vitesses égales, les forces des chocs sont comme les densités.*

DEMONSTRATION.

A cause de l'égalité des plans & des vitesses, les volumes qui choquent sont égaux ; or les masses qui ont même volume sont entr'elles comme leur densités, donc les masses qui choquent sont comme les densités, mais les forces sont comme les produits des masses par les vitesses, & par la supposition, les vitesses sont égales ; donc les forces sont comme les masses, ou comme les densités.

COROLLAIRE I.

70. *Si les densités sont inégales & les plans aussi, les forces des chocs sont en raison composée des densités & des plans.*

A cause de l'inégalité des plans & de l'égalité des vitesses, les volumes qui choquent sont comme les plans, & les masses qui choquent sous ces volumes sont en raison composée des volumes & des densités ; donc elles sont aussi en raison composée des plans & des densités ; mais à cause de l'égalité des vitesses, les forces sont comme les masses ; donc les forces sont en raison composée des plans & des densités.

COROLLAIRE II.

71. *Si les densités & les vitesses sont inégales & les plans égaux, les forces des chocs sont entr'elles en raison composée de la raison des densités & de la raison des quarrés des vitesses.*

A cause de l'égalité des plans, les volumes sont comme les vitesses & les masses qui choquent sous ces volumes, sont e

raison composée des volumes & des densités, donc elles sont aussi en raison composée des vitesses & des densités, mais les forces sont comme les produits des masses par les vitesses; donc elles sont comme le produit des quarrés des vitesses par les densités ou en raison composée de la raison des densités & de la raison des quarrés des vitesses.

COROLLAIRE III.

72. Si les densités, les vitesses, & les plans sont inégaux, les forces des chocs sont en raison composée de la raison des densités, de la raison des plans & de la raison des quarrés des vitesses.

A cause de l'inégalité des plans & des vitesses, les volumes sont en raison composée des plans & des vitesses, & les masses qui choquent sous ces volumes étant en raison composée des densités & des volumes, sont par conséquent en raison composée des densités, des vitesses, & des plans; mais les forces sont en raison composée des masses & des vitesses, donc elles sont aussi en raison composée des plans, des densités, & des quarrés des vitesses.

PROPOSITION XIII.

73. Si l'eau d'un Canal incliné choque directement les aîles d'une roue, la force du choc est comme le produit de l'aîle choquée C multipliée successivement par le rayon CD, par la densité de l'eau & par la hauteur AB de la chute de l'eau (Fig. 22.)

DEMONSTRATION.

La force absolue du choc est comme l'aîle ou le plan C multiplié par la densité, & ensuite par le quarré de la vitesse (N. 64. 65.) mais la vitesse que l'eau a acquise en C est égale à celle qu'elle auroit acquise en tombant de la hauteur AB, & par conséquent elle est comme la racine de sa hauteur, donc le quarré de cette vitesse est comme AB; ainsi la force absolue du choc est comme le plan C multiplié par la densité de l'eau, & ensuite par la hauteur AC, mais cette force en s'appliquant en C devient comme un poids qui fait tourner la roue & dont la vitesse est CD, donc son moment ou la force du choc qui fait tourner la roue est comme le plan C multiplié par la densité de l'eau, puis par la hauteur AB, & enfin par le rayon CD, donc, &c.

Iiii iij

COROLLAIRE I.

74. Si l'on a deux différens canaux & deux roues que l'eau fait tourner; la densité se trouvant alors la même, nous n'y aurons point d'égard, c'est pourquoi nommant P, p , les ailes des roues, R, r leur rayons, H, h les hauteurs des canaux, & F, f les forces des chocs qui font tourner les roues, nous aurons $F, f :: P \times R \times H, p \times r \times h$.

COROLLAIRE II.

75. Si l'on fait $P = p$, on aura $F, f :: R \times H, r \times h$, c'est-à-dire les ailes des roues étant égales, les forces des chocs sont en raison composée des rayons & des hauteurs.

COROLLAIRE III.

76. Si l'on fait $R = r$, on aura $F, f :: P \times H, p \times h$, c'est-à-dire les forces sont entr'elles en raison composée des ailes & des hauteurs, quand les rayons sont égaux.

COROLLAIRE IV.

77. Si l'on fait $H = h$, on aura $F, f :: P \times R, p \times r$; c'est-à-dire, les forces sont en raison composée des ailes & des rayons, quand les hauteurs sont égales.

COROLLAIRE V.

78. Si l'on fait $P = p$, & $R = r$, on aura $F, f :: H, h$, c'est-à-dire les ailes & les rayons étant égaux, les forces sont comme les hauteurs.

De même faisant $P = p$, & $H = h$, on aura $F, f :: R, r$, c'est-à-dire, les ailes & les hauteurs étant égales, les forces sont comme les rayons.

Enfin, faisant $H = h$, & $R = r$, on aura $F, f :: P, p$, c'est-à-dire, les hauteurs & les rayons étant égaux, les forces sont comme les ailes.

COROLLAIRE VI.

79. Si l'on fait $F = f$, on aura $P \times R \times H = p \times r \times h$; d'où l'on tire $P, p :: r \times h, R \times H$; c'est-à-dire les forces étant égales, les ailes sont en raison composée de la raison réciproque des rayons, & de la réciproque des hauteurs.

On peut tirer aisément d'autres Corollaires de tout ceci auquel je ne m'arrête point.

PROPOSITION XIV.

80. *Si un plan se meut dans un fluide qui est en repos, la résistance qu'il éprouve est comme ce plan multiplié par la densité du fluide, & ensuite par le quarré de la vitesse.*

DEMONSTRATION.

Que le plan se meuve avec une certaine vitesse dans un fluide qui est en repos, ou que le plan étant en repos, le fluide se meuve avec la même vitesse, c'est la même chose, c'est-à-dire le choc ou l'impression est la même; or si le fluide se mouvoit avec la vitesse dont le plan se meut, & que le plan fut en repos, la force du choc seroit comme le plan multiplié par la densité du fluide, & ensuite par le quarré de la vitesse; donc si le plan se meut, & que le fluide soit en repos, la résistance que le plan éprouvera sera comme le plan multiplié par la densité, & ensuite par le quarré de la vitesse.

COROLLAIRE I.

81. *Si deux plans inégaux se meuvent avec une même vitesse dans un fluide en repos, les résistances qu'ils éprouvent sont entr'elles comme les plans.*

Car si les plans étoient en repos, & que le fluide les choquât avec la même vitesse, les forces des chocs seroient comme les plans (N. 66.)

COROLLAIRE II.

82. *Si deux plans inégaux se meuvent avec des vitesses inégales dans un fluide, les résistances qu'ils éprouvent sont en raison composée des plans & des quarrés des vitesses.*

Ceci se démontre comme dans le Corollaire précédent, & on pourroit tirer grand nombre d'autres Corollaires que j'obtiens parce qu'ils sont trop faciles, après ce qui a été dit dans les Propositions précédentes.

PROPOSITION XV.

83. *Si un fluide choque indirectement une droite AB (Fig. 23.) selon des droites paralleles AC, DB, sa vitesse absolue est à sa vi-*

tesse respective comme le sinus total est au sinus de l'angle d'incidence.

DEMONSTRATION.

Supposons que la droite AC exprime la vitesse absolue du fluide selon la direction AC, & menons du point C la droite CE perpendiculaire à AB, selon les loix du mouvement composé, la vitesse AC équivaut aux deux vitesses CF, AF, mais le fluide agissant selon la vitesse AF n'influe rien sur la ligne AB; donc il n'agit sur AB qu'avec la vitesse CF, or en prenant CA pour le rayon total, la droite CF est le sinus de l'angle CAF qui est l'angle d'inclinaison de la direction AC, donc la vitesse absolue AC du fluide est à la vitesse respective CF avec laquelle elle influe sur la ligne AB comme le sinus total AC au sinus d'incidence CF.

COROLLAIRE I.

84. *La masse du fluide qui choque la ligne AC indirectement, est à la masse qui la choqueroit directement avec la même vitesse comme le sinus de l'angle d'incidence est au sinus total.*

Je mene BE perpendiculaire à AC, & il est visible qu'il n'y a pas plus de filets d'eau qui vont choquer AB qu'il n'y en a qui choquent la droite BE sur laquelle ces filets sont perpendiculaires; ainsi le nombre des filets qui choquent AB est exprimé par la droite BE, mais si AB étoit choquée directement le nombre des filets qui la choqueroit directement seroit exprimé par AB, & comme nous supposons la vitesse égale dans le choc indirect & dans le choc direct, le volume du choc oblique est exprimé par BE, de même que le volume du choc direct est exprimé par AB; donc la masse qui choque indirectement AB est à la masse qui la choqueroit directement comme EB est à AB; or en prenant AB pour sinus total, la droite EB est le sinus de l'angle d'incidence CAB, donc, &c.

COROLLAIRE II.

85. *La force du fluide qui choque indirectement la droite AB est à la force du même fluide qui le choqueroit comme le carré du sinus de l'angle d'incidence est au carré du sinus total.*

La vitesse absolue est à la respective comme le sinus total au sinus de l'angle d'incidence (N. 83.), & la masse qui choqueroit directement

directement est à la masse qui choque obliquement aussi comme le sinus total à l'angle d'incidence (N. 84.), mais la force qui choqueroit directement est à la force qui choque obliquement en raison composée de la vitesse absolue à la vitesse respective, & de la masse qui choqueroit directement à la masse qui choque obliquement ; donc la force qui choqueroit directement est à la force qui choque obliquement en raison composée du sinus total au sinus de l'angle d'incidence, & du sinus total au sinus de l'angle d'incidence, c'est-à-dire la force qui choqueroit directement est à la force oblique comme le quarré du sinus total au quarré du sinus de l'angle d'incidence.

COROLLAIRE III.

86. Si l'on décrit un demi-cercle AEB sur la droite AB, & que du point B on mene une droite BE au point E, où la direction AC du fluide coupe la circonférence, & enfin du point E une perpendiculaire EH sur le diamètre, la force du choc direct sera à la force du choc indirect comme le diamètre AB est à sa partie BH ; car à cause des triangles semblables AEH, BEH, on a :: AB, BE, BH ; donc AB, BH :: \overline{AB} , \overline{BE} , mais la force du choc direct est à la force du choc oblique comme \overline{AB} , \overline{BE} ; donc ces deux forces sont aussi comme AB, BH.

COROLLAIRE IV.

87. Plus la direction CA est inclinée, sur le diamètre AB ; plus aussi le point E s'éloigne du point A, & plus HB devient petit par rapport à AB ; par exemple, si la direction est RA, le point R est plus éloigné de A que le point E, & la droite FB est moindre par rapport à AB que la droite HB ; d'où il suit que la force du choc devient moindre à mesure que l'angle d'incidence devient moindre, & que les forces des chocs sous différentes inclinaisons CA, RA, sont entr'elles comme les droites HB, FB.

COROLLAIRE V.

88. Si le fluide choquoit directement la droite AB, le volume de la masse qui choqueroit seroit la droite AB multipliée par la vitesse, parce que ce volume, comme nous avons dit,

K k k k

devient plus ou moins grand, à proportion de la vitesse (N. 65) ainsi nommant V la vitesse, la masse qui choque seroit $AB \times V$ & la force étant le produit de la masse par la vitesse seroit $AB \times V \times V = AB \times V^2$; or par le Corollaire précédent le choc direct est au choc indirect comme AB est à HB ; faisant donc $AB : HB :: AB \times V^2$, $\frac{HB \times AB \times V^2}{AB} = HB \times V^2$, ce quatrième terme exprimera la force du choc sous la direction AC .

Et par la même raison on trouvera que la force du choc sous la direction AR est $FB \times V^2$, & ainsi des autres.

PROPOSITION XVI.

89. Trouver l'angle sous lequel l'eau doit choquer le gouvernail d'un Vaisseau pour faire tourner le Vaisseau le plus vite qu'il est possible

SOLUTION.

Supposons que la figure AB (Fig. 24.) représente le vaisseau qui va de A vers B , que la droite AC soit la position du gouvernail, lequel souffre la résistance de l'eau selon la direction BA ou HC ; nous savons que la résistance que ce gouvernail souffre est égale à la force qu'il soutiendrait s'il étoit en repos & que l'eau le choquât selon les directions HC , BA avec la même vitesse dont le Vaisseau est poussé de A vers B .

Du point A je mène AD perpendiculaire sur la direction HC , & supposant que la droite DC représente la vitesse de l'eau qui choquerait le gouvernail s'il étoit en repos, il est évident que la masse d'eau qui choquerait directement ce gouvernail seroit $CA \times DC$ (N. 65); or la masse qui choquerait directement est à celle qui choque obliquement, comme le sinus total est au sinus d'incidence (N. 84), & en prenant pour sinus total la droite AC , le sinus de l'angle d'incidence HCA est la droite DA ; donc faisant AC , $DA :: AC \times DC$, $\frac{DA \times AC \times DC}{AC} = DA \times DC$, le quatrième terme $DA \times DC$ est la masse qui choque obliquement le gouvernail.

Or la vitesse oblique DC est à la vitesse directe comme le sinus de l'angle d'incidence est au sinus total (N. 84), ainsi tirant DO perpendiculaire sur AC , la vitesse oblique sera à la vitesse directe comme DO est à DC , car à cause des triangles rectangles DOC , CAD , on a DO , $DC :: CA$, AD ; mais CA est à AD ,

comme le sinus de l'angle d'incidence est au sinus total, donc, &c. & par conséquent DO exprime la vitelle oblique dont la masse de l'eau choque AC.

Mais la vitesse DO avec laquelle la masse agit sur AC n'étant pas perpendiculaire sur la direction BN du Vaisseau que la force de la masse d'eau doit faire tourner, je mene AM parallele & égale à DO, & du point M la droite MN perpendiculaire à la direction du Vaisseau, & il est visible par les regles du mouvement composé, que la vitesse DO ou AM est équivalente à deux vitesses AN, NM, dont la seule dernière NM peut agir pour faire tourner le Vaisseau, car la première AN étant dans la direction contraire à celle du Vaisseau ne peut tout au plus que ralentir son mouvement; ainsi la force que l'eau employe pour faire tourner le Vaisseau est le produit de la masse $DA \times DC$ par la vitelle NM, & par conséquent cette force est $DA \times DC \times NM$; mais le gouvernail AC est comme un levier sur lequel cette force s'applique; concevant donc que l'effort de cette force soit réuni au centre de gravité P du gouvernail où elle agira de même que si elle étoit repandue sur toute l'étendue de ce gouvernail, la distance PA sera la vitesse que cette force acquiert en agissant sur le Vaisseau par le moyen du gouvernail, multipliant donc $DA \times DC \times NM$ par PA, nous aurons enfin $DA \times DC \times NM \times PA$ pour l'effort de l'eau sur le vaisseau.

Maintenant pour trouver l'angle d'incidence DCA sous lequel l'eau sera capable de faire tourner le Vaisseau avec la plus grande vitesse; du point O je mene OS parallele à DA, & les triangles rectangles AMN, DSO étant semblables & égaux, à cause des paralleles AM, DO, AN, DS, & de $AM = DO$, j'ai $MN = SO$.

Je nomme $AC = a$, $DC = x$, $AP = c$, $DA = b$; les triangles semblables DCA, DCO donnent CA, AD :: CD, CO, donc $a, b :: x, \frac{bx}{a} = CO$; de même les triangles semblables CDA, CSO donnent CA, AD :: CO, OS, donc $a, b :: \frac{bx}{a}, \frac{b^2x}{a^2} = OS$; or l'effort de l'eau qui agit pour faire tourner le Vaisseau est $DA \times DC \times NM \times AP$, mettant donc les valeurs analytiques de ces lignes, nous aurons $\frac{b^3x}{a^2}$ pour la valeur de cet effort, mais à cause du triangle rectangle CDA nous avons $\overline{DA} = \overline{CA}$

K k k k ij

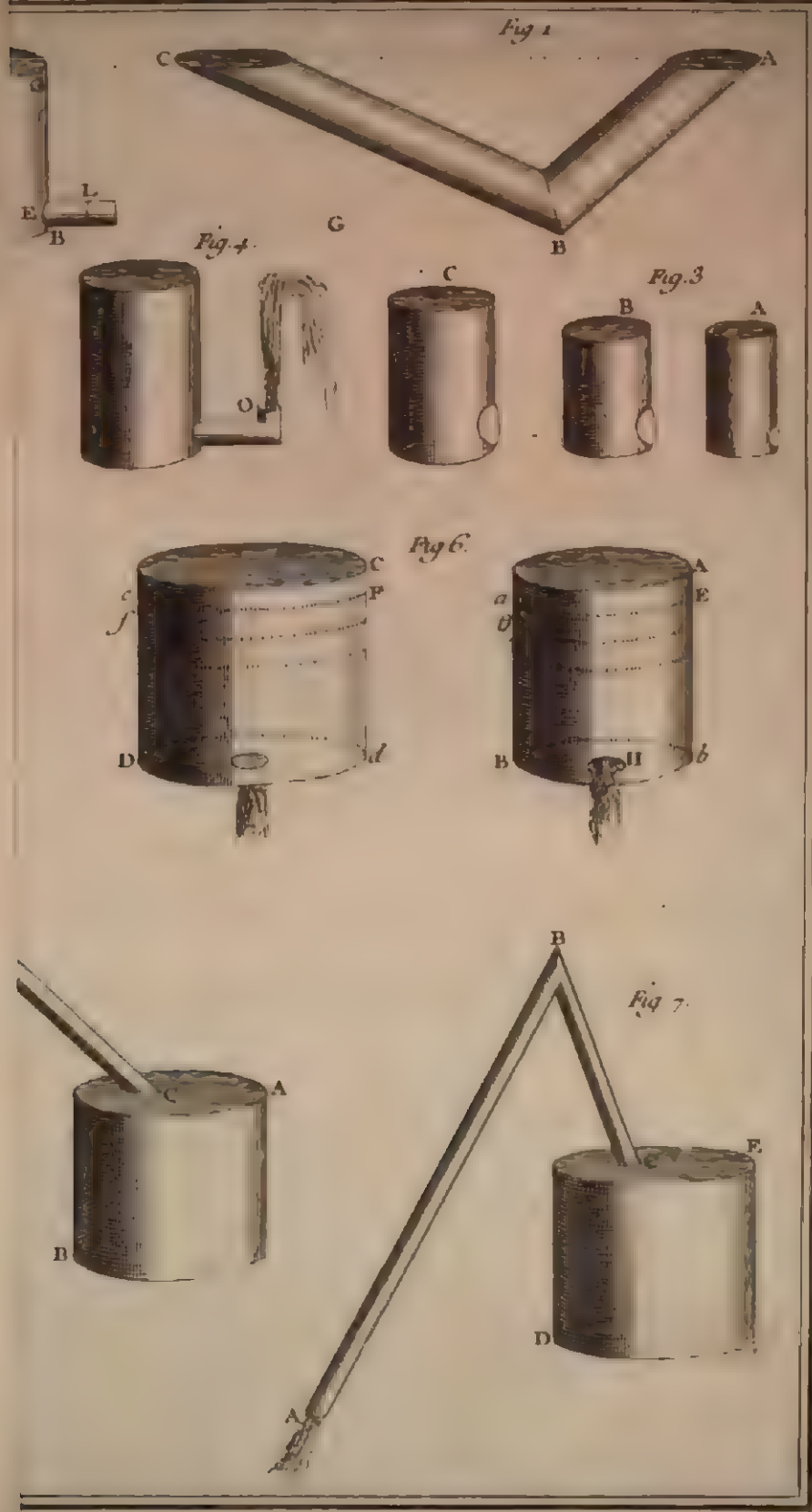
— \overline{CD} , donc $\overline{DA} = a^2 - x^2 = b^2$, & mettant cette valeur de b^2 dans $\frac{1}{a^2}x$, nous aurons $cbx - \frac{cbx^2}{a^2}$ pour l'effort de l'eau sur le Vaisseau ; or cet effort doit être par la supposition le plus grand effort de l'eau pour faire tourner le Vaisseau, donc selon la règle des plus grandes & moindres quantités, je prens la différence $cbdx - \frac{2cbx^2 \cdot dx}{a^2}$ de cet effort, & cette différence est égale à zero ; j'ai donc $cbdx - \frac{2cbx^2 \cdot dx}{a^2} = 0$, d'où je tire $cbdx = \frac{2cbx^2 \cdot dx}{a^2}$, ou $1 = \frac{2x^2}{a^2}$, & $a^2 = 3x^2$, qui se réduit à $\frac{1}{3}a^2 = x^2$, & tirant la racine quarrée, j'ai $x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$; mais en prenant AC pour le sinus total, la droite DC est le sinus de l'angle CAD, donc ce sinus est égal à la racine du tiers du quarré du sinus total.

Supposant donc le sinus total = 10000000 son quarré est 1000000000000 dont le tiers est 333333333333, & la racine quarrée est 5773502 = CD = x, & cherchant ce sinus dans les Tables des sinus, je trouve qu'il appartient à un angle de 35 degrés 16 minutes ; donc l'angle ACD qui est le complement à l'angle droit de l'angle CAD est de 54 degrés 44 minutes, donc l'angle d'incidence de l'eau sur le gouvernail doit être de 54 degrés 44 minutes, si l'on veut que cette eau fasse tourner le Vaisseau avec la plus grande vitesse possible.

COROLLAIRE.

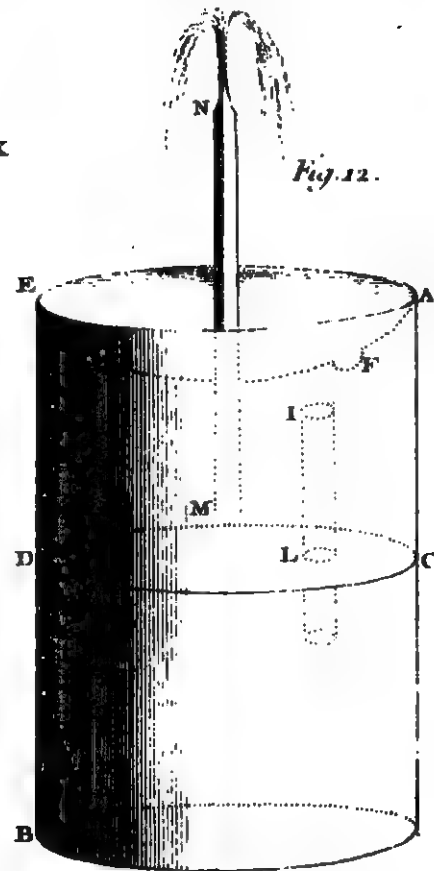
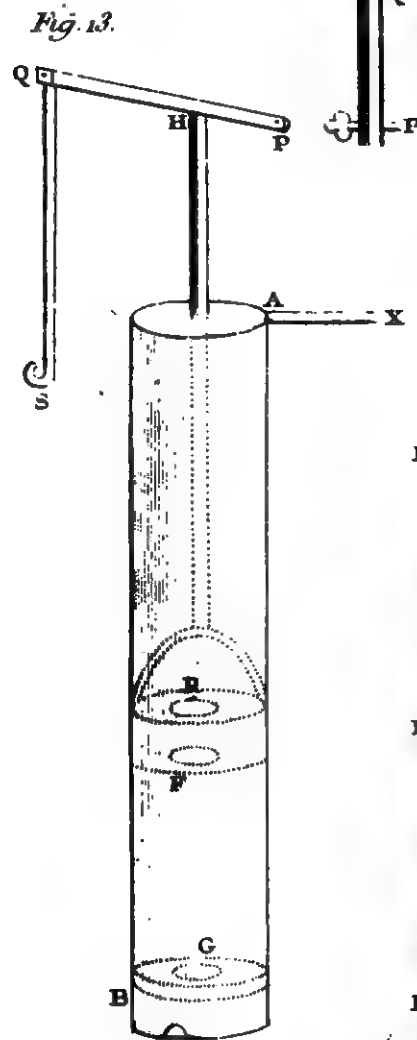
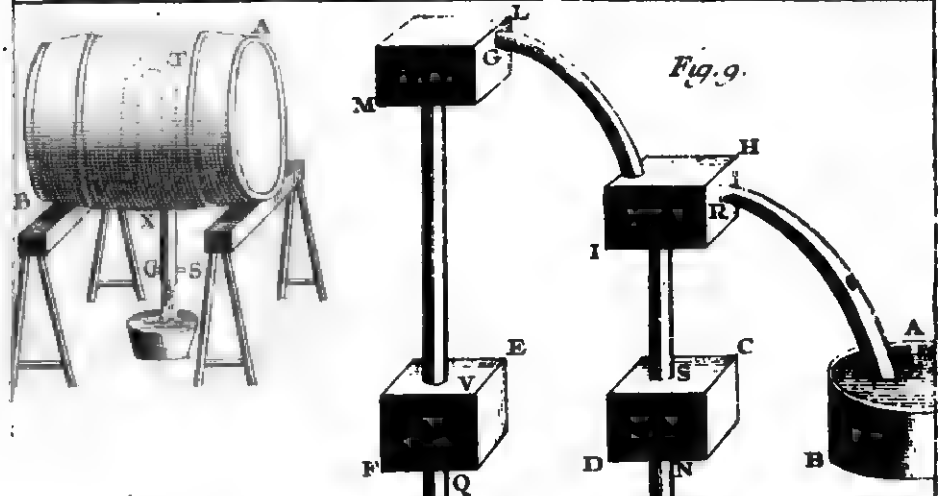
90. On trouve de la même façon l'angle que l'aile du moulin doit faire avec l'axe, afin que le vent la fasse tourner le plus vite qu'il se puisse.

Supposons que la droite AB (Fig. 25.) représente l'axe du moulin, le plan CF l'aile, que le vent souffle selon la direction AB de l'axe, & qu'après avoir mené SD parallèle à AB, & CP perpendiculaire à SD, la droite HB représente la vitesse du vent ; l'air ou le vent étant un fluide, la masse d'air qui choque le plan CF ou la ligne CD que nous considererons comme représentant le plan CF, ne sera pas plus grande que la masse qui choque la droite CP, ainsi cette masse sera $CP \times HB$, je mené HI perpendiculaire à CD, & cette droite HI exprime la vitesse dont l'air choque CD, & comme en menant IR perpendiculaire à l'axe AB, la vitesse HI est équivalente aux deux HR, IR, & que cette dernière est la seule qui puisse faire tourner l'aile autour de l'axe,





FOR LIBRARY
1971
11 - 1



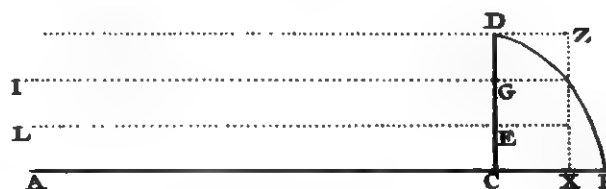
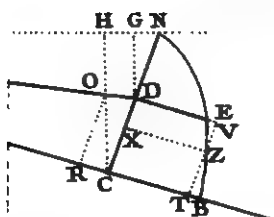


Fig. 21.

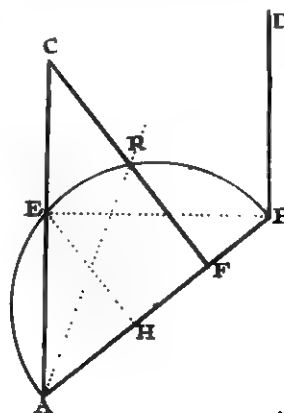
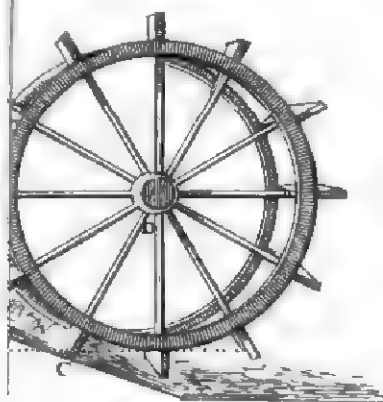
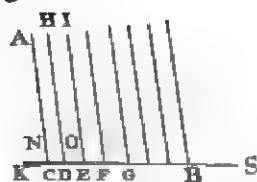
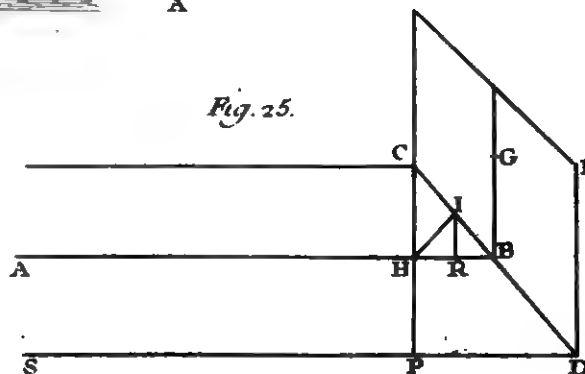
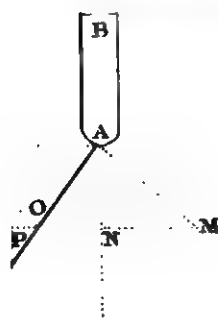


Fig. 31.



NY

Il s'en suit que la force de la masse $CP \times HB$ qui agit pour faire tourner l'aile est $CP \times HB \times IR$; mais cette force agissant sur cet aile agit comme sur un levier par le moyen duquel elle fait tourner l'axe; prenant donc le centre de gravité G de ce levier, la distance BG est la vitesse de cette force, & par conséquent la force totale est $CP \times HB \times IR \times BG$.

Je nomme $PD = x$, $CD = a$, $CP = b$, & $BG = c$, donc $CB = \frac{1}{2}a$, & $HB = \frac{1}{2}x$; les triangles semblables CDP, HBI donnent $CD, CP :: HB, HI$, donc $a, b :: \frac{1}{2}x, \frac{bx}{2a} = HI$; de même les triangles semblables CDP, HIR donnent $CD, DP :: HI, IR$, donc $a, x :: \frac{bx}{2a}, \frac{bx^2}{2a^2} = IR$, & mettant les valeurs de CP, HB, IR, BG dans la force totale $CP \times HB \times IR \times BG$, nous aurons $\frac{cbbx^3}{4a}$ pour l'expression de cette force; or $bb = aa - xx$, donc $\frac{cbbx^3}{4a^2} = \frac{cx^3}{4} - \frac{cx^5}{4a^2}$; mais $x^2 = aa - bb$, donc, mettant cette valeur de x^2 , nous aurons $\frac{caax - bbcx}{4} - \frac{caax^3 + cbbx^3}{4a^2}$ pour l'expression de la force, & prenant la différence nous aurons $\frac{aacdx - bbcdx}{4} - \frac{3aacx^2dx + 3cbbx^2dx}{4a^2} = 0$, donc $aacdx - bbcdx = \frac{3aacx^2dx - 3cbbx^2dx}{a^2}$, d'où l'on tire $a^2 = 3x^2$; & par conséquent $\sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x$, de même que ci-dessus.

Fin du quatrième & dernier Livre.

T A B L E
DES CHAPITRES
Contenus dans ce V

L I V R E P R E

De la Méchanique des Solides,

- CHAPITRE I. **D**éfinitions & Axiom.
- CHAP. II. Du Mouvement uniforme des
- CHAP. III. Du Mouvement uniformemen-
ment uniformement retardé.
Principes fondés sur l'expérience.
- CHAP. IV. Du centre de gravité des fig.
Remarque en forme de Dissertation sur
- CHAP. V. Du mouvement des corps.
- CHAP. VI. Du repos & de la chute des co
- CHAP. VII. Du mouvement des corps /
zon.
- CHAP. VIII. Du mouvement des Corps qu
le long des lignes courbes.
- CHAP. IX. Du mouvement des pendul
tion.
- CHAP. X. Du mouvement des corps projet
- CHAP. XI. Du choc des corps.
- CHAP. XII. De la force centrifuge & de
- CHAP. XIII. De la résistance du milieu
en mouvement passent.
- CHAP. XIV. Des machines simples.
*Du Levier.
De la Roue dans son aissieu.
Des Roues dentées.
De la Poulie.*

TABLE DES CHAPITRES.

<i>De la Vis.</i>	420
<i>Du Coin.</i>	426
CHAP. XV. <i>Du frottement des machines.</i>	427
<i>De la force des corps projetés.</i>	449
<i>Du choc oblique des corps qui se meuvent uniformement.</i>	456
<i>Du choc d'une boule qui frappe plusieurs autres boules immédiatement.</i>	463
<i>Du choc des corps projetés qui se rencontrent pendant leur mouvement.</i>	492.

LIVRE SECOND.

De l'Hydrostatique.

CHAPITRE I. D éfinitions & Principes.	503
CHAP. II. <i>De l'équilibre des fluides.</i>	508
CHAP. III. <i>De quelle maniere les corps solides pesent dans les fluides qui ont moins de pesanteur spécifique qu'eux.</i>	525
CHAP. IV. <i>De la maniere dont les solides pesent dans les fluides qui ont plus de pesanteur spécifique qu'eux.</i>	532

LIVRE TROISIEME.

De l'Airométrie.

CHAPITRE I. D éfinitions & Principes.	541
CHAP. II. <i>Du ressort de l'Air.</i>	546
CHAP. III. <i>De la compression de l'Air & de son équilibre avec les autres fluides.</i>	554
CHAP. IV. <i>De la rarefaction & condensation de l'air, & de sa densité.</i>	565
CHAP. V. <i>Du mouvement de l'air.</i>	568
CHAP. VI. <i>Des Instrumens qui servent à connoître & à mesurer les différentes pesanteurs de l'air, ses différentes densités, & ses différens degrés de chaleur & de froideur.</i>	575

LIVRE QUATRIEME.

De l'Hydraulique.

CHAPITRE I.	D U mouvement des fluides causé par leurs pesanteurs.	587
CHAP. II.	Du mouvement qu'on peut donner à l'eau par le moyen de l'Air. De la Pompe aspirante, & de la Pompe refoulante.	598 605
CHAP. III.	Du cours des Rivières.	607
CHAP. IV.	Du choc des Fluides.	618

Fin de la Table des Chapitres.





1. 1. 1.

1. 1. 2.

1. 1. 3.

1. 1. 4.

1. 1. 5.

1. 1. 6.

1. 1. 7.

1. 1. 8.

1. 1. 9.

1. 1. 10.

1. 1. 11.

1. 1. 12.

1. 1. 13.

1. 1. 14.

1. 1. 15.

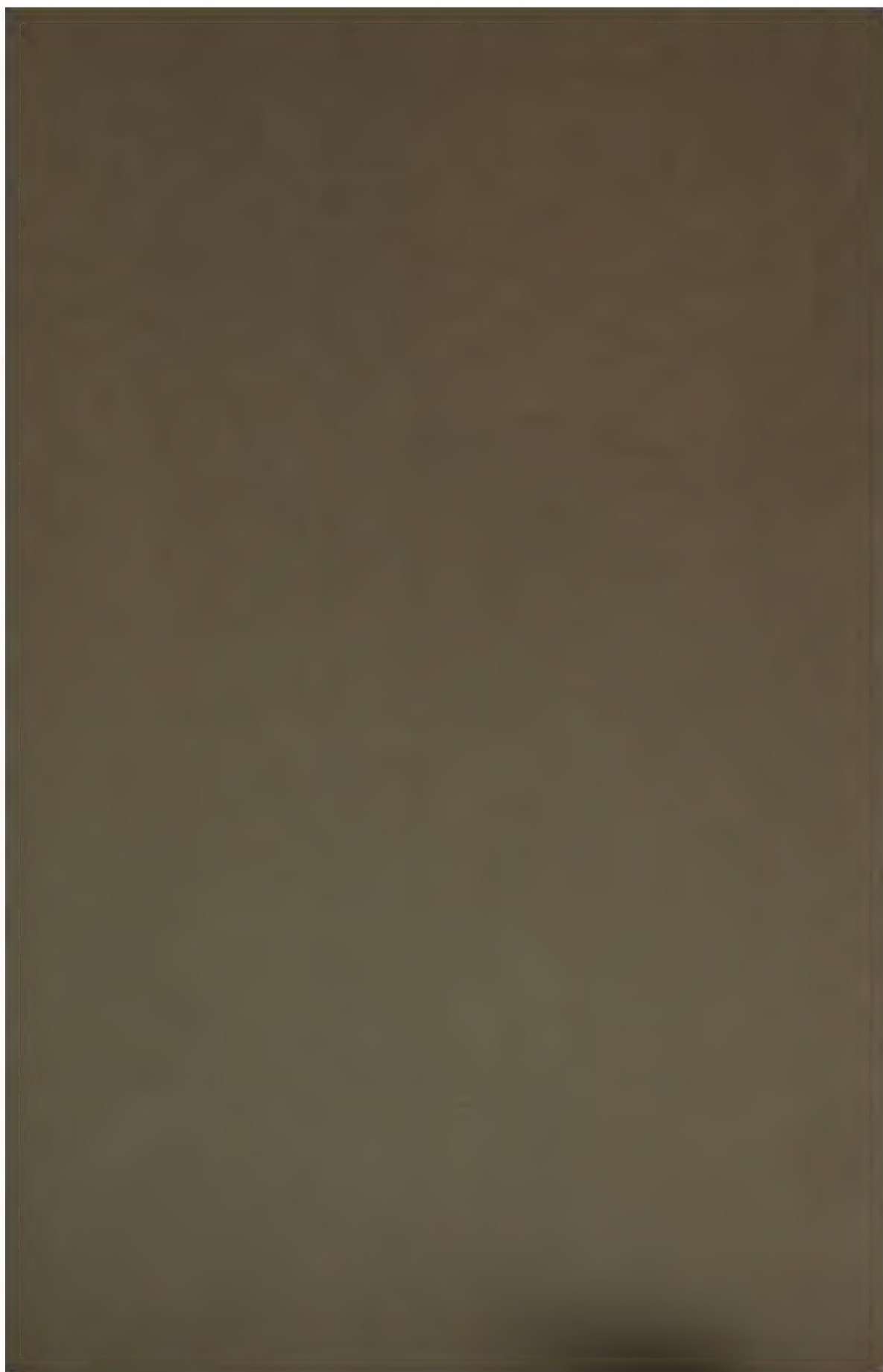
1. 1. 16.

1. 1. 17.

1. 1. 18.

100

1000





FEB 24 1930

